Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 512.554

КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЯНГА — БАКСТЕРА НА АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ. СТРУКТУРА АЛЬТЕРНАТИВНОЙ Д–БИАЛГЕБРЫ НА МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЕ КЭЛИ — ДИКСОНА

М. Е. Гончаров

Аннотация: Рассматриваются уравнения Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах и доказывается, что биалгебры, индуцированные решениями этих уравнений, являются альтернативными Д-биалгебрами. Описана структура альтернативной Д-биалгебры, заданная на матричной алгебре Кэли — Диксона.

Ключевые слова: альтернативная алгебра, йорданова биалгебра, классическое уравнение Янга — Бакстера, неассоциативная коалгебра, алгебра Кэли — Диксона.

Биалгебры Ли — это одновременно алгебры Ли и коалгебры Ли, коумножение которых является 1-коциклом. Биалгебры Ли введены Дринфельдом [1] для изучения решений классического уравнения Янга — Бакстера. В работах [2, 3] дано определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр. В частности, определены ассоциативные и йордановы Д-биалгебры, а также рассмотрен ассоциативный аналог уравнения Янга — Бакстера и ассоциативные Д-биалгебры, связанные с решениями этого уравнения. Там же описаны ассоциативные алгебры, допускающие нетривиальную структуру Д-биалгебры с кокоммутативным на центре коумножением. Одним из условий ассоциативных Д-биалгебр является то, что коумножение — это дифференцирование исходной алгебры в ее тензорный квадрат, рассмотренный как бимодуль над исходной алгеброй. Такие биалгебры введены в [4] и изучались в [5]. В последней работе изучены некоторые свойства решений ассоциативного аналога уравнения Янга — Бакстера и свойства сбалансированных биалгебр (по-другому Д-биалгебр). Ассоциативные классические уравнения Янга — Бакстера с параметрами рассматривались в [6]. Класс йордановых Д-биалгебр, связанный с йордановым аналогом уравнения Янга — Бакстера, определен в [7], где доказано, что всякая конечномерная йорданова Д-биалгебра, которая полупроста как алгебра, принадлежит этому классу.

С каждой лиевой, ассоциативной или йордановой биалгеброй можно связать так называемую тройку Манина. В [8] тройки Манина для ассоциативных алгебр изучались как инструмент построения решений уравнения Янга — Бакстера.

В настоящей работе изучаются альтернативные Д-биалгебры. В § 1 в терминах коумножения получены необходимые и достаточные условия альтернативности Д-биалгебры. В § 2 вводится класс биалгебр, связанных с уравнением

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00230) и Министерства образования (проект РНПВШ № 11617).

Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах. Показано, что биалгебры этого класса являются альтернативными Д-биалгебрами. В § 3 описана структура альтернативной Д-биалгебры, заданная на матричной алгебре Кэли — Диксона.

§ 1. Определения и предварительные результаты

Для линейных пространств V и U над полем F через $V \otimes U$ обозначим их тензорное произведение над F. На пространстве $V \otimes V$ определим линейное отображение τ, полагая $\tau\big(\sum\limits_i a_i \otimes b_i\big) = \sum\limits_i b_i \otimes a_i$. Через V^* обозначим пространство всех линейных функционалов, заданных на V. Для элементов $f \in V^*$ и $v \in V$ выражение $\langle f, v\rangle$ обозначает значение линейного функционала f на элементе v. Подпространство S в V^* называется *всюду плотным* в V^*, если для любого элемента $a \in V$ существует $f \in S$ такой, что $\langle f, a\rangle \neq 0$.

Пусть $\rho : V^* \otimes U^* \to (V \otimes U)^*$ — линейное отображение, определенное равенством

$$\Big\langle \rho(f \otimes g), \sum_i a_i \otimes b_i \Big\rangle = \sum_i \langle f, a_i\rangle\langle g, b_i\rangle.$$

Поскольку отображение ρ является вложением, элемент $\rho(f \otimes g)$ будем отождествлять с элементом $f \otimes g$.

Определение. Пара (A, Δ), где A — линейное пространство над F, а $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — линейное отображение, называется *коалгеброй*. При этом отображение Δ называется *коумножением*.

Для элемента $a \in A$ будем использовать обозначение $\Delta(a) = \sum\limits_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

На пространстве A^* определим умножение, полагая

$$\langle fg, a\rangle = \sum_a \langle f, a_{(1)}\rangle\langle g, a_{(2)}\rangle,$$

где $f, g \in A^*, a \in A$ и $\Delta(a) = \sum\limits_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Полученная алгебра называется *дуальной алгеброй* коалгебры (A, Δ).

Дуальная алгебра A^* коалгебры (A, Δ) задает бимодульное действие $(\cdot)$ на A, которое определяется следующим образом:

$$f \cdot a = \sum_a a_{(1)}\langle f, a_{(2)}\rangle, \quad a \cdot f = \sum_a \langle f, a_{(1)}\rangle a_{(2)},$$

где $f \in A^*$ и $\Delta(a) = \sum\limits_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

В работе [9] дано следующее определение коалгебры, связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть M — произвольное многообразие алгебр. Тогда пара (A, Δ) называется *M-коалгеброй*, если дуальная алгебра A^* принадлежит многообразию M.

Пусть теперь A — произвольная алгебра, на которой задано коумножение Δ, и A^* — дуальная алгебра коалгебры (A, Δ). Алгебра A задает бимодульное действие $(\bullet)$ на пространстве A^*, определенное формулами

$$\langle f \bullet a, b\rangle = \langle f, ab\rangle, \quad \langle b \bullet f, a\rangle = \langle f, ab\rangle.$$

Рассмотрим пространство $D(A) = A \oplus A^*$ и зададим на нем умножение, полагая

$$(a + f) * (b + g) = (ab + f \cdot b + a \cdot g) + (fg + f \bullet b + a \bullet g).$$

Тогда $D(A)$ является обычной алгеброй над полем F, а A и A^* — подалгебры в $D(A)$. Алгебру $D(A)$ будем называть *дублем Дринфельда.*

На пространстве $D(A)$ определим форму Q, полагая

$$Q(a+f, b+g) = \langle g, a\rangle + \langle f, b\rangle$$

для любых $f, g \in A^*$ и $a, b \in A$. Тогда Q — невырожденная симметрическая ассоциативная билинейная форма, т. е. $Q(xy, z) = Q(x, yz)$.

В работе [2] дано следующее определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть M — произвольное многообразие F-алгебр и A — алгебра из M, на которой дополнительно задано коумножение Δ. Тогда пару (A, Δ) будем называть *M-биалгеброй по Дринфельду*, если алгебра $D(A)$ принадлежит многообразию M.

Алгебра A называется *альтернативной*, если для любых $x, y \in A$ в ней выполняются следующие тождества:

$$(x, x, y) = 0, \quad (y, x, x) = 0.$$

Хорошо известно, что в альтернативной алгебре A для любых $x, y, z \in A$ имеют место тождества

$$(x, z, y) + (z, x, y) = 0, \quad (x, y, z) + (x, z, y) = 0, \quad (x, y, z) - (y, z, x) = 0.$$

Раскрыв ассоциаторы в последнем равенстве, получим

$$x(yz) + (yz)x = y(zx) + (xy)z. \tag{1}$$

Как легко видеть, справедлива

Лемма 1. *Пусть A — алгебра, на которой задана невырожденная симметрическая ассоциативная билинейная форма Q. Тогда алгебра A альтернативна в том и только том случае, если в ней выполняется хотя бы одно из тождеств:*

$$(x, x, y) = 0 \quad \text{или} \quad (y, x, x) = 0.$$

Пусть A — альтернативная алгебра над полем F, на которой задано коумножение Δ. Наша ближайшая цель — получить необходимые и достаточные условия в терминах коумножения, при которых пара (A, Δ) является альтернативной Д-биалгеброй.

Лемма 2. *Пусть пара (A, Δ) — произвольная коалгебра. Предположим, что алгебра $D(A)$ является альтернативной алгеброй. Тогда A — альтернативная алгебра, (A, Δ) — альтернативная коалгебра и справедливы равенства*

$$\begin{aligned}\Delta(ab) = \sum_a (a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + a_{(2)}b \otimes a_{(1)} - a_{(2)} \otimes ba_{(1)}) \\ + \sum_b (b_{(1)} \otimes ab_{(2)} + b_{(1)} \otimes b_{(2)}a - ab_{(1)} \otimes b_{(2)});\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\sum_{ba} ((ba)_{(1)} \otimes (ba)_{(2)} + (ba)_{(2)} \otimes (ba)_{(1)}) \\ = \sum_a (a_{(1)} \otimes ba_{(2)} + ba_{(2)} \otimes a_{(1)}) \sum_b (b_{(1)}a \otimes b_{(2)} + b_{(2)} \otimes b_{(1)}a);\end{aligned} \tag{3}$$

$$\Delta(a^2) = \sum_a a_{(1)}a \otimes a_{(2)} + \sum_a a_{(1)} \otimes aa_{(2)}. \tag{4}$$

Доказательство. Ясно, что A — альтернативная алгебра, а (A, Δ) — альтернативная коалгебра.

В силу альтернативности алгебры $D(A)$ для любых элементов $a, b \in A$, $f, g \in A^*$ имеем

$$((a+f) * (a+f)) * (b+g) = (a+f) * ((a+f) * (b+g)). \tag{$*$}$$

Если $g = 0$, то, вычислив левую часть, получим

$$\begin{aligned}((a+f)*(a+f))*b &= a^2b + (a\cdot f)b + (f\cdot a)b \\ &+ f^2\cdot b + (a\bullet f)\cdot b + (f\bullet a)\cdot b + f^2\bullet b + (a\bullet f)\bullet b + (f\bullet a)\bullet b.\end{aligned}$$

Аналогично для правой части:

$$\begin{aligned}(a+f)*((a+f)*b) &= a(ab) + a(f\cdot b) + a\cdot(f\bullet b) \\ &+ f\cdot(ab) + f\cdot(f\cdot b) + f(f\bullet b) + f\bullet(f\cdot b) + a\bullet(f\bullet b) + f\bullet(ab).\end{aligned}$$

В силу альтернативности алгебры A^* и ассоциативности формы Q для произвольного $h \in A^*$ имеем

$$Q(h, f^2\cdot b) = Q(h, f\cdot(f\cdot b)).$$

Из невырожденности формы Q следует, что $f^2\cdot b = f\cdot(f\cdot b)$. Отсюда, используя альтернативность алгебры A, приходим к равенству

$$(a\cdot f)b + (f\cdot a)b + (a\bullet f)\cdot b + (f\bullet a)\cdot b = a(f\cdot b) + a\cdot(f\bullet b) + f\cdot(ab).$$

Так как, с одной стороны,

$$\begin{aligned}&Q(g, (a\cdot f)b + (f\cdot a)b + (a\bullet f)\cdot b + (f\bullet a)\cdot b) \\ &\quad \langle g\otimes f, \sum_a a_{(2)}b\otimes a_{(1)} + \sum_a a_{(1)}b\otimes a_{(2)} + \sum_b b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + \sum_b b_{(1)}\otimes ab_{(2)}\rangle,\end{aligned}$$

и, с другой —

$$\begin{aligned}&Q(g, a(f\cdot b) + a\cdot(f\bullet b) + f\cdot(ab)) \\ &\qquad = \langle g\otimes f, \sum_b ab_{(1)}\otimes b_{(2)} + \sum_a a_{(2)}\otimes ba_{(1)} + \sum_{ab}(ab)_{(1)}\otimes(ab)_{(2)}\rangle,\end{aligned}$$

в силу плотности пространства $\rho(A^*\otimes A^*)$ в $(A\otimes A)^*$ получаем

$$\begin{aligned}&\sum_a a_{(2)}b\otimes a_{(1)} + \sum_a a_{(1)}b\otimes a_{(2)} + \sum_b b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + \sum_b b_{(1)}\otimes ab_{(2)} \\ &\qquad = \sum_b ab_{(1)}\otimes b_{(2)} + \sum_a a_{(2)}\otimes ba_{(1)} + \sum_{ab}(ab)_{(1)}\otimes(ab)_{(2)},\end{aligned}$$

и равенство (2) доказано.

Полагая в $(*)$ $g = 0$ и $a = 0$, получим

$$(ff)\bullet b = f(f\bullet b) + f\bullet(f\cdot b).$$

В силу ассоциативности формы Q для любого элемента $a \in A$ имеем

$$Q(ff, ba) = Q(f(f\bullet b), a) + Q(f, (f\cdot b)a).$$

Следовательно,

$$\Big\langle f\otimes f, \sum_{ba}(ba)_{(1)}\otimes(ba)_{(2)}\Big\rangle = \Big\langle f\otimes f, \sum_a a_{(1)}\otimes ba_{(2)} + \sum_b b_{(1)}a\otimes b_{(2)}\Big\rangle. \quad (5)$$

Отсюда

$$\sum_{ba}(ba)_{(1)}\otimes(ba)_{(2)} + (ba)_{(2)}\otimes(ba)_{(1)} = \sum_a (a_{(1)}\otimes ba_{(2)} + ba_{(2)}\otimes a_{(1)}) + \sum_b (b_{(1)}a\otimes b_{(2)} + b_{(2)}\otimes b_{(1)}a),$$

и равенство (3) доказано.

Пусть в $(*)$ $b=0$, $f=0$. Тогда $(a*a)*g = a*(a*g)$. Отсюда $(a^2)\cdot g = a(a\cdot g) + a\cdot(a\bullet g)$. Поэтому для любого $f\in A^*$ имеем

$$Q(f,(a^2)\cdot g) = Q(f, a(a\cdot g) + a\cdot(a\bullet g)).$$

В силу ассоциативности формы Q

$$Q(gf, a^2) = \sum_a Q(f, aa_{(2)})Q(g, a_{(1)}) + \sum_a Q(f, a_{(2)})Q(g, a_{(1)}a);$$

$$\Big\langle g\otimes f, \sum_{a^2}(a^2)_{(1)}\otimes(a^2)_{(2)}\Big\rangle = \Big\langle g\otimes f, \sum_a a_{(1)}a\otimes a_{(2)} + \sum_a a_{(1)}\otimes aa_{(2)}\Big\rangle.$$

Из плотности пространства $\rho(A^*\otimes A^*)$ в $(A\otimes A)^*$ следует, что

$$\sum_{a^2}(a^2)_{(1)}\otimes(a^2)_{(2)} = \sum_a a_{(1)}a\otimes a_{(2)} + \sum_a a_{(1)}\otimes aa_{(2)}.$$

Таким образом, равенство (4) и лемма доказаны.

Предложение 1. *Пусть для биалгебры (A,Δ) выполняются равенства (2) и (3). Тогда для любых элементов $a,b\in A$ имеет место равенство*

$$\sum_b (ab_{(1)}\otimes b_{(2)} + b_{(1)}a\otimes b_{(2)}) + \sum_a (a_{(2)}\otimes ba_{(1)} + a_{(1)}\otimes ba_{(2)}) = \sum_b b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + \Delta(ba) + \sum_a a_{(2)}b\otimes a_{(1)}. \quad (6)$$

Доказательство. В равенстве (2), сделав замену a на b и подействовав отображением τ на обе части равенства, получаем, что для любых $a,b\in(A,\Delta)$ имеет место равенство

$$\sum_{ba}(ba)_{(2)}\otimes(ba)_{(1)} = \sum_b (b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + b_{(2)}\otimes b_{(1)}a - ab_{(1)}\otimes b_{(2)}) + \sum_a (a_{(2)}b\otimes a_{(1)} + ba_{(2)}\otimes a_{(1)} - a_{(2)}\otimes ba_{(1)}).$$

Подставив последнее равенство в (3), получаем

$$\sum_{ba}(ba)_{(1)}\otimes(ba)_{(2)} + \sum_b (b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + b_{(2)}\otimes b_{(1)}a - ab_{(1)}\otimes b_{(2)}) + \sum_a (a_{(2)}b\otimes a_{(1)} + ba_{(2)}\otimes a_{(1)} - a_{(2)}\otimes ba_{(1)}) = \sum_a (a_{(1)}\otimes ba_{(2)} + ba_{(2)}\otimes a_{(1)}) + \sum_b (b_{(1)}a\otimes b_{(2)} + b_{(2)}\otimes b_{(1)}a).$$

Равенство (6) доказано.

Заметим, что если характеристика поля F не равна 2, то равенство (4) следует из равенств (2) и (3).

Лемма 3. *Пусть A — альтернативная алгебра над полем F характеристики $\neq 2$, на которой задано коумножение Δ. Предположим, что пара (A, Δ) является альтернативной коалгеброй и выполняются равенства (2) и (3). Тогда пара (A, Δ) является альтернативной Д-биалгеброй.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что для любых $a, b \in A$, $f, g \in A^*$ выполняются следующие равенства:

$$((a + f) * (a + f)) * b = (a + f) * ((a + f) * b), \tag{7}$$

$$((a + f) * (a + f)) * g = (a + f) * ((a + f) * g). \tag{8}$$

Докажем равенство (7). Для этого достаточно установить, что

$$(f \cdot a)b + (a \cdot f)b + (f \bullet a) \cdot b + (a \bullet f) \cdot b = a(f \cdot b) + a \cdot (b \bullet f) + f \cdot (ab)$$

и

$$f^2 \bullet b + (f \bullet a) \bullet b + (a \bullet f) \bullet b = f(f \bullet b) + f \bullet (f \cdot b) + a \bullet (f \bullet b) + f \bullet (ab).$$

Первое равенство имеет место ввиду равенства (2).

Докажем второе равенство. Поскольку форма Q ассоциативна и в алгебре A выполнено (1), то для любого $c \in A$ имеем

$$Q((a \bullet f) \bullet b + (f \bullet a) \bullet b, c) = Q(f \bullet (ab) + a \bullet (f \bullet b), c).$$

Отсюда получаем, что $(a \bullet f) \bullet b + (f \bullet a) \bullet b = f \bullet (ab) + a \bullet (f \bullet b)$. Таким образом, осталось показать, что $f^2 \bullet b = f(f \bullet b) + f \bullet (f \cdot b)$. В силу равенства (3) имеем

$$\langle f \otimes f, \Delta(ba) + \tau(\Delta(ba)) \rangle$$
$$= \Big\langle f \otimes f, \sum_a (a_{(1)} \otimes ba_{(2)} + ba_{(2)} \otimes a_{(1)}) + \sum_b (b_{(1)}a \otimes b_{(2)} + b_{(2)} \otimes b_{(1)}a) \Big\rangle.$$

Следовательно,

$$2\langle f \otimes f, \Delta(ba) \rangle = 2\Big\langle f \otimes f, \sum_a a_{(1)} \otimes ba_{(2)} + \sum_b b_{(1)}a \otimes b_{(2)} \Big\rangle.$$

Поэтому

$$Q(f^2 \bullet b, a) = Q(f(f \bullet b) + f \bullet (f \cdot b), a).$$

В силу невырожденности формы Q получаем $f^2 \bullet b = f(f \bullet b) + f \bullet (f \cdot b)$, и равенство (7) доказано.

Равенство (8) доказывается аналогично с использованием равенства (1), которое выполняется в алгебре A^*, альтернативности алгебры A и предложения 1.

Из леммы 2, замечания, сделанного после леммы 2, и леммы 3 следует

Теорема 1. *Пусть A — альтернативная алгебра над полем F характеристики $\neq 2$, на которой задано коумножение Δ. Тогда пара (A, Δ) является альтернативной биалгеброй по Дринфельду тогда и только тогда, когда пара (A, Δ) — альтернативная коалгебра и коумножение Δ удовлетворяет следующим равенствам:*

$$\Delta(ab) = \sum_a (a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + a_{(2)}b \otimes a_{(1)} - a_{(2)} \otimes ba_{(1)})$$
$$+ \sum_b (b_{(1)} \otimes ab_{(2)} + b_{(1)} \otimes b_{(2)}a - ab_{(1)} \otimes b_{(2)});$$

$$\sum_{ab} ((ab)_{(1)} \otimes (ab)_{(2)} + (ab)_{(2)} \otimes (ab)_{(1)})$$
$$= \sum_a (a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + a_{(2)} \otimes a_{(1)}b) + \sum_b (b_{(1)} \otimes ab_{(2)} + ab_{(2)} \otimes b_{(1)}).$$

Отметим, что теорема 1 — альтернативный аналог теоремы 1 из [3].

§ 2. Уравнение Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах

Напомним, что для алгебры Ли L пара (L,Δ) является биалгеброй Ли тогда и только тогда, когда (L,Δ) — коалгебра Ли и коумножение Δ является 1-коциклом (см. [1]), т. е. удовлетворяет равенству

$$\Delta([a,b]) = \sum_a([a_{(1)},b]\otimes a_{(2)} + a_{(1)}\otimes[a_{(2)},b]) + \sum_b([a,b_{(1)}]\otimes b_{(2)} + b_{(1)}\otimes[a,b_{(2)}]).$$

Среди биалгебр Ли особою роль играют треугольные и квазитреугольные биалгебры Ли. Пусть L — алгебра Ли над полем F и $R=\sum\limits_i a_i\otimes b_i$ из $(\mathrm{id}-\tau)(L\otimes L)$, т. е. $\tau(R)=-R$. Определим на алгебре L коумножение Δ_R, полагая для любого $a\in L$

$$\Delta_R(a) = \sum_i [a_i,a]\otimes b_i - a_i\otimes[a,b_i].$$

Тогда коумножение Δ_R антикокоммутативно и является 1-коциклом. В [10] показано, что пара (L,Δ_R) — коалгебра Ли тогда и только тогда, когда элемент

$$C_L(R) = [R_{12},R_{13}] + [R_{12},R_{23}] + [R_{13},R_{23}]$$

ad-инвариантен(L-инвариантен), где $[R_{12},R_{13}]=\sum\limits_{ij}[a_i,a_j]\otimes b_i\otimes b_j$, $[R_{12},R_{23}] = \sum\limits_{ij} a_i\otimes[b_i,a_j]\otimes b_j$ и $[R_{13},R_{23}] = \sum\limits_{ij} a_i\otimes a_j\otimes[b_i,b_j]$. В частности, если

$$[R_{12},R_{13}] + [R_{12},R_{23}] + [R_{13},R_{23}] = 0, \tag{9}$$

то пара (L,Δ_R) — коалгебра Ли. Уравнение (9) называется *классическим уравнением Янга — Бакстера* или *уравнением треугольников*. Уравнения Янга — Бакстера для ассоциативных и йордановых алгебр изучалось в работах [3, 5, 7].

В классе альтернативных биалгебр также можно выделить биалгебры, связанные с альтернативным аналогом уравнения (9).

Определение. Пусть A — альтернативная алгебра и $r=\sum\limits_i a_i\otimes b_i\in A\otimes A$. Пара (A,r) называется *кограничной альтернативной Д-биалгеброй*, если пара (A,Δ_r), где

$$\Delta_r(a) = \sum_i a_i a\otimes b_i - \sum_i a_i\otimes ab_i,$$

является альтернативной Д-биалгеброй.

Зафиксируем элемент $r=\sum\limits_i a_i\otimes b_i$ из $(\mathrm{id}-\tau)(A\otimes A)$, т. е. $\tau\big(\sum\limits_i a_i\otimes b_i\big) = -\sum\limits_i a_i\otimes b_i$, и определим на алгебре A коумножение Δ_r, полагая

$$\Delta_r(a) = \sum_i a_i a\otimes b_i - \sum_i a_i\otimes ab_i. \tag{10}$$

Пусть теперь $r_{12}=\sum\limits_i a_i\otimes b_i\otimes 1$, $r_{23}=\sum\limits_i 1\otimes a_i\otimes b_i$, $r_{13}=\sum\limits_i a_i\otimes 1\otimes b_i$. По аналогии с [3] положим

$$C_A(r) = (\mathrm{id}+\xi+\xi^2)(r_{23}r_{12}),$$

где $\xi : A\otimes A\otimes A\mapsto A\otimes A\otimes A$ — линейное отображение, удовлетворяющее равенству $\xi(x\otimes y\otimes z) = y\otimes z\otimes x$.

Поскольку $r_{23}r_{12} = \big(\sum\limits_i 1 \otimes a_i \otimes b_i\big)\big(\sum\limits_i a_i \otimes b_i \otimes 1\big) = \sum\limits_{ij} a_j \otimes a_ib_j \otimes b_i$, имеем

$$C_A(r) = \sum_{ij} a_j \otimes a_ib_j \otimes b_i + \sum_{ij} a_ib_j \otimes b_i \otimes a_j + \sum_{ij} b_i \otimes a_j \otimes a_ib_j.$$

Во второй (соответственно в третьей) сумме, меняя местами элементы a_j и b_j (соответственно a_i и b_i) и учитывая, что $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$, получаем

$$C_A(r) = \sum_{ij} a_j \otimes a_ib_j \otimes b_i - \sum_{ij} a_ia_j \otimes b_i \otimes b_j - \sum_{ij} a_i \otimes a_j \otimes b_ib_j.$$

Так как $r_{12}r_{13} = \sum\limits_{ij} a_ia_j \otimes b_i \otimes b_j$, $r_{13}r_{23} = \sum\limits_{ij} a_i \otimes a_j \otimes b_ib_j$, то

$$C_A(r) = r_{23}r_{12} - r_{12}r_{13} - r_{13}r_{23}.$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим

$$C_A(r) = -\sum_{ij} a_ia_j \otimes b_i \otimes b_j + b_j \otimes a_ia_j \otimes b_i + b_i \otimes b_j \otimes a_ia_j.$$

Ниже будет показано, что если $C_A(r) = 0$, то пара (A, Δ_r) — альтернативная Д-биалгебра.

Предложение 2. *Для коумножения Δ_r выполняются равенства* (2)–(4).

Доказательство. Докажем, что Δ_r удовлетворяет равенству (2). Это эквивалентно тому, что

$$\sum_i a_i(ab) \otimes b_i - a_i \otimes (ab)b_i = \sum_i (a_ia)b \otimes b_i - a_ib \otimes ab_i + b_ib \otimes a_ia - (ab_i)b \otimes a_i$$
$$-b_i \otimes b(a_ia) + ab_i \otimes ba_i + a_ib \otimes ab_i - a_i \otimes a(bb_i) + a_ib \otimes b_ia - a_i \otimes (bb_i)a - a(a_ib) \otimes b_i + aa_i \otimes bb_i.$$

Поскольку $\sum\limits_i b_ib \otimes a_ia + \sum\limits_i a_ib \otimes b_ia = 0$ и $\sum\limits_i aa_i \otimes bb_i + \sum\limits_i ab_i \otimes ba_i = 0$, достаточно показать, что

$$\sum_i a_i(ab) \otimes b_i - a_i \otimes (ab)b_i = \sum_i -(ab_i)b \otimes a_i + (a_ia)b \otimes b_i$$
$$- b_i \otimes b(a_ia) - a_i \otimes (bb_i)a - a_i \otimes a(bb_i) - a(a_ib) \otimes b_i.$$

Так так

$$-\sum_i b_i \otimes b(a_ia) = \sum_i a_i \otimes b(b_ia),$$

используя равенство (1), получаем

$$-\sum_i b_i \otimes b(a_ia) - \sum_i a_i \otimes (bb_i)a - \sum_i a_i \otimes a(bb_i) = -\sum_i a_i \otimes (ab)b_i.$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\sum_i (a_ia)b \otimes b_i - \sum_i (ab_i)b \otimes a_i - \sum_i a(a_ib) \otimes b_i = \sum_i a_i(ab) \otimes b_i.$$

Тем самым доказано, что Δ_r удовлетворяет равенству (2).

Докажем, что Δ_r удовлетворяет равенству (3). Требуется доказать, что

$$\sum_i a_i(ba)\otimes b_i - a_i\otimes(ba)b_i + b_i\otimes a_i(ba) - (ba)b_i\otimes a_i = \sum_i a_ia\otimes b_ib - a_i\otimes b(ab_i)$$
$$+ bb_i\otimes a_ia - b(ab_i)\otimes a_i + (a_ib)a\otimes b_i - a_ia\otimes b_ib + b_i\otimes(a_ib)a - bb_i\otimes a_ia.$$

Приведя подобные члены и перенеся слагаемые в одну часть, заключаем, что данное равенство эквивалентно такому:

$$\sum_i (a_i,b,a)\otimes b_i + \sum_i a_i\otimes(b,a,b_i) + \sum_i b_i\otimes(a_i,b,a) + \sum_i (b,a,b_i)\otimes a_i = 0.$$

Используя равенство $\sum\limits_i a_i\otimes b_i = -\sum\limits_i b_i\otimes a_i$, получаем

$$\sum_i (a_i,b,a)\otimes b_i = -\sum_i (b_i,b,a)\otimes a_i.$$

В силу альтернативности алгебры A

$$\sum_i (b_i,b,a)\otimes a_i = \sum_i (b,a,b_i)\otimes a_i.$$

Следовательно,

$$\sum_i (a_i,b,a)\otimes b_i + \sum_i (b,a,b_i)\otimes a_i = 0.$$

Аналогично

$$\sum_i a_i\otimes(b,a,b_i) + \sum b_i\otimes(a_i,b,a) = 0.$$

Тем самым показано, что коумножение Δ_r удовлетворяет равенству (3).

Докажем, что Δ_r удовлетворяет равенству (4). Требуется доказать, что

$$\sum_i a_ia^2\otimes b_i - a_i\otimes a^2b_i = \sum_i (a_ia)a\otimes b_i - a_ia\otimes ab_i + \sum_i a_ia\otimes ab_i - a_i\otimes a(ab_i).$$

Это следует из альтернативности алгебры A.

Лемма 4. *Пусть A — альтернативная алгебра над полем F характеристики, не равной 2, и $C_A(r)=0$. Тогда пара (A,Δ_r) — альтернативная коалгебра.*

Доказательство. Пусть $f,g\in A^*$ — произвольные элементы. Докажем, что $(f,f,g)=0$. Для произвольного $a\in A$ имеем

$$\langle (f,f,g),a\rangle = \sum_{ij}\langle f,a_j(a_ia)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,b_i\rangle$$
$$-\langle f,a_j\rangle\langle f,(a_ia)b_j\rangle\langle g,b_i\rangle - \langle f,a_ja_i\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,ab_i\rangle + \langle f,a_j\rangle\langle f,a_ib_j\rangle\langle g,ab_i\rangle$$
$$-\Big(\sum_{ij}\langle f,a_ia\rangle\langle f,a_jb_i\rangle\langle g,b_j\rangle - \langle f,a_ia\rangle\langle f,a_j\rangle\langle g,b_ib_j\rangle - \langle f,a_i\rangle\langle f,a_j(ab_i)\rangle\langle g,b_j\rangle$$
$$+\langle f,a_i\rangle\langle f,a_j\rangle\langle g,(ab_i)b_j\rangle\Big).$$

В силу равенства (1), учитывая, что $\sum\limits_i a_i\otimes b_i = -\sum\limits_i b_i\otimes a_i$, получаем

$$\sum_{ij}\langle f,a_j(a_ia)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,b_i\rangle - \sum_{ij}\langle f,a_j\rangle\langle f,(a_ia)b_j\rangle\langle g,b_i\rangle$$
$$= \sum_{ij}\langle f,(a_ja_i)a\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,b_i\rangle + \sum_{ij}\langle f,a_i(aa_j)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,b_i\rangle.$$

Поменяем в сумме $\sum\limits_{ij} a_i \otimes a_j(ab_i) \otimes b_j$ элементы a_i и b_i местами. Используя равенство $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$, получим

$$-\sum_{ij}\langle f, a_i\rangle\langle f, a_j(ab_i)\rangle\langle g, b_j\rangle = \sum_{ij}\langle f \otimes f \otimes g, b_i \otimes a_j(aa_i) \otimes b_j\rangle.$$

В последней сумме поменяем индексы суммирования. Будем иметь

$$-\sum_{ij}\langle f, a_i\rangle\langle f, a_j(ab_i)\rangle\langle g, b_j\rangle = \sum_{ij}\langle f, b_j\rangle\langle f, a_i(aa_j)\rangle\langle g, b_i\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle (f,f,g), a\rangle = \sum_{ij}&\langle f, (a_ja_i)a\rangle\langle f, b_j\rangle\langle g, b_i\rangle - \langle f, a_ja_i\rangle\langle f, b_j\rangle\langle g, ab_i\rangle\\ &+ \langle f, a_j\rangle\langle f, a_ib_j\rangle\langle g, ab_i\rangle - \langle f, a_ia\rangle\langle f, a_jb_i\rangle\langle g, b_j\rangle + \langle f, a_ia\rangle\langle f, a_j\rangle\langle g, b_ib_j\rangle\\ &- \langle f, a_i\rangle\langle f, a_j\rangle\langle g, (ab_i)b_j\rangle.\end{aligned}$$

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{ij}\langle f, (a_ja_i)a\rangle\langle f, b_j\rangle\langle g, b_i\rangle - \sum_{ij}\langle f, a_ia\rangle\langle f, a_jb_i\rangle\langle g, b_j\rangle + \sum_{ij}\langle f, a_ia\rangle\langle f, a_j\rangle\langle g, b_ib_j\rangle.$$

Во втором слагаемом этой суммы поменяем местами элементы a_i и b_i, в третьем — элементы a_i и b_i, a_j и b_j. Учитывая, что $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$, получим

$$S = \sum_{ij}\langle f \otimes f \otimes g, (a_ja_i)a \otimes b_j \otimes b_i + b_ia \otimes a_ja_i \otimes b_j + b_ia \otimes b_j \otimes a_ia_j\rangle.$$

В третьем слагаемом последней суммы, поменяв индексы суммирования, будем иметь

$$S = -\langle f \otimes f \otimes g, C_A(r)(a \otimes 1 \otimes 1)\rangle.$$

Поскольку $C_A(r) = 0$, то $S = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle (f,f,g), a\rangle = \sum_{ij} -&\langle f, a_ja_i\rangle\langle f, b_j\rangle\langle g, ab_i\rangle + \langle f, a_j\rangle\langle f, a_ib_j\rangle\langle g, ab_i\rangle\\ &- \langle f, a_i\rangle\langle f, a_j\rangle\langle g, (ab_i)b_j\rangle.\end{aligned}$$

Пусть

$$S = \sum_{ij} -\langle f, a_ja_i\rangle\langle f, b_j\rangle\langle g, ab_i\rangle + \langle f, a_j\rangle\langle f, a_ib_j\rangle\langle g, ab_i\rangle.$$

Во втором слагаемом этой суммы поменяем местами элементы a_j и b_j, а затем индексы суммирования. Тогда, учитывая, что $C_A(r) = 0$, получим

$$S = \sum_{ij}\langle f \otimes f \otimes g, b_j \otimes b_i \otimes a(a_ja_i)\rangle.$$

Следовательно,

$$\langle (f,f,g), a\rangle = \sum_{ij}\langle f, b_j\rangle\langle f, b_i\rangle\langle g, a(a_ja_i)\rangle - \sum_{ij}\langle f, a_i\rangle\langle f, a_j\rangle\langle g, (ab_i)b_j\rangle.$$

Во второй сумме, стоящей в правой части равенства, поменяем местами элементы a_i и b_i, а затем a_j и b_j. Так как $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$, то

$$\langle (f,f,g),a\rangle = \sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes a(a_ja_i)\rangle - \sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (aa_i)a_j\rangle.$$

Поменяв индексы суммирования во второй сумме, получим

$$\langle (f,f,g),a\rangle = \sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes a(a_ja_i) - b_j\otimes b_i\otimes (aa_j)a_i\rangle$$
$$= -\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes (a,a_j,a_i)\rangle.$$

Покажем, что $\sum\limits_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes (a,a_j,a_i)\rangle = 0$. Поменяем в этой сумме местами индексы суммирования:

$$\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes (a,a_j,a_i)\rangle = \sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (a,a_i,a_j)\rangle.$$

Тогда в силу линеаризованного тождества правой альтернативности имеем

$$\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (a,a_i,a_j)\rangle = -\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (a,a_j,a_i)\rangle.$$

Поэтому

$$\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes (a,a_j,a_i)\rangle = -\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (a,a_j,a_i)\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$2\sum_{ij}\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle\langle g,(a,a_j,a_i)\rangle = 0 \tag{11}$$

и

$$\langle (f,f,g),a\rangle = 0.$$

Тем самым $(f,f,g)=0$ для любых $f,g\in A^*$.

Докажем, что $(g,f,f)=0$. Для произвольного $a\in A$ имеем

$$\begin{aligned}\langle (g,f,f),a\rangle = \sum_{ij}&\langle g,a_j(a_ia)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle\\ &-\langle g,a_j\rangle\langle f,(a_ia)b_j\rangle\langle f,b_i\rangle - \langle g,a_ja_i\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,ab_i\rangle + \langle g,a_j\rangle\langle f,a_ib_j\rangle\langle f,ab_i\rangle\\ -\Big(\sum_{ij}&\langle g,a_ia\rangle\langle f,a_jb_i\rangle\langle f,b_j\rangle - \langle g,a_ia\rangle\langle f,a_j\rangle\langle f,b_ib_j\rangle - \langle g,a_i\rangle\langle f,a_j(ab_i)\rangle\langle f,b_j\rangle\\ &+\langle g,a_i\rangle\langle f,a_j\rangle\langle f,(ab_i)b_j\rangle\Big).\end{aligned}$$

Из (11) и альтернативности алгебры A следует, что

$$\sum_{ij}\langle g,(a_j,a_i,a)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{ij}\langle g,a_j(a_ia)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle = \sum_{ij}\langle g,(a_ja_i)a\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle.$$

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{ij} \langle g, (a_j a_i)a\rangle\langle f, b_j\rangle\langle f, b_i\rangle - \langle g, a_i a\rangle\langle f, a_j b_i\rangle\langle f, b_j\rangle + \langle g, a_i a\rangle\langle f, a_j\rangle\langle f, b_i b_j\rangle.$$

Во втором слагаемом этой суммы поменяем элементы a_i и b_i местами, в третьем слагаемом поменяем местами элементы a_i и b_i, a_j и b_j, а также индексы суммирования. Учитывая, что $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$, получаем

$$S = -\langle g \otimes f \otimes f, C_A(r)(a \otimes 1 \otimes 1)\rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle (g, f, f), a\rangle = \sum_{ij} -\langle g, a_j\rangle\langle f, (a_i a)b_j\rangle\langle f, b_i\rangle - \langle g, a_j a_i\rangle\langle f, b_j\rangle\langle f, ab_i\rangle \\ + \langle g, a_j\rangle\langle f, a_i b_j\rangle\langle f, ab_i\rangle + \langle g, a_i\rangle\langle f, a_j(ab_i)\rangle\langle f, b_j\rangle - \langle g, a_i\rangle\langle f, a_j\rangle\langle f, (ab_i)b_j\rangle.\end{aligned}$$

Пусть

$$S = \sum_{ij} -\langle g, a_j\rangle\langle f, (a_i a)b_j\rangle\langle f, b_i\rangle + \langle g, a_i\rangle\langle f, a_j(ab_i)\rangle\langle f, b_j\rangle - \langle g, a_i\rangle\langle f, a_j\rangle\langle f, (ab_i)b_j\rangle.$$

Поменяв в первом слагаемом индексы суммирования, а в третьем — элементы a_j и b_j, получаем

$$S = \sum_{ij} \langle g, a_i\rangle\langle f, -(a_j a)b_i + a_j(ab_i) + (ab_i)a_j\rangle\langle f, b_j\rangle.$$

Используя равенство (1), будем иметь

$$S = \sum_{ij} \langle g, a_i\rangle\langle f, a(b_i a_j)\rangle\langle f, b_j\rangle.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\langle (g, f, f), a\rangle = \sum_{ij} \langle g, a_i\rangle\langle f, a(b_i a_j)\rangle\langle f, b_j\rangle \\ - \langle g, a_j a_i\rangle\langle f, b_j\rangle\langle f, ab_i\rangle + \langle g, a_j\rangle\langle f, a_i b_j\rangle\langle f, ab_i\rangle.\end{aligned}$$

В первом слагаемом правой части поменяем местами элементы a_i и b_i, во втором поменяем индексы суммирования, а в третьем поменяем местами элементы a_j и b_j. Учитывая, что $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$, получим

$$\langle (g, f, f), a\rangle = \langle g \otimes f \otimes f, (1 \otimes 1 \otimes a)C_A(r)\rangle = 0.$$

Отсюда следует, что алгебра A^* альтернативна и, следовательно, коалгебра (A, Δ_r) альтернативна.

В силу теоремы 1 из предложения 2 и леммы 4 следует

Теорема 2. *Пусть A — альтернативная алгебра над полем F характеристики $\neq 2$, $r = \sum\limits_i a_i \otimes b_i$ и $\tau(r) = -r$. Предположим, что $C_A(r) = 0$. Тогда пара (A, Δ_r), где*

$$\Delta_r(a) = \sum_i a_i a \otimes b_i - a_i \otimes ab_i,$$

является альтернативной Д-биалгеброй.

§ 3. Структура альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона

Пусть F_2 — алгебра 2×2-матриц над алгебраически замкнутым полем F. Через e_{ij} обозначим матричные единицы алгебры F_2.

Пусть $\mathscr{C} = F_2 \oplus vF_2$ — матричная алгебра Кэли — Диксона. Напомним, что умножение в F_2 продолжается до умножения в алгебре $\mathscr{C}$ с помощью следующих соотношений:

$$a(vb) = v\bar{a}b, \quad (vb)a = v(ab), \quad (va)(vb) = b\bar{a},$$

где $a, b \in \mathscr{F}_2$, а черта над буквой означает стандартную инволюцию алгебры F_2.

В этом параграфе мы опишем все структуры альтернативных Д-биалгебр, заданные на алгебре Кэли — Диксона $\mathscr{C}$. В дальнейшем будем считать, что характеристика поля F не равна 2.

Определение. Пусть A — произвольная F-алгебра и ω — билинейная кососимметрическая форма на A. Тогда ω называется *замкнутой формой*, если для любых элементов a, b, c из A выполняется равенство

$$\omega(ab, c) + \omega(bc, a) + \omega(ca, b) = 0. \tag{12}$$

В этом случае форму ω будем называть *симплектической*.

Заметим, что если A является квадратичной алгеброй с единицей, то данное определение замкнутости формы эквивалентно следующим двум условиям:

$$\omega([a, b], c) + \omega([b, c], a) + \omega([c, a], b) = 0, \quad \omega(1, a) = 0$$

для любых $a, b, c \in A$.

Приведем примеры симплектических алгебр, которые являются подалгебрами в $\mathscr{C}$.

Пример 1. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $A(2, 1, 0)$ с базисом e_{11}, e_{12}.

Пример 2. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $A(2, 0, 1)$ с базисом e_{11}, e_{21}.

Пример 3. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $N(2)$ с базисом e_{12}, ve_{11}.

Симплектической формой в этих примерах является любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма.

Пример 4. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $A(4, 1, 2)$ с базисом e_{11}, e_{12}, ve_{11}, ve_{12}. Симплектической формой на алгебре $A(4, 1, 2)$ является любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая равенству $\omega(e_{11}, e_{12}) = -\omega(ve_{11}, ve_{12})$.

Пример 5. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $A(4, 2, 1)$ с базисом e_{11}, ve_{21}, ve_{22}, e_{21}. Симплектической формой на алгебре $A(4, 2, 1)$ является любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая равенству $\omega(e_{11}, e_{21}) = \omega(ve_{21}, ve_{22})$.

Аналогично теореме 2 и лемме 6 из [7] доказываются

Утверждение 1. *Пусть $\mathscr{C}$ — матричная алгебра Кэли — Диксона над F. Предположим, что на $\mathscr{C}$ задана структура альтернативной Д-биалгебры с коумножением Δ. Пусть N — ниль-радикал алгебры $D(\mathscr{C})$. Тогда $N \neq 0$, $N^2 = 0$ и $D(\mathscr{C}) = \mathscr{C} + N$.*

Утверждение 2. *Пусть $\mathscr{C}$ — матричная алгебра Кэли — Диксона над F. Предположим, что на $\mathscr{C}$ задана структура альтернативной Д-биалгебры с коумножением Δ. Тогда существует такой элемент r из $(\mathrm{id}-\tau)(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C})$, что $C_{\mathscr{C}}(r)=0$ и $\Delta=\Delta_r$.*

Таким образом, поставленная нами задача свелась к нахождению всех элементов $r=\sum\limits_i a_i\otimes b_i\in(\mathrm{id}-\tau)(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C})$, которые удовлетворяют уравнению $C_{\mathscr{C}}(r)=0$. Как показано в [11], такие элементы находятся во взаимно однозначном соответствии с подалгебрами, на которых можно задать симплектическую невырожденную форму. Пусть $\phi_r:\mathscr{C}^*\mapsto\mathscr{C}$ задано равенством $\phi_r(f)=\sum\limits_i\langle f,a_i\rangle b_i$. Тогда (см. [11]) отображение ϕ_r является гомоморфизмом алгебр. Обозначим через A образ пространства $\mathscr{C}^*$ при отображении ϕ_r. Можно считать, что элементы a_i (соответственно b_i), входящие в запись элемента r, являются базисом пространства A. Пусть $\dim A=n$. Выразив каждый элемент b_i через $a_1,\dots,a_n$, получим, что $r=\sum\limits_{ij}\alpha_{ij}(a_i\otimes a_j)$, где $\alpha_{ij}\in F$. Пусть матрица (β_{ij}) — обратная матрица к матрице (α_{ij}).

Пусть $a_1^*,\dots,a_n^*$ — дуальный базис к базису $a_1,\dots,a_n$. Определим на пространстве A форму ω_r, полагая

$$\omega_r(a,b)=\sum_{ij}\beta_{ij}\langle a_i^*\otimes a_j^*,a\otimes b\rangle.$$

Тогда (см. [11]) ω_r — невырожденная симплектическая форма на алгебре A.

Если A — подалгебра в $\mathscr{C}$ и ω — невырожденная симплектическая форма на алгебре A, то $\omega=\omega_r$ для некоторого элемента $r\in(\mathrm{id}-\tau)(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C})$, удовлетворяющего уравнению $C_{\mathscr{C}}(r)=0$.

В дальнейшем нам понадобится следующая техническая

Лемма 5. Пусть A — нильпотентная подалгебра матричной алгебры Кэли — Диксона $\mathscr{C}$ над алгебраически замкнутым полем F. Тогда размерность алгебры A не превосходит трех.

Доказательство. Для начала заметим, что если H — некоторое подпространство необратимых матриц из F_2, то размерность H не превосходит 2.

Алгебра Кэли — Диксона (см. [12]) является композиционной алгеброй, и каждый элемент в ней удовлетворяет квадратному уравнению $x^2-t(a)x+n(a)=0$, где $t(a)=a+\bar a\in F$ — след элемента a, $n(a)=a\bar a\in F$ — норма элемента a.

Для любого элемента $a\in A$ имеем $t(a)=0$, $n(a)=0$ и $a^2=0$. Поэтому $ab+ba=0$ для любых $a,b\in A$.

Пусть $a\in A$, $a\neq 0$. Тогда по [13, лемма 2] можно считать, что $a\in F_2$. Существует невырожденная матрица $T\in F_2$ такая, что $TaT^{-1}=e_{12}$. Отображение

$$\varphi: x+\upsilon y\to TxT^{-1}+\upsilon(TyT^{-1}),\quad x,y\in F_2,$$

является автоморфизмом алгебры $\mathscr{C}$, и, следовательно, размерность $\varphi(A)$ равна размерности A. В связи с этим мы будем предполагать, что $a=e_{12}$.

Пусть теперь $b\in A$ произвольный и

$$b=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}+\upsilon\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\ \gamma_1&\delta_1\end{pmatrix}.$$

Из условия $e_{12}b+be_{12}=0$ следует, что $\gamma=0$, $\alpha+\delta=0$. Поэтому

$$b=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ 0&-\alpha\end{pmatrix}+\upsilon\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\ \gamma_1&\delta_1\end{pmatrix}.$$

Из условия $b^2 = 0$ вытекает, что

$$\alpha^2 + \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = 0. \tag{13}$$

Тогда можно считать, что $\alpha \neq 0$ для некоторого b. Поэтому в алгебре A содержится линейно независимый с a элемент

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Из равенства (13) получаем, что $\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 \neq 0$. Тогда $(\gamma_1, \delta_1) \neq (0,0)$. Поскольку $be_{12} = e_{12} + \upsilon(\gamma_1 e_{11} + \delta_1 e_{12})$, то

$$c = be_{12} - e_{12} = \upsilon(\gamma_1 e_{11} + \delta_1 e_{12}) \in A.$$

Так как $(\gamma_1, \delta_1) \neq (0,0)$, то элемент $c \neq 0$ и элементы e_{12}, b, c являются линейно независимыми.

Пусть $d \in A$ линейно независим с a, b, c. Тогда

$$d = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\lambda^2 + \alpha_2\delta_2 - \beta_2\gamma_2 = 0. \tag{15}$$

Так как $c + d \in A$, то $(c+d)^2 = 0$. Отсюда, используя равенство (15), находим, что

$$\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2 = 0. \tag{16}$$

Как отмечено выше, по крайней мере один из элементов γ_1, δ_1 не равен нулю. Пусть для определенности $\gamma_1 \neq 0$ (случай $\delta_1 \neq 0$ рассматривается аналогично). Тогда из (16) следует, что

$$d_1 = \gamma_2 b - \gamma_1(d - \beta a) = \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ 0 & -\chi \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} \gamma_2\alpha_1 - \gamma_1\alpha_2 & \gamma_2\beta_1 - \gamma_1\beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\chi = \gamma_2 - \gamma_1\lambda$. В силу (13) получаем, что $\chi = 0$ и $d_1 = \upsilon(\alpha_3 e_{11} + \beta_3 e_{12})$.

Поскольку $b + d_1 \in A$, ввиду (13) $\alpha_3\delta_1 - \beta_3\gamma_1 = 0$. Поэтому $\alpha_3 c - \gamma_1 d_1 = 0$. Тогда получаем, что элементы a, b, c, d являются линейно зависимыми; противоречие. Лемма доказана.

Пусть теперь U — подалгебра алгебры $\mathscr{C}$, на которой можно задать невырожденную симплектическую форму ω. Так как форма ω является кососимметрической и невырожденной, то размерность искомых подалгебр должна быть четной. Кроме того, U не содержит единицы, ибо в противном случае

$$\omega(1, x) = \omega(1^2, x) = -\omega(1 \cdot x, 1) - \omega(x \cdot 1, 1) = -\omega(x, 1) - \omega(x, 1)$$

для любого $x \in U$. В силу кососимметричности формы ω получаем, что $\omega(1, x) = 0$ для любого $x \in U$, т. е. форма ω не является невырожденной. Из этого, в частности, следует, что U не может быть полупростой алгеброй.

Если U имеет размерность 6, то по лемме 5 алгебра U содержит не менее двух ортогональных идемпотентов. Тогда алгебра $\mathscr{C}$ содержит не менее трех ортогональных идемпотентов, сумма которых равна единице, чего не может быть в силу леммы 3.15 из [14]. Следовательно, U — алгебра размерности 2 или 4.

Лемма 6. *Пусть U — подалгебра в $\mathscr{C}$ размерности 2 с невырожденной симплектической формой ω. Тогда U изоморфна одной из алгебр $A(2,1,0)$, $A(2,0,1)$ или $N(2)$.*

Доказательство. Поскольку алгебра U не является полупростой, то ее радикал N отличен от нуля.

Пусть размерность N равна единице. Тогда $U = eF \oplus nF$, где e — идемпотент алгебры $\mathscr{C}$, $n^2 = 0$ и $\omega(n,e) \neq 0$. Ясно, что N совпадает с одной из своих пирсовских компонент N_{ij} относительно идемпотента e. По условию леммы $N_{11} = 0$. Если $en = 0$, $ne = 0$, то $\omega(n,e) = 0$. Поэтому либо $en = n$, $ne = 0$, либо $en = 0$, $ne = n$. В первом случае алгебра U изоморфна алгебре $A(2,1,0)$, во втором — $A(2,0,1)$.

Пусть размерность N равна двум. Пусть n,k — базис N. Тогда $nk = \alpha n + \beta k$, где $\alpha,\beta \in F$. Поскольку $n^2 = k^2 = 0$, то $nnk = \beta nk = 0$ и $nkk = \alpha nk = 0$. Следовательно, $nk = -kn = 0$. В этом случае алгебра U изоморфна алгебре $N(2)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть U — подалгебра в $\mathscr{C}$ размерности 4 с невырожденной симплектической формой ω. Тогда алгебра U изоморфна либо $A(4,1,2)$, либо $A(4,2,1)$.*

Доказательство. Пусть N — радикал алгебры U. Тогда, как отмечалось, радикал N не равен нулю. Если размерность радикала меньше чем три, то U содержит два ортогональных идемпотента и, как следствие, единицу алгебры $\mathscr{C}$.

Поэтому в силу леммы 5 размерность радикала N равна трем. Тогда $U = eF \oplus N$, где e — идемпотент алгебры $\mathscr{C}$, $e \neq 1$. Можно считать, что $e = e_{11}$.

Рассмотрим пирсовское разложение радикала N относительно идемпотента e. Поскольку $N_{ii} \subseteq \mathscr{C}_{ii}$, то $N_{11} = N_{00} = 0$. Если, например, $N = N_{10}$, то по свойствам пирсовского разложения $N^2 = 0$. Поэтому для любых $m,n \in N$ имеем

$$\omega(m,n) = \omega(em,n) = -\omega(mn,e) - \omega(ne,m) = 0,$$

что противоречит невырожденности формы ω.

Допустим, что размерность пространства N_{10} равна единице. В этом случае размерность N_{01} равна двум. Элементы из N_{01} имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два линейно независимых элемента $n,k \in N_{01}$. Можно считать, что

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = v \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $l \in N_{10}$. Тогда

$$l = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что k,n,l образуют базис N. Так как $(l+n)^2 = (l+k)^2 = 0$, то

$$\beta\gamma + \alpha_1\delta_1 - \gamma_1\beta_1 = 0, \tag{17}$$

$$\alpha_2\delta_1 - \beta_2\gamma_1 = 0. \tag{18}$$

Рассмотрим

$$nk = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma\alpha_2 & -\gamma\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Допустим, что $nk = 0$ и $\varsigma \in \{\alpha_2, \beta_2\}$, $\varsigma \neq 0$. Тогда $\varsigma n - \nu k = 0$, где $\nu = \alpha_1$ (соответственно β_1), если $\varsigma = \alpha_2$ (соответственно β_2). Противоречие с линейной независимостью n и k. Таким образом, $nk \neq 0$, и из свойств пирсовского разложения следует, что $nk = \lambda l$, где $\lambda \in F$.

Пусть $m = \lambda l$. Тогда $nk = -kn = m$. Элементы e, m, n, k образуют базис алгебры U. Из свойств пирсовского разложения вытекает, что $nm = mn = km = mk = 0$. Отсюда получаем, что алгебра U изоморфна $A(4, 1, 2)$.

В случае, когда размерность N_{10} равна двум, U изоморфна алгебре $A(4, 2, 1)$. Лемма доказана.

Пользуясь случаем, хочу выразить благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению текста работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дринфельд В. Г.* Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 2. С. 285–287.
2. *Желябин В. Н.* Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 3–25.
3. *Желябин В. Н.* Йордановы биалгебры симметрических элементов и биалгебры Ли // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 299–308.
4. *Joni S. A., Rota G. C.* Coalgebras and bialgebras in combinatorics // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61, N 2. P. 93–139.
5. *Aguiar M.* On the associative analog of Lie bialgebras // J. of Algebra. 2001. V. 244, N 2. P. 492–532.
6. *Polishchuk A.* Classic Yang–Baxter equation and the A_∞-constraint // Adv. Math. 2002. V. 168, N 1. P. 56–96.
7. *Желябин В. Н.* Об одном классе йордановых Д-биалгебр // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 64–94.
8. *Mudrov A. I.* Associative triples and the Yang–Baxter equation // Israel J. Math. 2004. V. 139. P. 11–28.
9. *Anquela J. A., Cortes T. Montaner F.* Nonassociative coalgebras // Comm. Algebra. 1994. V. 22, N 12. P. 4693–4716.
10. *Drinfeld V. G.* Quantum groups // Proc. Intern. congr. math. Berkeley, 1986. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1987. P. 798–820.
11. *Желябин В. Н.* Jordan D-bialgebras and sympectic forms on Jordan algebras // Siberian Advances in Mathematics. 2000. V. 10, N 2. P. 134–142.
12. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
13. *Jacobson N.* Structure and representations of Jordan algebras. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 39).
14. *Schafer R. D.* An introduction to nonassociative algebras. New York: Acad. Press, 1966.

Статья поступила 27 апреля 2006 г.

Гончаров Максим Евгеньевич
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`max1984@ngs.ru`