Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.957

ОТСУТСТВИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ДИНАМИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДРОБНОГО ТИПА

М. Киране, Н. Татар

Аннотация: Рассмотрено уравнение Лапласа в $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+ \times (0, +\infty)$ с динамическим нелинейным краевым условием порядка между 1 и 2. Краевое условие представляет собой дифференциальное неравенство дробного порядка, включающее производные нецелого порядка и нелинейный источник. Установлены результаты об отсутствии решения и необходимые условия существования локального и глобального решений. В частности, доказано, что критический показатель зависит только от дробных производных наименьшего порядка.

Ключевые слова: критический показатель, динамическое краевое условие, дробная производная, уравнение Лапласа.

1. Введение

В [1] рассмотрено уравнение Пуассона с динамическими краевыми условиями второго порядка:

$$\Delta u(x', x_d, t) = 0, \quad t > 0, \ x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, +\infty),$$

$$B(x', 0, t)u_{tt} + A(x', 0, t)u_t - u_{x_d} \geq D(x', 0, t)|u|^q, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1}, \ t > 0,$$

$$u(x', 0, 0) = u_0(x', 0), \quad u_t(x', 0, 0) = u_1(x', 0), \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1},$$

где $d > 1$, $q > 1$ и A, B, D — заданные функции. При некоторых условиях на эти функции и на d и q в [1] доказано отсутствие решений и определен критический показатель, который разделяет глобальное существование и разрушение решения.

В частности, если $B \equiv 0$, $A = D \equiv 1$, то критический показатель, найденный в [1], равен критическому показателю в смысле Фуджиты, а именно $q_c = 1 + \frac{1}{d-1}$.

Аналогичные задачи изучались, например, в [1–3]. Эллиптические и параболические уравнения и системы с динамическими краевыми условиями естественно возникают в математических моделях переноса тепла в твердом теле при контакте с движущейся жидкостью и явлений диффузии, задачах динамики текучих сред, диффузии в пористых средах, моделях полупроводников и химической инженерии. В этой работе мы рассмотрим уравнение Пуассона с динамическими краевыми условиями, содержащими дробные производные по времени порядка между 1 и 2, а также между 0 и 1. Последний член можно рассматривать как дробную диссипацию. А именно, мы рассматриваем задачу

$$\begin{gathered}\Delta u(x', x_d, t) = 0, \quad x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, +\infty),\ t > 0,\\ \mathbf{D}^{1+\alpha} u(x', 0, t) + \mathbf{D}^{\beta} u(x', 0, t) - u_{x_d} \geq |u|^p, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1},\ t > 0,\\ u(x', 0, 0) = u_0(x') \geq 0, \quad u_t(x', 0, 0) = u_1(x') \geq 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1},\end{gathered} \tag{1}$$

где $p > 1$, $d > 1$, $\alpha, \beta \in (0, 1)$ и функции u_0, u_1 заданы. Мы докажем теоремы типа Фуджиты для задачи (1). Мы явно определим ряд значений p, для которых наблюдается отсутствие решений. Если есть локальное существование решения, то наши теоремы можно рассматривать как результат о разрушении решения за конечное время. Мы не обращаемся к вопросу о локальном существовании решения. Для этого можно было бы скомбинировать рассуждения о локальном существовании для уравнений Лапласа с динамическими краевыми условиями и рассуждения из [4] для преодоления трудностей, вносимых нелинейным источником. Система двух уравнений Пуассона с краевыми условиями, в которых участвует только одна производная дробного порядка между 0 и 1, рассмотрены в [5]. Другие задачи, связанные с производными дробных порядков, изучаются в [5–10], и некоторые из них исследуются методом пробных функций [11] (см. также [12–14]).

Статья организована следующим образом. В разд. 2 будут даны определения дробной производной в смысле Римана — Лиувилля и в смысле Капуто, а также связи между этими двумя понятиями. Мы уточним, что будем понимать под решением задачи (1). Разд. 3 посвящен нашему основному результату об отсутствии решений. В разд. 4 будут установлены некоторые необходимые условия существования.

2. Предварительные сведения

Производные дробного порядка понимаются в смысле Капуто (см. [15]):

$$\mathbf{D}^{\gamma} f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-\gamma} f'(\tau)\, d\tau \quad \text{для } 0 < \gamma < 1,$$

и в общем случае:

$$\mathbf{D}^{\gamma} f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\gamma-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau, \quad n = [\gamma] + 1,\ \gamma > 0. \tag{2}$$

Связь между производными по Капуто (2) и (левосторонними) производными по Риману — Лиувиллю (см. [15, 16]):

$${}_0D_t^{\gamma} f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\gamma-1} f(\tau)\, d\tau, \quad n = [\gamma] + 1,\ \gamma > 0,$$

дается формулой (см. [16, теорема 2.2, с. 39])

$${}_0D_t^{\gamma} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) t^{k-\gamma}}{\Gamma(1+k-\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(n-\gamma)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\gamma-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau. \tag{3}$$

С помощью (3) задачу (1) можно переписать в виде

$$\Delta u(x',x_d,t)=0, \quad x=(x',x_d)\in\mathbb{R}^{d-1}\times(0,+\infty),\ t>0,$$

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{1+\alpha}(u(x',0,t)-u(x',0,0)-u_t(x',0,0)t)+{}_0D_t^{\beta}(u(x',0,t)-u(x',0,0))\\ -u_{x_d}\geq|u|^p, \quad x'\in\mathbb{R}^{d-1},\ t>0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$u(x',0,0)=u_0(x')\geq 0, \quad u_t(x',0,0)=u_1(x')\geq 0, \quad x'\in\mathbb{R}^{d-1}.$$

Для применения формулы «интегрирования по частям» (см. [16, с. 56])

$$\int_0^T f(t)\,{}_0D_t^{\varrho}g(t)dt=\int_0^T g(t)\,{}_tD_T^{\varrho}f(t)\,dt \tag{5}$$

нам потребуется «правосторонняя» дробная производная по Риману — Лиувиллю для $T>0$:

$${}_tD_T^{\gamma}f(t):=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\gamma)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_t^T(\tau-t)^{n-\gamma-1}f(\tau)\,d\tau, \quad n=[\gamma]+1,\ \gamma>0.$$

Для слабой постановки мы кроме формулы «интегрирования по частям» будем использовать соотношения (см. [16, (2.30), (2.31), с. 37])

$${}_0D_t^{1+\alpha}f=D.{}_0D_t^{\alpha}f \quad \text{и} \quad {}_tD_T^{1+\alpha}f=-D.\,{}_tD_T^{\alpha}f, \tag{6}$$

а также формулу (см. лемму 2.2 в [16])

$${}_tD_T^{\gamma}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\left[\frac{f(T)}{(T-t)^{\gamma}}-\int_t^T(\tau-t)^{-\gamma}f'(t)\,dt\right]. \tag{7}$$

Пусть $Q_T:=\mathbb{R}^{d-1}\times(0,+\infty)\times(0,T)$ и $\Sigma_T:=\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\}\times(0,T)$.

Определение. Под (*слабым*) *решением* задачи (1) будем понимать неотрицательную функцию $u\in C\big([0,T];L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}\times(0,\infty))\big)\cap C^1\big([0,T];L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-1}\times\{0\})\big)$ такую, что

$$\begin{aligned} \int_{Q_T}u\Delta\varphi\,dxdt+\int_{\Sigma_T}(u(x',0,t)-u_0(x')-u_1(x')t).\,{}_tD_T^{\alpha+1}\varphi\,dx'dt\\ +\int_{\Sigma_T}(u(x',0,t)-u_0(x')).\,{}_tD_T^{\beta}\varphi\,dx'dt-\int_{\Sigma_T}u\varphi_{x_d}\,dx'dt\geq\int_{\Sigma_T}\varphi u^p\,dx'dt \end{aligned} \tag{8}$$

для любой $\varphi\in C_0^2(Q_T)$, $\varphi\geq 0$, и

$$\varphi(x',0,T)={}_tD_T^{\alpha}\varphi(x',0,T)=0.$$

Отметим, что на самом деле нам не нужна такая регулярность для u. От u потребуется лишь, чтобы оно входило в $L^1_{\mathrm{loc}}(Q_T)$ так, что $u^p\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Sigma_T)$ и след функции $u(x',0,t)$ непрерывен.

Для удобства обозначений там, где не может возникнуть недоразумения, будем опускать нули, обозначающие границу, а также меры $dxdt$ и $dx'dt$. Например, $u(x',t):=u(x',0,t)$, $\int_{Q_T}f:=\int_{Q_T}f\,dxdt$ и $\int_{\Sigma_T}f:=\int_{\Sigma_T}f\,dx'\,dt$.

3. Результат об отсутствии решения

Теорема 1. *Пусть* $1-\frac{1}{p}<\beta<1$, $1<p\le 1+\frac{\beta}{1+\beta(d-2)}$. *Тогда задача* (1) *не имеет нетривиального неотрицательного решения, глобального по времени.*

Доказательство. Допустим, что решение есть для всего временного промежутка $t>0$. Рассмотрим решение u на $(0,T_*)$, и пусть T и R — положительные постоянные такие, что $0<TR<T_*$. Возьмем пробную функцию

$$\varphi(x',t):=\varphi_0\left(\frac{t^{2\beta}+|x'|^2}{R^{2\beta}}\right)$$

такую, что $\varphi(x',TR)={}_tD^{\alpha}_{TR}\varphi(x',TR)=0$. Функция $\varphi_0\in C^2_0(\mathbb{R}_+)$ взята неотрицательной, неубывающей и такой, что

$$\varphi_0(\xi):=\begin{cases}1, & \text{если } 0\le\xi\le 1,\\ 0, & \text{если } \xi\ge 2.\end{cases}$$

Допустим также, что φ_0 удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}\varphi_0^{-p'/p}\left\{\left|{}_tD^{\beta}_{TR}\varphi\right|^{p'}+\left|{}_tD^{1+\alpha}_{TR}\varphi\right|^{p'}\right\}dtdx'<\infty, \tag{9}$$

где p' — сопряженный к p показатель. Эти условия необременительны, и можно считать их всегда выполненными. В самом деле, этого можно добиться взятием $\varphi=\varphi_0^{\lambda}$ с надлежаще большим λ. Далее, рассмотрим новую функцию

$$\Psi=\Psi(x',x_d,t)$$

такую, что

$$\Delta\Psi=0,\quad \Psi(x',0,t)=\varphi(x',t). \tag{10}$$

Явное решение задачи (10) дается формулой

$$\Psi(x',x_d,t)=\frac{2x_d}{\sigma_d}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\frac{\varphi(y,t)}{|y-x'|^2+x_d^2}\,dy,$$

где σ_d/d — объем единичного шара. Отметим, что, поскольку φ определена на основе φ_0, нет необходимости налагать обычное условие стремления Ψ к нулю при x, стремящемся к бесконечности. Легко видеть, что $\Psi_{x_d}>0$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}u\Psi_{x_d}\ge 0. \tag{11}$$

По второй формуле Грина имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}(u\Psi_{x_d}-u_{x_d}\varphi)=0$$

(это объясняет наличие члена $\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}u\varphi_{x_d}$ в слабой формулировке (8)). Используя эту пробную функцию в (8) и принимая во внимание (10) и (11), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}\varphi u^p+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}u_0(x').\,{}_tD^{\alpha+1}_{TR}\varphi+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}tu_1(x')\,{}_tD^{\alpha+1}_{TR}\varphi$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}u_0(x').\,{}_tD^{\beta}_{TR}\varphi\le\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}u(x',t)\,{}_tD^{\alpha+1}_{TR}\varphi+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}u(x',t)\,{}_tD^{\beta}_{TR}\varphi,$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}\varphi u^p+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}u_0(x')\int\limits_0^{TR}{}_tD_{TR}^{1+\alpha}\varphi+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}u_1(x')\int\limits_0^{TR}t\,{}_tD_{TR}^{\alpha+1}\varphi$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}u_0(x')\int\limits_0^{TR}{}_tD_{TR}^{\beta}\varphi\le\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}u(x',t){}_tD_{TR}^{\alpha+1}\varphi+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^{TR}u(x',t)\,{}_tD_{TR}^{\beta}\varphi. \quad (12)$$

Покажем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}u_0(x')\int\limits_0^{TR}{}_tD_{TR}^{1+\alpha}\varphi+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}u_1(x')\int\limits_0^{TR}t\,{}_tD_{TR}^{1+\alpha}\varphi+\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}u_0(x')\int\limits_0^{TR}{}_tD_{TR}^{\beta}\varphi\ge 0. \quad (13)$$

Каждый член в (13) неотрицателен. В самом деле, во-первых, из (7) имеем

$$\int\limits_0^{TR}{}_tD_{TR}^{\beta}\varphi=-\int\limits_0^{TR}\int\limits_t^{TR}(\tau-t)^{-\beta}\varphi'(\tau)\,d\tau dt\ge 0.$$

Во-вторых, с помощью (6) можно записать

$$\int\limits_0^{TR}{}_tD_{TR}^{1+\alpha}\varphi=-\int\limits_0^{TR}D.\,{}_tD_{TR}^{\alpha}\varphi=\left[-\,{}_tD_{TR}^{\alpha}\varphi\right]_0^{TR}=\,{}_tD_{TR}^{\alpha}\varphi(0)\ge 0 \quad (14)$$

и

$$\int\limits_0^{TR}t\,{}_tD_{TR}^{1+\alpha}\varphi=-\int\limits_0^{TR}tD\,{}_tD_{TR}^{\alpha}\varphi=\int\limits_0^{TR}{}_tD_{TR}^{\alpha}\varphi\ge 0.$$

Поэтому из (12) вытекает, что

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}}\varphi u^p\le\int\limits_{\Sigma_{TR}}u(x',t)\,{}_tD_{TR}^{\alpha+1}\varphi+\int\limits_{\Sigma_{TR}}u(x',t)\,{}_tD_{TR}^{\beta}\varphi. \quad (15)$$

Используя ε-неравенство Юнга, получим

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}}u\,{}_tD_{TR}^{\gamma}\varphi=\int\limits_{\Sigma_{TR}}u\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi^{\frac{1}{p}}\,{}_tD_{TR}^{\gamma}\varphi\le\varepsilon\int\limits_{\Sigma_{TR}}u^p\varphi+C(\varepsilon)\int\limits_{\Sigma_{TR}}\varphi^{-p'/p}\left|\,{}_tD_{TR}^{\gamma}\varphi\right|^{p'} \quad (16)$$

с $\gamma=1+\alpha,\ \beta$. Из (15) и (16) выводим, что

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}}\varphi u^p\le 2\varepsilon\int\limits_{\Sigma_{TR}}\varphi u^p+C(\varepsilon)\int\limits_{\Sigma_{TR}}\varphi^{-p'/p}\left\{\left|\,{}_tD_{TR}^{\beta}\varphi\right|^{p'}+\left|\,{}_tD_{TR}^{1+\alpha}\varphi\right|^{p'}\right\}.$$

Взяв $0<\varepsilon<1/2$, получим

$$\int\limits_{\Sigma_{TR}}\varphi u^p\le C\int\limits_{\Sigma_{TR}}\varphi^{-p'/p}\left\{\left|\,{}_tD_{TR}^{\beta}\varphi\right|^{p'}+\left|\,{}_tD_{TR}^{1+\alpha}\varphi\right|^{p'}\right\}. \quad (17)$$

Здесь и далее C означает общую положительную постоянную.

Введем нормированные переменные $\tau := R^{-1}t$ и $y' := R^{-\beta}x'$. Тогда $dx'dt = R^{1+(d-1)\beta}\,dy'd\tau$ и из определения правосторонней дробной производной по Риману — Лиувиллю (в случае $\gamma = 1+\alpha$ надо также использовать (6)) вытекает, что

$$ {}_tD^{\gamma}_{TR}\varphi = R^{-\gamma}\,{}_\tau D^{\gamma}_{T}\varphi, \quad \gamma = 1+\alpha, \beta. $$

Использование этих новых переменных в (17) приводит к соотношению

$$ \int\limits_{\Sigma_{TR}} \varphi u^p \le C \int\limits_{\Sigma_T} \varphi^{-p'/p}\big\{R^{-\beta p'}\big|{}_\tau D^{\beta}_{T}\varphi\big|^{p'} + R^{-(1+\alpha)p'}\big|{}_\tau D^{1+\alpha}_{T}\varphi\big|^{p'}\big\}R^{1+(d-1)\beta}\,d\tau dy' $$
$$ \le C(R^{1+(d-1)\beta-\beta p'} + R^{1+(d-1)\beta-(1+\alpha)p'}). \quad (18) $$

В предыдущем неравенстве использовано предположение (9). Отметим, что оба показателя $1+(d-1)\beta-\beta p'$ и $1+(d-1)\beta-(1+\alpha)p'$ неположительны, если $d \le 1 + \frac{\beta p'-1}{\beta}$ (отметим также, что ввиду предположения $1-\frac{1}{p} < \beta < 1$ правая часть $1 + \frac{\beta p'-1}{\beta}$ больше единицы).

Пусть $d < 1 + \frac{\beta p'-1}{\beta}$. Тогда из (18) получаем, что

$$ \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Sigma_{TR}} \varphi u^p = 0. $$

Следовательно, $u = 0$ п. в.; противоречие.

В случае $d = 1 + \frac{\beta p'-1}{\beta}$ видим, что $\int\limits_{\Sigma_{TR}} \varphi u^p \le C$, и, переходя к пределу при $R \to \infty$, находим, что

$$ \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \int\limits_0^\infty u^p \le C. $$

Из оценки

$$ \int\limits_{\Sigma_{TR}} \varphi u^p \le \Big(\int\limits_{\Omega} \varphi u^p\Big)^{1/p} \Big\{\Big(\int\limits_{\Sigma_{TR}} \varphi^{-p'/p}\big|{}_tD^{\beta}_{T}\varphi\big|^{p'}\Big)^{1/p'} + \Big(\int\limits_{\Sigma_{TR}} \varphi^{-p'/p}\big|{}_tD^{1+\alpha}_{T}\varphi\big|^{p'}\Big)^{1/p'}\Big\}, $$

где $\Omega = \{(t,x) : 0 \le t^{2\beta} + |x'|^2 \le 2R^{2\beta}\}$, и того факта, что

$$ {}_tD^{\gamma}_{TR}1 = \frac{(TR-t)^{-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}, \quad \gamma = \alpha, \beta, $$

получаем

$$ \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Sigma_{TR}} \varphi u^p \le C \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{C_R} \varphi u^p = 0, $$

где $C_R = \{(t,x) : R^{2\beta} \le t^{2\beta} + |x'|^2 \le 2R^{2\beta}\}$. Вновь пришли к противоречию. □

Замечание 1. Мы получили тот же показатель, что и для уравнения Лапласа с

$$ D^{\beta}_t(u(x',0,t) - u(x',0,0)) - u_{x_d} \ge |u|^p, \quad x' \in \mathbb{R}^{d-1},\ t > 0, $$

на границе. Это означает, что критический показатель зависит только от дробной производной наименьшего порядка. Подобное явление наблюдалось в [17] и [8], но с аналогичными производными в самом уравнении, а не на границе. А именно, там показано, что критический показатель для гиперболической задачи (со слабой диссипацией) равен критическому показателю для параболической части задачи с производной наименьшего порядка соответственно. Далее, если $\beta \to 1$, то мы находим критический показатель $p_c = 1 + \frac{1}{d-1}$, уже полученный в [2].

4. Необходимые условия существования

В следующем утверждении будем использовать пробную функцию

$$\varphi(t, x') := \Phi\left(\frac{x'}{R}\right)\left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)^l,$$

где l — целое положительное число такое, что $1 < l \leq p-1$, $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d-1})$, $\Phi \geq 0$ и $\operatorname{supp}\Phi \subset \{x \in \mathbb{R}^{d-1} : 1 < |x| < 2\}$.

Теорема 2. *Пусть $p \geq 3$ и u — решение задачи (1) на $(0, T)$. Тогда существует положительная постоянная C такая, что*

$$T^{\beta(p'-1)} \inf_{|x'|>R} u_0(x') + T^{\beta p'-\alpha} \inf_{|x'|>R} u_1(x') \leq C$$

для любого $R > 0$.

Доказательство. Из неравенства (12) ясно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \int\limits_0^T \varphi u^p + \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_0(x') \int\limits_0^T \left[{}_tD_T^{\alpha+1}\varphi + {}_tD_T^{\beta}\varphi\right] + \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_1(x') \int\limits_0^T t.\, {}_tD_T^{\alpha+1}\varphi$$
$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \int\limits_0^T u(x',t)\, .{}_tD_T^{\alpha+1}\varphi + \int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \int\limits_0^T u(x',t).\, {}_tD_T^{\beta}\varphi. \quad (19)$$

Простые вычисления (с использованием подстановки Эйлера $y = \frac{s-t}{T-t}$) дают

$${}_tD_T^{\gamma}\left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)^l = \frac{-T^{-2l}}{\Gamma(1-\gamma)} \sum_{k=0}^{l} 2^{l-k} C_k^l M_{lk} t^{l-k-1}(T-t)^{l+k-\gamma}[(l-k)T - (2l+1-\gamma)t], \quad (20)$$

где $M_{lk} := \Gamma(l+1) \sum\limits_{n=0}^{k} C_n^k \frac{\Gamma(n-\beta+1)}{\Gamma(l-\beta+n+2)}$ и $C_k^l := \frac{l(l-1)(l-2)\dots(l-k+1)}{l!}$,

$${}_tD_T^{\alpha+1}\left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)^l = \frac{T^{-2l}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{l} 2^{l-k} C_k^l M_{lk} t^{l-k-2}(T-t)^{l+k-\alpha-1}$$
$$\times [(l-k)(l-k-1)T^2 - 2tT(l-k)(2l-\alpha) + (2l-\alpha)(2l-\alpha+1)t^2], \quad (21)$$

$$\int\limits_0^T t.\, {}_tD_T^{\alpha+1}\left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)^l dt = \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{l} L_{\alpha k} C_k^l,$$

$$\int\limits_0^T {}_tD_T^{\beta}\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^l dt = \frac{T^{1-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\sum_{k=0}^{l} L_{\beta k}C_k^l, \quad \int\limits_0^T {}_tD_T^{\alpha+1}\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^l dt \geq 0$$

(см. также (14)), где $L_{\gamma k} := \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(k+1-\gamma)}{\Gamma(l-\gamma+k+2)}$.

Используя неравенство Гёльдера, вытекающее из ε-неравенства Юнга, как в (16), (17), из (19) выводим, что

$$T^{1-\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_0(x')\Phi\,dx' + T^{1-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_1(x')\Phi\,dx'$$

$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}}\int\limits_0^T \varphi^{-p'/p}\left\{\left|{}_tD_T^{\beta}\varphi\right|^{p'} + \left|{}_tD_T^{1+\alpha}\varphi\right|^{p'}\right\} dt dx'. \quad (22)$$

Из (20) и (21) вытекает, что

$$\left|{}_tD_T^{\beta}\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^l\right| \leq \frac{T^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\sum_{k=0}^{l} 2^{l-k}(3l+1-\beta-k)C_k^l M_{lk} \quad (23)$$

и

$$\left|{}_tD_T^{\alpha+1}\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^l\right|$$

$$\leq \frac{T^{-1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{k=0}^{l} 2^{l-k}C_k^l M_{lk}\left[(l-k)(l-k-1)+(2l-\alpha)(4l-2k-\alpha+1)\right]. \quad (24)$$

Применяя оценки (23) и (24) в (22), получаем

$$T^{1-\beta}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_0(x')\Phi\,dx' + T^{1-\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} u_1(x')\Phi\,dx' \leq C(T^{1-\beta p'} + T^{1-(1+\alpha)p'})\int\limits_{\mathbb{R}^{d-1}} \Phi\,dx'. \quad (25)$$

Отсюда (предполагая, что $T > 1$)

$$T^{\beta(p'-1)}\inf_{|x'|>R} u_0(x') + T^{\beta p'-\alpha}\inf_{|x'|>R} u_1(x') \leq C. \quad \square$$

Следствие 1. *Пусть $p \geq 3$. Если существует глобальное по времени решение и*

(a) $\alpha \leq \beta$

или

(b) $\alpha > \beta$ *и* $p < \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$,

то

$$\inf_{|x'|>R} u_0(x') = \inf_{|x'|>R} u_1(x') = 0$$

для любого $R > 0$.

Доказательство. Результат следствия вытекает непосредственно из последней теоремы, так как условия обеспечивают отрицательность обоих показателей $\beta(p'-1)$ и $\beta p' - \alpha$. $\square$

Замечание 2. Если решение u существует только локально с $T < 1$, то из (25) вытекает, что

$$T^{(1+\alpha)p'-\beta}\inf_{|x'|>R} u_0(x') + T^{(1+\alpha)p'-\alpha}\inf_{|x'|>R} u_1(x') \leq C$$

и следствие 1 будет выполнено при других условиях на различные параметры. Следствие 1 можно рассматривать как источник необходимых условий существования решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kirane M., Nabana, Pokhozhaev S.* Nonexistence of global solutions to an elliptic equation with a dynamical boundary condition // Bol. Soc. Paranaense Mat. (To appear).
2. *Amann H., Fila M.* A Fujita-type theorem for the Laplace equation with a dynamical boundary condition // Acta Math. Univ. Comenianae. 1997. V. 66. P. 321–328.
3. *Киране М., Набана Э., Похожаев С. И.* Построение самосопряженного расширения оператора Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на пучке плоскостей. I // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 7. С. 768–774.
4. *Georgiev V., Todorova G.* Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms // J. Differential Equations. 1994. V. 109. P. 295–308.
5. *Киране М., Татар Н.* Отсутствие локальных и глобальных решений эллиптических систем с дробными по времени динамическими краевыми условиями // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 593–605.
6. *Kirane M., Laskri Y., Tatar N.-e.* Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 312, N 2. P. 488–501.
7. *Kirane M., Tatar N.-e.* Exponential growth for fractionally damped wave equation // Zeitschrift Anal. Anwendungen. 2003. Bd 22, N 1. S. 167–178.
8. *Kirane M., Tatar N.-e.* Nonexistence of solutions to a hyperbolic equation with a time fractional damping // Zeitschrift Analysis Anwendungen (J. Anal. Appl.). 2006. Bd 25. S. 131–142.
9. *Tatar N.-e.* A blow-up result for a fractionally damped wave equation // Nonlinear Differential Equations Appl. 2005. V. 12, N 2. P. 215–226.
10. *Tatar N.-e.* A wave equation with fractional damping // Zeitschrift Anal. Anwendungen (J. Anal. Appl.) 2003. Bd 22, N 3. S. 609–617.
11. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Отсутствие слабых решений для некоторых вырожденных и сингулярных гиперболических задач в $\mathbb{R}^{n+1}_+$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 232. С. 248–267.
12. *Гидда М., Киране М.* Критичность для некоторых эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 4. С. 511–520.
13. *Kirane M., Qafsaoui M.* Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear кeaction-вiffusion systems // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 268, N 1. P. 217–243.
14. *Kirane M., Qafsaoui M.* Fujita's exponent for a semilinear wave equation with linear damping // Adv. Nonlinear Stud. 2002. V. 2, N 1. P. 41–50.
15. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. (Math. Sci. Eng.; V. 198).
16. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. М.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
17. *Todorova G., Yordanov B.* Critical exponent for nonlinear wave equations with damping // J. Differential Equations. 2001. V. 174. P. 464–489.

Статья поступила 16 марта 2006 г.

Mokhtar Kirane
Laboratoire de Mathematiques et Applications,
Pôle Sciences et Technologie, Université de La Rochelle,
Avenue M. Crepeau, 17000 La Rochelle, France
mkirane@univ-lr.fr

Nasser-eddine Tatar
Kind Fahd University of Petroleum and Minerals,
Department of Mathematical Sciences P.O. Box 1446,
Dhahran, 31261, Saudi Arabia
tatarn@kfupm.edu.sa