Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.55

О ДЗЕТА–ФУНКЦИИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец

Аннотация: Для систем мероморфных функций $f = (f_1, \dots, f_n)$ в $\mathbb{C}^n$ вводится понятие дзета-функции, ассоциированной с этой системой. С использованием теории вычетов дается интегральное представление для дзета-функции, которое позволяет построить аналитическое продолжение дзета-функции.

Ключевые слова: нелинейная система, дзета-функция, многомерный вычет.

Введение

В работе определяется дзета-функция, ассоциированная с системами нелинейных уравнений в $\mathbb{C}^n$. Одной из мотиваций к ее определению служат многочисленные приложения теории вычетов к исключению переменных из нелинейных систем и к алгебраической геометрии (см., например, [1–3]).

Основой при решении систем алгебраических уравнений служит метод исключения неизвестных. Как правило, процедура исключения реализуется исключением каждого неизвестного с использованием результанта Сильвестра для двух полиномов.

Если рассматриваемая система имеет только изолированные корни, то на последнем шаге исключения получается система уравнений от одного переменного, которая может быть заменена одним уравнением.

В случае, когда число переменных совпадает с числом уравнений, многомерный логарифмический вычет позволяет исключить все неизвестные, вместо того чтобы исключать их одно за другим. При этом результирующее уравнение сохраняет кратность корней.

Построение результирующего уравнения возможно также при решении систем голоморфных функций.

Предположим, что $f = (f_1, \dots, f_n)$ — система голоморфных функций в области $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}^n$, которая имеет конечное число нулей $\{a_k\}$ в $\mathscr{D}$. В соответствии с [3, § 19] результант функции $F : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ относительно системы f есть число

$$R_f(F) = \prod_k (F(a_k))^{\mu_k}, \tag{1}$$

где μ_k — кратность нуля a_k системы f. В случае, когда $n = 1$, $\mathscr{D} = \mathbb{C}$, f и F — полиномы, результант $R_f(F)$ совпадает с результантом Сильвестра. Взяв

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00517), второго автора — гранта Президента Российской Федерации для ведущих научных школ (НШ–1212.2003.1).

логарифм от обеих частей равенства (1), легко получаем, что

$$\log R_f(F) = \sum_{a\in N_f} \log F(a),$$

где сумма берется по всем нулям f в $\mathscr{D}$, подсчитываемым с учетом их кратностей. Правая часть формулы корректно определена, если образ множества N_f при отображении F лежит в $\mathbb{C}$ с выброшенным лучом, исходящим из начала координат.

При рассмотрении системы голоморфных функций f в произведении областей $\mathscr{D} = \mathscr{D}' \times B$ в $\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}$ можно ввести результант функции $f_n(z', z_n)$ относительно усеченной системы $f'(z', z_n) = (f_1(z', z_n), \dots, f_{n-1}(z', z_n))$ при фиксированном $z_n \in B$. Функция $R(z_n) = R_{f'}(f_n)$, полученная таким образом, обладает тем свойством, что $R(z_n) = 0$ тогда и только тогда, когда система $f(z', z_n) = 0$ имеет решение для данного z_n.

Если f — полиномиальное отображение в $\mathbb{C}^n$, то результанты функций $F(z) = z^l$, $l \in \mathbb{Z}^n_+$, относительно f играют большую роль в теории исключения. Действительно, они позволяют (в комбинации с рекуррентными формулами Ньютона) точно вычислить $R(z_n)$ (см, [2, § 8]). Ряды $\sum\limits_{a\in N_f} a^s$ суть аналоги дзета-функции Римана. Поэтому мы вводим дзета-функцию $\zeta_f(s)$ системы f с помощью ряда $\sum\limits_{a\in N_f} (-a)^{-s}$, если он сходится. Заметим, что $\zeta_f(s)$ есть по определению функция n переменных $s = (s_1, \dots, s_n)$.

Нас будет интересовать вопрос об аналитичности ζ_f по $s \in \mathbb{C}^n$.

§ 1. Дзета-функция нелинейных систем

Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ — система целых функций в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(z) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(z) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Обозначим через $N_f = f^{-1}(0)$ множество всех корней системы (2), каждый корень считается столько раз, какова его кратность. В дальнейшем будем предполагать, что N_f дискретно, поэтому оно не более чем счетно.

Наша цель — получить интегральное представление для дзета-функции $\zeta_f(s)$ системы (2), которую мы определим следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{a\in N_f} (-a)^{-s},$$

где $s = (s_1, \dots, s_n)$, а $(-a)^{-s} = (-a_1)^{-s_1} \cdot \ldots \cdot (-a_n)^{-s_n}$. Знак минус в определении дзета-функции взят только для удобства записи интегральных формул, а какое значение берется у многозначной функции $(-z)^{-s}$, поясняется ниже.

Заметим, что классическая дзета-функция Римана выражается через систему корней уравнения $\exp z = 1$.

Пусть $z_j = x_j + iy_j$ для $j = 1, \dots, n$. Предположим, что ни одна из функций f_j не равна нулю ни в одной точке множества $\mathbb{R}^n_+ := \{z \in \mathbb{C}^n : x_1, \dots, x_n \geq 0,\ y_1 = \dots = y_n = 0\}$. Это, в частности, влечет, что $N_f \cap \mathbb{R}^n_+ = \varnothing$.

Рассмотрим полиэдральную область D вида $D = D_1 \times \dots \times D_n$ в $\mathbb{C}^n$, где

$$D_j = \{z \in \mathbb{C} : r_j < |z| < R_j\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : r_j < \operatorname{Re} z < R_j,\ \operatorname{Im} z = 0\}$$

и $0 < r_j < R_j$.

Отметим, что каждая D_j является односвязной областью. Ее граница $\varGamma_j = \partial D_j$ состоит из отрезка $[r_j, R_j]$ на действительной оси, окружности S_{R_j} радиуса R_j с центром в начале координат с положительной ориентацией (против часовой стрелки), отрезка $[R_j, r_j]$ на $\mathbb{R}$, который получается из $[r_j, R_j]$ изменением ориентации, и окружности $-S_{r_j}$, получаемой из S_{r_j} изменением направления обхода.

Прямое произведение $\varGamma = \varGamma_1 \times \dots \times \varGamma_n$ образует остов D. Выберем радиусы r_j и R_j, $j = 1, \dots, n$, так, чтобы $\varGamma \cap N_f = \varnothing$.

Рассмотрим интеграл

$$\mathscr{I}(s) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\varGamma} (-z)^{-s} \frac{df}{f}, \tag{3}$$

где

$$\frac{df}{f} = \frac{df_1 \wedge \dots \wedge df_n}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n}$$

и $(-z)^{-s} = (-z_1)^{-s_1} \cdot \ldots \cdot (-z_n)^{-s_n}$. Функции $(-z_j)^{-s_j} = e^{-s_j \ln(-z_j)}$ являются голоморфными в областях D_j, если через $\ln \zeta$ обозначить главную ветвь логарифма, т. е. голоморфную ветвь $\ln \zeta$ на $\mathbb{C} \setminus \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta \le 0, \operatorname{Im} \zeta = 0\}$, равную нулю при $\zeta = 1$. Очевидно, что интеграл $\mathscr{I}(s)$ есть целая функция по $s \in \mathbb{C}^n$.

Обозначим через $[f_j] = \{z \in \mathbb{C}^n : f_j(z) = 0\}$ дивизор функции f_j. Будем говорить, что область D *согласована с отображением* f, если $[f_j] \cap (\partial D)_j = \varnothing$ для каждого $j = 1, \dots, n$, где

$$(\partial D)_j = \overline{D}_1 \times \dots \times \overline{D}_{j-1} \times \varGamma_j \times \overline{D}_{j+1} \times \dots \times \overline{D}_n$$

является j-й гранью границы области D.

Если D согласована с f, то из принципа разделяющих циклов [3, § 9.2] немедленно получаем, что

$$\mathscr{I}(s) = \sum_{a \in N_f \cap D} (-a)^{-s}. \tag{4}$$

Несложно убедиться в том, что условие $[f_j] \cap (\partial D)_j = \varnothing$ может быть переписано в следующем виде:

1) $f_j(z) \ne 0$, если $|z_j| = r_j$ и $r_k \le |z_k| \le R_k$ для $k \ne j$;
2) $f_j(z) \ne 0$, если $|z_j| = R_j$ и $r_k \le |z_k| \le R_k$ для $k \ne j$;
3) $f_j(z) \ne 0$, если $r_j \le \operatorname{Re} z_j \le R_j$, $\operatorname{Im} z_j = 0$ и $r_k \le |z_k| \le R_k$ для $k \ne j$.

Для выполнения равенства (4) условие 3 можно убрать. Действительно, рассмотрим вспомогательную систему

$$F_j(z) = 0 \tag{5}$$

для $j = 1, \dots, n$, где $F_j(z) = f_j(0, \dots, 0, z_j, 0, \dots, 0)$. Она удовлетворяет условию 3, поскольку $f_j(0, \dots, 0, x_j, 0, \dots, 0) \ne 0$ для всех $x_j \ge 0$.

Функции $F_j(z)$ получаются из $f_j(z)$ приравниванием к нулю тейлоровских коэффициентов при мономах, содержащих переменные z_k для $k \ne j$. При достаточно малых шевелениях этих коэффициентов условие 3 остается еще справедливым, так как множество, на котором изменяются z_k, компактно. Поэтому формула (4) остается справедливой для таких коэффициентов.

Рассмотрим теперь функции $f_j^{(m)}(z)$, у которых коэффициенты Тейлора при мономах, содержащих переменные z_k, $k \neq j$, в степенях больше чем m, равны нулю.

Поскольку левая и правая части формулы (4) голоморфно зависят от тейлоровских коэффициентов $f_j^{(m)}$ (вне дискриминантного множества), то можно заключить, что формула (4) остается справедливой без условия 3 для функций $f_j^{(m)}$. Для обоснования равенства (4) в общем случае нужно перейти к пределу при $m \to \infty$.

В дальнейшем будем считать, что выполнено следующее требование: существуют последовательности $r_k^{(l)}$ и $R_k^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, n$, такие, что $r_k^{(l)} \to +0$, $R_k^{(l)} \to +\infty$ при $l \to \infty$ при любых k, для которых выполнены условия 1 и 2, т. е. $f_j(z) \neq 0$ при $|z_j| = r_j^{(l)}$ и при $|z_j| = R_j^{(l)}$ для $r_k^{(l)} \leq |z_k| \leq R_k^{(l)}$ при всех $k \neq j$.

§ 2. Интегральное представление

Исследуем поведение интеграла $\mathscr{I}(s)$ при $r_j \to 0$ и $R_j \to +\infty$ для $j = 1, \dots, n$, причем сначала будем переходить к пределу по z_1 при фиксированных остальных переменных, потом — по z_2 и т. д.

Остов $\varGamma$ есть объединение множеств, получаемых произведением окружностей S_{r_j}, S_{R_j} и отрезков $[r_j, R_j]$, ориентированных в различных направлениях.

Рассмотрим множество интегрирования вида $S_{r_1} \times \varGamma_2 \times \dots \times \varGamma_n$. Покажем, что при $\operatorname{Re} s_1 < 1$ интеграл

$$\int\limits_{S_{r_1}} (-z_1)^{-s_1} \frac{df_1}{f_1} \wedge \int\limits_{\varGamma_2 \times \dots \times \varGamma_n} (-z_2)^{-s_2} \cdot \ldots \cdot (-z_n)^{-s_n} \frac{df_2 \wedge \dots \wedge df_n}{f_2 \cdot \ldots \cdot f_n} \tag{6}$$

стремится к нулю при $r_1 \to 0$. Имеем

$$|(-z_1)^{-s_1}| = |e^{-s_1(\ln r_1 + i(\varphi_1 - \pi))}| = e^{-\operatorname{Re} s_1 \ln r_1 + \operatorname{Im} s_1 (\varphi_1 - \pi)} = O\big(r_1^{-\operatorname{Re} s_1}\big)$$

при $r_1 \to 0$, где $\varphi_1 = \arg z_1$. Так как $f_1(0) \neq 0$, то

$$\left| \int\limits_{S_{r_1}} (-z_1)^{-s_1} \frac{df_1}{f_1} \right| \leq c \int\limits_{S_{r_1}} |(-z_1)^{-s_1}|\, |dz_1| \leq C\, r_1^{1-\operatorname{Re} s_1}$$

с константами c и C, не зависящими от r_1. Поэтому первый интеграл в (6), а следовательно, и весь интеграл стремятся к 0 при $r_1 \to 0$.

То же самое рассуждение применимо к любому интегралу, множество интегрирования которого включает хотя бы одну окружность S_{r_j}. Тем самым все такие интегралы стремятся к нулю при $r_j \to 0$ и при условии $\operatorname{Re} s_j < 1$.

Рассмотрим теперь интеграл по множеству $S_{R_1} \times \varGamma_2 \times \dots \times \varGamma_n$. Очевидно, что

$$\int\limits_{S_{R_1} \times \varGamma_2 \times \dots \times \varGamma_n} (-z)^{-s} \frac{df}{f} = \int\limits_{S_{R_1} \times \varGamma_2 \times \dots \times \varGamma_n} (-z)^{-s} \frac{J_f}{f}\, dz, \tag{7}$$

где J_f — якобиан отображения f. Если $\operatorname{Re} s_1 > 0$ и

$$\frac{J_f}{f} = O\left(\frac{1}{R_1}\right)$$

при $R_1 \to +\infty$ (равномерно по остальным переменным, лежащим на множестве $\mathit{\Gamma}_2 \times \cdots \times \mathit{\Gamma}_n$), то интеграл (7) стремится к 0 при $R_1 \to +\infty$, поскольку

$$\left| \int\limits_{S_{R_1}} (-z_1)^{-s_1} \frac{J_f}{f}\, dz_1 \right| \le C R_1^{-\operatorname{Re} s_1}.$$

Если условие

$$\frac{J_f}{f} = O\left(\frac{1}{R_j}\right) \tag{8}$$

при $R_j \to +\infty$ выполняется для всех $j = 1, \dots, n$ и равномерно, когда остальные переменные меняются на множестве $[0, +\infty) \times \cdots \times [0, +\infty) \times \mathit{\Gamma}_{j+1} \times \cdots \times \mathit{\Gamma}_n$, то все интегралы, в множество интегрирования которых входит по крайней мере одна окружность S_{R_j}, стремятся к нулю.

Остается рассмотреть интегралы по произведениям отрезков, ориентированных в разных направлениях. Рассмотрим для простоты изложения одно из таких множеств:

$$P = [R_1, r_1] \times \cdots \times [R_k, r_k] \times [r_{k+1}, R_{k+1}] \times \cdots \times [r_n, R_n],$$

где первые k отрезков ориентированы в направлении убывания переменных $x_j = \operatorname{Re} z_j$.

Из определения голоморфной функции $(-z)^{-s}$ получается равенство

$$\int\limits_P (-z)^{-s} \frac{df}{f} = (-1)^k e^{-2\pi i s_1} \cdot \ldots \cdot e^{-2\pi i s_k} \int\limits_{[r_1, R_1] \times \cdots \times [r_n, R_n]} (-x)^{-s} \frac{df}{f},$$

поскольку

$$\begin{aligned}(-z)^{-s} = (-x_1 e^{2\pi i})^{-s_1} \cdot \ldots \cdot (-x_k e^{2\pi i})^{-s_k} (-x_{k+1})^{-s_{k+1}} \cdot \ldots \cdot (-x_n)^{-s_n} \\ = e^{-2\pi i s_1} \cdot \ldots \cdot e^{-2\pi i s_k} (-x)^{-s}.\end{aligned}$$

Суммируя все интегралы по множествам, которые содержат только отрезки, приходим (как легко проверить) к интегралу

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} (1 - e^{2\pi i(1-s_1)}) \cdot \ldots \cdot (1 - e^{2\pi i(1-s_n)}) \int\limits_{[r_1, R_1] \times \cdots \times [r_n, R_n]} (-x)^{-s} \frac{df}{f}.$$

Взяв теперь $r_j = r_j^{(l)}$ и $R_j = R_j^{(l)}$ $(j = 1, \dots, n)$ и устремив l к бесконечности в (4), получаем равенство

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} (1 - e^{2\pi i(1-s_1)}) \cdot \ldots \cdot (1 - e^{2\pi i(1-s_n)}) \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} (-x)^{-s} \frac{df}{f} = \sum_{a \in N_f} (-a)^{-s}. \tag{9}$$

Ряды в правой части этой формулы сходятся, поскольку сходится интеграл, стоящий в левой части.

Очевидные вычисления дают

$$\begin{aligned}1 - e^{2\pi i(1-s_j)} &= e^{\pi i(1-s_j)} 2i \frac{e^{-\pi i(1-s_j)} - e^{\pi i(1-s_j)}}{2i} \\ &= -2i e^{\pi i(1-s_j)} \sin \pi(1 - s_j) = (-1)^{-s_j} 2i \sin \pi(1 - s_j) = (-1)^{-s_j} 2i \sin \pi s_j,\end{aligned}$$

следовательно, левая часть формулы (9) равна

$$\frac{1}{\pi^n} \sin \pi s_1 \cdot \ldots \cdot \sin \pi s_n \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \frac{df}{f}.$$

Подводя итог, получим интегральное представление для дзета-функции $\zeta_f(s)$ в произведении полос $0 < \operatorname{Re} s_j < 1$.

Теорема 1. *Предположим, что* $0 < \operatorname{Re} s_j < 1$ *для всех* $j = 1, \dots, n$ *и условие* (8) *выполняется. Тогда*

$$\frac{1}{\pi^n} \sin \pi s_1 \cdot \ldots \cdot \sin \pi s_n \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \, \frac{df}{f} = \sum_{a \in N_f} (-a)^{-s} = \zeta_f(s). \qquad (10)$$

Положим $\mathscr{C}_j = (+\infty, r_j] \cup (-S_{r_j}) \cup [r_j, +\infty)$ и $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \times \dots \times \mathscr{C}_n$. Доказательство теоремы 1 в действительности показывает, что

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\mathscr{C}} z^{-s} \frac{df}{f} = \sum_{a \in N_f} (-a)^{-s} = \zeta_f(s). \qquad (11)$$

Интеграл в (11) сходится при условии, что $\operatorname{Re} s_j > 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Это дает аналитическое продолжение дзета-функции $\zeta_f(a)$ в произведение полуплоскостей $\operatorname{Re} s_j > 0$.

Рассмотрим теперь вместо системы целых функций систему мероморфных функций

$$f_j(z) = \frac{h_j(z)}{u_j(z)}, \quad j = 1, \dots, n, \qquad (12)$$

т. е. h_j и u_j являются целыми функциями, $j = 1, \dots, n$. Потребуем, чтобы нули всех функций h_j и u_j не пересекались с множеством $\mathbb{R}^n_+$, для этих функций выполнялось условие (8), корни (с учетом их кратностей) всех подсистем, состоящих из k функций u_j и $n-k$ функций h_j, образовывали дискретное множество, $k = 0, \dots, n$, и для всех этих подсистем выполнялось требование, сформулированное в конце предыдущего параграфа. Обозначим объединение нулевых множеств всех подсистем снова через N_f. Оно на самом деле состоит из нулей и полюсов системы (12).

Определим дзета-функцию $\zeta_f(s)$ системы (12) следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{a \in N_f} \delta(a)(-a)^{-s},$$

где $\delta(a)$ равно 1, если a является корнем подсистемы, в которую входит четное число функций u_j, и -1, если a является корнем подсистемы, в которую входит нечетное число функций u_j.

Теорема 2. *Предположим, что* $0 < \operatorname{Re} s_j < 1$ *для всех* $j = 1, \dots, n$ *и условие* (8) *выполняется для всех подсистем из* n *функций* u_j *и* h_j. *Тогда*

$$\frac{1}{\pi^n} \sin \pi s_1 \cdot \ldots \cdot \sin \pi s_n \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \frac{df}{f} = \sum_{a \in N_f} \delta(a)(-a)^{-s} = \zeta_f(s). \qquad (13)$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{df_j}{f_j} = \frac{d(h_j/u_j)}{h_j/u_j} = \frac{dh_j}{h_j} - \frac{du_j}{u_j},$$

форма $\frac{df}{f}$ является знакопеременной суммой форм, построенных по всем подсистемам из n функций h_j и u_j, причем знак «+» или «−» определяется четностью или соответственно нечетностью числа функций u_j, входящих в подсистему. Поскольку для каждой такой подсистемы выполнено условие теоремы 1, ее применение приводит к доказательству теоремы 2. $\square$

Замечание. При доказательстве теорем 1 и 2 выбирались области D_j, ограниченные отрезками и окружностями S_{r_j} и S_{R_j}. Вместо этих окружностей можно брать замкнутые кривые γ_{r_j} и γ_{R_j} соответственно, окружающие точку 0 и такие, чтобы при $r_j \to +0$ кривая γ_{r_j} стягивалась к нулю, а при $R_j \to +\infty$ расстояние от 0 до кривой γ_{R_j} неограниченно увеличивалось, причем длины этих кривых должны быть пропорциональны r_j и R_j соответственно. Тогда доказательство теорем 1 и 2 проходит и для таких областей D_j. Этот случай напоминает многомерную лемму Жордана из [4], но не сводится к ней, и условия, налагаемые на функции, более конструктивны.

§ 3. Применения теорем 1 и 2

В случае, когда f_j являются полиномами, условие (8) проверяется достаточно просто. Например, оно выполняется, если каждый полином имеет вид

$$f_j = z_j^{k_j} + g_j(z), \tag{14}$$

где степень полиномов g_j строго меньше k_j, $j = 1, \dots, n$. В этом случае выполняется условие согласования для дивизоров (см. [1, § 21]). Можно рассмотреть и более общие системы, например «треугольного» вида (см. [1, § 21]).

Предположим, что каждая функция f_j может быть записана как бесконечное произведение таких полиномов, т. е.

$$f_j(z) = \prod_{k=1}^{\infty} p_{jk}(z) \tag{15}$$

для $j = 1, \dots, n$.

Следствие 1. *Пусть условие* $0 < \operatorname{Re} s_j < 1$ *выполнено для всех* $j = 1, \dots, n$ *и интеграл*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \, \frac{df}{f}$$

сходится абсолютно. Тогда формула (10) *выполняется для системы* (15).

Доказательство. Элементарные вычисления дают

$$\frac{df}{f} = \frac{d \prod\limits_{k=1}^{\infty} p_{1k}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_{1k}} \wedge \dots \wedge \frac{d \prod\limits_{k=1}^{\infty} p_{nk}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_{nk}} = \sum_{k_1, \dots, k_n = 1}^{\infty} \frac{dp_{1k_1}}{p_{1k_1}} \wedge \dots \wedge \frac{dp_{nk_n}}{p_{nk_n}}.$$

Отметим, что формула (10) верна для каждой системы полиномов $p_{1k_1}, \dots, p_{nk_n}$, что следует из теоремы 1. Интегрируя почленно ряд, получим утверждение следствия.

Аналогичное следствие верно для систем мероморфных функций (12), если каждая из функций u_j и h_j разлагается в бесконечное произведение полиномов.

Обсудим другие классы функций, для которых справедлива теорема 1. Пусть $f_1(z) = f_1(z_1)$ — полином, удовлетворяющий условию $f_1(0) \neq 0$. Тогда $f_1(z_1)$ не обращается в нуль для достаточно малых $|z_1|$. Ясно, что $f_1(z_1)$ отличен от нуля для достаточно больших $|z_1|$. Более того, условие $f_1(x_1) \neq 0$ для всех $x_1 \geq 0$ выполняется, например, если коэффициенты f_1 имеют положительные действительные части.

Возьмем r_1 и R_1, удовлетворяющими условиям 1 и 2 из § 1. Положим

$$f_2(z) = c_{2,0} + \sum_{k=1}^{m_2} c_{2,k}(z_1) z_2^k,$$

где $c_{2,0}$ — ненулевая константа и $c_{2,k}(z_1)$ являются целыми функциями от z_1 со свойством $c_{2,m_2}(z_1) \neq 0$ в $\mathbb{C}$. Тогда $f_2(z)$ не обращается в нуль, если $r_1 \leq |z_1| \leq R_1$ и $|z_2|$ достаточно мал или достаточно велик. Поэтому существуют r_2 и R_2, удовлетворяющие условиям 1 и 2 из § 1.

Снова можно выбрать f_2, который отличен от нуля на $\mathbb{R}^n_+$, и т. д.

По индукции возьмем

$$f_n(z) = c_{n,0} + \sum_{k=1}^{m_n} c_{n,k}(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^k,$$

где $c_{n,0} \neq 0$ — константа и $c_{2,k}(z_1, \dots, z_{n-1})$ — целые функции от $z_1, \dots, z_{n-1}$ с условием $c_{2,m_n}(z_1, \dots, z_{n-1}) \neq 0$ в $\mathbb{C}^{n-1}$. Имея фиксированные r_j и R_j для $j = 1, \dots, n-1$, можно выбрать r_n и R_n такими, что условия 1 и 2 из § 1 будут выполняться. Допустим, что $f_n(z) \neq 0$ на всем $\mathbb{R}^n_+$. Тогда система $f = (f_1, \dots, f_n)$, построенная таким образом, удовлетворяет условиям 1–3 из § 1 и можно выбрать последовательности $r_j^{(s)}$ и $K_j^{(s)}$, удовлетворяющие требованию, сформулированному в конце этого параграфа.

Наша следующая цель — показать, что условие (8) также удовлетворяется. Ясно, что

$$J_f = (f_1)'_{z_1} \cdot \ldots \cdot (f_n)'_{z_n},$$

следовательно,

$$\frac{J_f}{f} = \frac{(f_1)'_{z_1}}{f_1} \cdot \ldots \cdot \frac{(f_n)'_{z_n}}{f_n}.$$

Поскольку f_j — полином от z_j и коэффициент при старшей степени z_j отделен от нуля, можно заключить, что

$$\frac{(f_j)'_{z_j}}{f_j} = O\left(\frac{1}{R_j}\right)$$

равномерно по другим переменным $z_1, \dots, z_{j-1}$ при $R_j \to +\infty$. Следовательно, f удовлетворяет (8).

Рассмотрим теперь частный случай системы (2), в которой

$$f_j(z) = F_j\big(z_1^{m_1}, \dots, z_n^{m_n}\big), \quad j = 1, \dots, n, \tag{16}$$

где $F_j(w_1, \dots, w_n) = F_j(w)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$, а $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, n$. Обозначим $m = (m_1, \dots, m_n)$.

Если a — корень системы

$$F_j(w) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

то $(a^{1/m_1}, \dots, a^{1/m_n})$ — корни системы (2).

Поскольку

$$a_j^{1/m_j} = (|a_j| e^{i\varphi_j})^{1/m_j} = |a_j|^{1/m_j} e^{i(\varphi_j/m_j) + 2\pi i (k/m_j)},$$

где φ_j — главное значение аргумента a_j, а $k = 0, 1, \dots, m_j - 1$, то главные значения a^{1/m_j} лежат в углах $0 \leq \frac{\varphi_j}{m_j} \leq \frac{2\pi}{m_j}$ на комплексной плоскости.

Обозначим через N_f^+ корни системы (2), координаты которых лежат в этих углах.

Якобиан J_f равен $m_1 \dots m_n z^{m-I} J_F$, где $z^{m-I} = z_1^{m_1-1} \dots z_n^{m_n-1}$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \frac{J_f\,dx}{f} = m_1 \dots m_n \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \cdot x^{m-I} \frac{J_F\,dx}{F}.$$

Сделав в нем замену переменных $t_j = x_j^{m_j}$, $j = 1, \dots, n$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \frac{df(x)}{f(x)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} t^{-s/m} \frac{dF(t)}{F(t)},$$

где $t^{-s/m} = t_1^{-s_1/m_1} \dots t_n^{-s_n/m_n}$. Применяя к последнему интегралу теорему 1, придем к равенству

$$\frac{1}{\pi^n} \sin \frac{\pi s_1}{m_1} \dots \sin \frac{\pi s_n}{m_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \frac{df(x)}{f(x)} = \sum_{a \in N_F} (-a)^{-s/m},$$

которое верно при $0 < \operatorname{Re} s_j < m_j$, $j = 1, \dots, n$. Обозначив $b = (b_1, \dots, b_n) = (a^{1/m_1}, \dots, a^{1/m_n})$, где аргументы b_j удовлетворяют неравенствам $0 \le \frac{\varphi_j}{m_j} \le \frac{2\pi}{m_j}$, получаем

Следствие 2. *Если для системы* (2) *с целыми функциями вида* (16) *выполнено условие* (8) *и* $0 < \operatorname{Re} s_j < m_j$ *для всех* $j = 1, \dots, n$, *то справедлива формула*

$$\frac{1}{\pi^n} \sin \frac{\pi s_1}{m_1} \dots \sin \frac{\pi s_n}{m_n} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \frac{df(x)}{f(x)} = \sum_{b \in N_f^+} (-b)^{-s}.$$

§ 4. Пример

Пусть $f_1, \dots, f_n$ — полиномы вида (14) с неотрицательными коэффициентами такие, что старшие однородные части f_j имеют единственный общий нуль в точке $0 \in \mathbb{C}^n$, и пусть $f_j(0) \ne 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Тогда система

$$\begin{cases} f_1(z) = c_1, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(z) = c_n \end{cases} \tag{17}$$

имеет по теореме Безу конечное число корней в $\mathbb{C}^n$ для любых констант $c_1, \dots, c_n$.

Рассмотрим интеграл

$$I(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \frac{df_1 \wedge \dots \wedge df_n}{\operatorname{sh} f_1 \cdot \ldots \cdot \operatorname{sh} f_n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x^{-s} \frac{d \operatorname{th} \frac{f_1}{2} \wedge \dots \wedge d \operatorname{th} \frac{f_n}{2}}{\operatorname{th} \frac{f_1}{2} \cdot \ldots \cdot \operatorname{th} \frac{f_n}{2}}.$$

Ясно, что он сходится абсолютно при $\operatorname{Re} s_j < 1$ для всех $j = 1, \dots, n$. Следовательно, теорему 2 можно применить к $I(s)$, поскольку нужно учитывать мероморфность функций $\operatorname{th}(f_j/2)$. Так как

$$\operatorname{sh} \frac{f_j}{2} = \frac{f_j}{2} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{f_j^2}{\pi^2 (2k)^2}\right), \quad \operatorname{ch} \frac{f_j}{2} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{f_j^2}{\pi^2 (2k+1)^2}\right),$$

то точки a, входящие в правую часть формулы (10), удовлетворяют системе (17) с $c_j = \pi k_j i$, где $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Обозначим через $N_{f-\pi ki}$ множество корней системы $f(z) = \pi ki$. Из следствия 1 и замечания после него получаем

$$I(s) = \frac{\pi^n}{\sin \pi s_1 \dots \sin \pi s_n} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \sum_{a\in N_{f-\pi ki}} (-1)^{o(k)}(-a)^{-s},$$

где $o(k)$ — число нечетных компонент мультииндекса k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
2. *Быков В. И., Кытманов А. М., Лазман М. З.* Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов. Новосибирск: Наука, 1991.
3. *Цих А. К.* Многомерные вычеты и их приложения. Новосибирск: Наука, 1988.
4. *Passare M., Tsikh A., Zhdanov O.* A multidimensional Jordan residue lemma with application to Mellin–Barns integrals // Aspects Math. E. 1994. V. 26. P. 233–242.

Статья поступила 12 июля 2005 г., окончательный вариант — 7 июля 2007 г.

Кытманов Александр Мечиславович, Мысливец Симона Глебовна
Сибирский федеральный университет, факультет математики и информатики,
пр. Свободный 79, СФУ, Красноярск 660041
kytmanov@lan.krasu.ru, simona@lan.krasu.ru