Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 510.5+519.7

О ВЫЧИСЛИМЫХ ФОРМАЛЬНЫХ ПОНЯТИЯХ В ВЫЧИСЛИМЫХ ФОРМАЛЬНЫХ КОНТЕКСТАХ

А. С. Морозов, М. А. Львова

Аннотация: Вводятся и изучаются вычислимые формальные контексты и вычислимые формальные понятия в них. Даны примеры вычислимых формальных контекстов, в которых вычислимые понятия не образуют решетки. Изучаются сложностные вопросы формальных понятий в вычислимых формальных контекстах. В частности, сформулированы условия, достаточные для того, чтобы вычислимость или невычислимость формального понятия следовала из его теоретико-решеточных свойств. Доказана теорема плотности, показывающая, что в топологии Кантора каждое формальное понятие может быть аппроксимировано вычислимыми понятиями. Показано, что не все формальные понятия имеют теоретико-решеточные аппроксимации в виде точных верхних или нижних граней семейств вычислимых формальных понятий.

Ключевые слова: формальный концептуальный анализ, вычислимый формальный контекст, вычислимое понятие, вычислимая модель.

Анализ формальных понятий как направление в математике введен профессором Рудольфом Вилле и в дальнейшем существенно развит им, его коллегами и учениками. Анализ формальных понятий можно, в частности, рассматривать как метод анализа и графической интерпретации знаний, представленных с помощью двумерных таблиц «объект-свойство». Идеи этого направления оказались настолько привлекательными, что анализ формальных понятий выдвигается некоторыми его апологетами на роль одного из основных методологических принципов в построении теорий (в том числе и математических), в описании окружающего мира, а также в изложении математики. С основными понятиями и идеями этой теории можно познакомиться по монографии [1]. Оставляя в стороне дискуссию по поводу преимуществ и недостатков этого подхода, в данной работе мы начинаем изучение его алгоритмического содержания; при этом следует сразу уточнить, что в отличие от уже имеющихся направлений, в которых изучаются временная и емкостная сложности алгоритмов для конечных формальных контекстов, нас будет интересовать анализ формальных понятий с точки зрения классической и обобщенной теории вычислимости.

Знания по теории вычислимости, необходимые для понимания данной работы, содержатся в обычном университетском курсе, за исключением нескольких особых случаев, в которых необходима гиперарифметика и тьюрингова сводимость. Все эти понятия и идеи можно найти, например, в [2] или [3].

Напомним, что любая тройка $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models \rangle$, где $\models \subseteq G \times M$, называется *формальным контекстом.* Множества G и M понимаются соответственно как

Работа первого автора поддержана международным грантом DFG–РФФИ (проект РФФИ №05–01–04003–ННИОа, DFG №436 RUS 113/829/0–1), грантом РФФИ (05–01–00819–а) и грантом Научные школы (НШ–4413.2006.1).

семейство объектов и семейство их свойств. Отношение $\models$ содержит информацию о выполнимости свойств из M на объектах из G, т. е. $a \models b$ означает, что a удовлетворяет свойству b. Если $X \subseteq G$ и $Y \subseteq M$, то пара $\alpha = \langle X, Y \rangle$ называется *формальным понятием*, если X является множеством всех объектов, удовлетворяющих всем свойствам из Y, и Y — множество всех свойств, которые справедливы для всех объектов из X. В этом случае X называется *объемом* а Y — *содержанием* понятия α. Формальные понятия естественно упорядочиваются следующим образом: $\langle X_0, Y_0 \rangle \leq \langle X_1, Y_1 \rangle \;\Leftrightarrow\; X_0 \subseteq X_1$, что также эквивалентно $Y_1 \subseteq Y_0$. Все формальные понятия для $\mathfrak{F}$ образуют полную решетку, обозначаемую нами через $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$. Также известно, что каждая полная решетка $\Omega = \langle L, \leq \rangle$ изоморфна подходящей решетке вида $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$, например, для $\mathfrak{F} = \langle L, L, \leq \rangle$ [1].

Мы предполагаем, что в формальном контексте множества объектов и их свойств некоторым образом занумерованы натуральными числами или ассоциированы (отождествлены) с ними. При этом объекты и их свойства вместе со своими номерами могут быть заданы изначально или же могут порождаться некоторой пошаговой процедурой. В последнем случае можно присваивать натуральные числа объектам и их свойствам в порядке их возникновения (порождения): первый объект получит номер 0, второй — номер 1, и т. д. В качестве простого примера можно рассмотреть множество всех натуральных чисел $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ и множество свойств $\{P_n \mid n \in \omega\}$, определенных следующим условием:

$$m \text{ удовлетворяет } P_n \;\Leftrightarrow\; n \text{ делит } m.$$

В рамках вышеупомянутого кодирования объектов и их свойств натуральными числами является естественным предположение о том, что по данному объекту (точнее, его номеру) и его свойству (точнее, номеру этого свойства) можно эффективно с помощью некоторого единого алгоритма проверять, удовлетворяет объект данному свойству или нет. Понимая, что это выполнено не всегда, в данной работе мы тем не менее ограничиваемся рассмотрением только таких ситуаций. На первых шагах в изучении вычислимых формальных контекстов нам также представляется разумным в первую очередь заинтересоваться достаточно просто определяемыми формальными понятиями, а именно понятиями, объем и содержание которых вычислимы.

Таким образом, мы приходим к следующему основному определению данной работы.

Определение. Тройка $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models \rangle$ называется *вычислимым* (*арифметическим, гиперарифметическим*) *формальным контекстом*, если множества G и M являются вычислимыми (арифметическими, гиперарифметическими) множествами натуральных чисел и отношение $\models \subseteq G \times M$ вычислимо (арифметическое, гиперарифметическое).

Формальное понятие $\alpha = \langle A, B \rangle$ для $\mathfrak{F}$ называется *вычислимым* (*арифметическим, гиперарифметическим*) *формальным понятием*, если оба множества A и B (т. е. его объем и содержание) вычислимы (арифметические, гиперарифметические).

Для формального контекста $\mathfrak{F}$ семейство всех его вычислимых формальных понятий обозначаем через $\mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$. Ясно, что $\mathscr{L}_c(\mathfrak{F}) \subseteq \mathscr{L}(\mathfrak{F})$.

Будем также использовать следующие простые формы записи, аналогичные соответствующим формам из теории моделей: если $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models \rangle$ — формальный контекст и $A \subseteq G$, $B \subseteq M$, $a \in A$, $b \in B$, то полагаем

$$A \models B \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in A\, \forall y \in B\, (x \models y);$$

$$a \models B \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall y \in B\, (a \models y); \quad A \models b \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in A\, (x \models b);$$

$$\mathtt{Mod}\,(A) \overset{df}{=} \{g \in G \mid g \models A\} \text{ (все модели для } A);$$

$$\mathtt{Th}\,(B) \overset{df}{=} \{m \in M \mid B \models m\} \text{ (теория } B).$$

Иногда мы будем опускать определение «формальный» перед словами «контекст» или «понятие».

Область определения и область значений функции f будут обозначаться через $\delta(f)$ и $\rho(f)$ соответственно.

Первый естественный вопрос, на который мы отвечаем в настоящей работе: *образуют ли вычислимые формальные понятия решетку*? Ответ будет отрицательным.

Теорема 1. *Существуют вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F}$ и $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$ такие, что выполнены следующие условия:*

1) $\sup\{\alpha_0, \alpha_1\} \notin \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$;

2) *множество $\{\beta \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F}) \mid \beta \geq \alpha_0$ и $\beta \geq \alpha_1\}$ не имеет наименьшего элемента.*

Таким образом, α_0 и α_1 не имеют наименьшей верхней грани среди вычислимых формальных понятий для $\mathfrak{F}$. Отсюда следует, что для этого формального контекста $\mathfrak{F}$ множество $\mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$ с унаследованным упорядочением не образует решетки и тем более не образует подрешетки в $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Определим вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F} = \langle \omega, \omega, \models \rangle$ следующим образом. Зафиксируем два разбиения $\omega = A_0 \cup B \cup A_1 \cup C$, $\omega = A'_0 \cup B' \cup A'_1$, где $A_0, B, A_1, C, A'_0, B', A'_1$ — бесконечные вычислимые подмножества ω. Зафиксируем также частичную вычислимую разнозначную функцию f с областью определения B', область значений которой является невычислимым подмножеством в C. Положим

$$\models \overset{df}{=} [A_0 \times (A'_0 \cup B')] \cup [A_1 \times (A'_1 \cup B')] \cup [(C \times B') \setminus f^{-1}].$$

Легко убедиться в том, что $\models$ вычислимо. Таким образом, $\mathfrak{F} = \langle \omega, \omega, \models \rangle$ — вычислимый формальный контекст. Определим $\alpha_0 = \langle A_0, A'_0 \cup B' \rangle$, $\alpha_1 = \langle A_1, A'_1 \cup B' \rangle$. Непосредственно проверяется, что $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$.

Для доказательства (1) достаточно заметить, что

$$\alpha = \langle A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus \rho(f)), B' \rangle = \sup\{\alpha_0, \alpha_1\} \notin \mathscr{L}_c(\mathfrak{F}).$$

Для доказательства (2) нам необходимы две леммы.

Лемма 1. *Для всех $S \subseteq B'$ пара $\alpha_S = \langle A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus f[S]), S \rangle$ принадлежит множеству $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. Необходимо проверить следующие два равенства между множествами: $\{x \mid x \models S\} = A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus f[S])$ и $\{x \mid A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus f[S]) \models x\} = S$. Проверим первое равенство. Пусть $x \models S$. Тогда x, очевидно, не принадлежит B. Пусть теперь $x \in f[S]$. Тогда $f^{-1}(x) \in S$. По определению $\models$ имеем $x \not\models f^{-1}(x)$. Отсюда $x \not\models S$; противоречие. Таким образом, $x \in A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus f[S])$. Обратное включение очевидно.

Проверим второе равенство. Предположим, что

$$A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus f[S]) \models x. \tag{1}$$

Тогда, очевидно, $x \notin A_0' \cup A_1'$. Таким образом, $x \in B'$. Если $x \notin S$, то $f(x) \in C \setminus f[S]$ ввиду разнозначности f. Далее, по определению $\models$ имеем $f(x) \not\models x$, что противоречит (1). Остается единственный случай $x \in S$. Включение $\supseteq$ очевидно. Лемма доказана.

Зафиксируем обозначение $\alpha_S = \langle A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus f[S]), S\rangle$. Легко проверить, что все формальные понятия для $\mathfrak{F}$, большие или равные α_0 и α_1, имеют вид α_S для подходящего множества $S \subseteq B'$.

Лемма 2. *Для каждого $S \subseteq B'$ пара α_S принадлежит множеству $\mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$ тогда и только тогда, когда $f[S]$ вычислимо.*

Доказательство. Сначала предположим, что $\alpha_S \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$. Это означает, что множество $A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus f[S])$ вычислимо, откуда получаем, что множество

$$C \setminus f[S] = (A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus f[S])) \setminus (A_0 \cup A_1)$$

вычислимо. Отсюда следует, что множество $f[S] = C \setminus (C \setminus f[S])$ также вычислимо.

Докажем оставшуюся часть леммы. Пусть $f[S]$ вычислимо. Вычислимость множества $A_0 \cup A_1 \cup (C \setminus f[S])$ немедленно вытекает из вычислимости A_0, A_1 и C. Остается заметить, что $x \in S \Leftrightarrow x \in B' \wedge f(x) \in f[S]$, а это приводит к вычислимости S. Таким образом, α_S вычислимо. Лемма доказана.

Предположим, что

(∗) *некоторое понятие $\gamma \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$ является наименьшим элементом в множестве* $\{\beta \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F}) \mid \beta \geq \alpha_0$ и $\beta \geq \alpha_1\}$.

Тогда γ имеет вид $\gamma = \alpha_S$ для подходящего $S \subseteq B'$.

По лемме 2 множество $f[S]$ вычислимо. Ясно, что $S \neq B'$, т. е. $S \subset B'$; в противном случае множество $f[S]$ было бы вычислимым. Отсюда следует, что любое множество $f[S \cup \{s\}]$, где $s \in B' \setminus S$, тоже вычислимо. По лемме 2 получаем, что все понятия вида $\alpha_{S\cup\{s\}}$ вычислимы. Но $\gamma = \alpha_S > \alpha_{S\cup\{s\}} > \alpha_0,\ \alpha_1$, что противоречит предположению (∗). □

Меняя местами в вышеприведенном примере объем и содержание понятия, получим пару вычислимых формальных понятий, у которых нет наибольшей нижней грани.

Определим канторовскую топологию на формальных понятиях следующим образом.

Пусть $\mathfrak{F} = \langle G, M, \models\rangle$ — формальный контекст. Для всех пар частичных функций $f_0 : G \to \{0,1\}$, $f_1 : M \to \{0,1\}$ с конечными областями определения положим $U_{f_0,f_1} = \{\langle X, Y\rangle \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}) \mid f_0 \subseteq \chi_X \wedge f_1 \subseteq \chi_Y\}$, где χ_X — характеристическая функция подмножества X в G и χ_Y — характеристическая функция подмножества Y в M соответственно.

Множество всех множеств вида U_{f_0,f_1} образует базу для T_2-топологии, которая будет в дальнейшем обозначаться через τ.

Пару таких функций f_0, f_1 назовем *регулярной*, если они являются характеристическими функциями понятия $\left\langle f_0^{-1}(1), f_1^{-1}(1)\right\rangle$ в формальном контексте, образованном элементами их областей определения, более точно, если

$$\left\langle f_0^{-1}(1), f_1^{-1}(1)\right\rangle \in \mathscr{L}(\langle \delta(f_0),\ \delta(f_1),\ \models\restriction (\delta(f_0) \times \delta(f_1))\rangle).$$

Это свойство эквивалентно следующей паре условий:

$$f_0^{-1}(1) = \{x \in \delta(f_0) \mid x \models f_1^{-1}(1)\}, \quad f_1^{-1}(1) = \{x \in \delta(f_1) \mid f_0^{-1}(1) \models x\}.$$

Если пара f_0, f_1 регулярна, то соответствующая окрестность U_{f_0,f_1} также будет называться *регулярной.*

Предложение 1. *Регулярные окрестности образуют базу топологии* τ.

Доказательство. Требуется показать, что если $\alpha = \langle X, Y\rangle \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ и $\alpha \in U_{f_0,f_1}$, то существует регулярная окрестность U такая, что $\alpha \in U \subseteq U_{f_0,f_1}$. Поскольку $f_0 \subseteq \chi_X$ и $f_1 \subseteq \chi_Y$, мы можем расширить f_0 до f_0^* посредством добавления для каждого $y \in f_1^{-1}(0)$ новой пары $\langle x, 1\rangle$ такой, что $x \in X$ и $x \not\models y$. Потом мы аналогичным образом расширим f_1 до f_1^* добавлением для каждого $y \in f_0^{-1}(0)$ новой пары $\langle y, 1\rangle$ такой, что $y \in Y$ и $x \not\models y$. Определенная таким образом пара f_0^*, f_1^* будет регулярной, и $\alpha \in U_{f_0^*,f_1^*} \subseteq U_{f_0,f_1}$. $\square$

Теорема 2 (теорема плотности). *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст. Тогда семейство $\mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$ плотно в $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$.*

Доказательство. По предложению 1 достаточно показать, что каждая регулярная окрестность в $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ содержит вычислимое понятие. Пусть U_{f_0,f_1} — регулярная окрестность. Мы будем шаг за шагом расширять функции f_0 и f_1 таким образом, чтобы полученные в результате функции оказались вычислимыми характеристическими функциями соответственно для объема и содержания понятия α. Отсюда будет следовать вычислимость понятия α. Поскольку мы начали с f_0 и f_1, получим $\alpha \in U_{f_0,f_1}$, что и требовалось.

Перейдем к описанию построения. Результатом каждого шага t будут две конечных функции f_0^t и f_1^t.

Построение.

Шаг 0. Полагаем $f_0^0 = f_0$ и $f_1^0 = f_1$.

Шаг $t+1$. При четном t выполняем следующее (*расширение* f_0^t). Возьмем минимальное $x \notin \delta\big(f_0^t\big)$. Если для всех $y \in \big(f_1^t\big)^{-1}(1)$ условие $x \models y$ выполнено, то полагаем $f_0^{t+1} = f_0^t \cup \{\langle x, 1\rangle\}$, в противном случае — $f_0^{t+1} = f_0^t \cup \{\langle x, 0\rangle\}$.

При нечетном t выполняем следующее (*расширение* f_1^t). Возьмем минимальное $y \notin \delta\big(f_1^t\big)$. Если для всех $x \in \big(f_0^{t+1}\big)^{-1}(1)$ условие $x \models y$ выполнено, то положим $f_1^{t+1} = f_1^t \cup \{\langle y, 1\rangle\}$, в противном случае — $f_1^{t+1} = f_1^t \cup \{\langle x, 0\rangle\}$.

Описание построения закончено.

Можно проверить по индукции, что каждая пара f_0^t, f_1^t регулярна и

$$f_i = f_i^0 \subseteq f_i^1 \subseteq f_i^2 \subseteq \ldots \subseteq f_i^k \subseteq \ldots, \quad i = 0, 1.$$

Определим $f_i^* = \bigcup\limits_{t\in\omega} f_i^t$ для $i = 0, 1$. Легко убедиться, что пара

$$\alpha = \langle (f_0^*)^{-1}(1), (f_1^*)^{-1}(1)\rangle$$

является понятием в $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ и что $\alpha \in U_{f_0,f_1}$, поскольку выполнено $f_i \subseteq f_i^*$ для $i = 0, 1$. Из эффективности описанного выше построения следует, что функции f_i^*, $i = 0, 1$, вычислимы, откуда $\alpha \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$. $\square$

Неформально теорема плотности говорит о том, что каждое формальное понятие в вычислимом формальном контексте можно аппроксимировать в топологии τ вычислимыми понятиями.

Приведем условие, которое позволит нам в ряде случаев распознавать вычислимые понятия лишь на основе их теоретико-решеточных свойств.

Для элемента $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ положим $\check{\alpha} = \{x \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}) \mid \alpha \leq x\}$ и $\hat{\alpha} = \{x \mid x \leq \alpha\}$.

Напомним, что *антицепью* в частично упорядоченном множестве называется любое его подмножество, состоящее из попарно несравнимых элементов.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст, и предположим, что $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *α принадлежит конечной максимальной антицепи;*
2) *существует конечное семейство элементов $\beta_0, \dots, \beta_k \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ таких, что $\beta_i > \alpha$ для всех $i = 0, \dots, k$ и $\check{\alpha} = \{\alpha\} \cup \check{\beta}_0 \cup \ldots \cup \check{\beta}_k$;*
3) *существует конечное семейство элементов $\gamma_0, \dots, \gamma_\ell \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ таких, что $\gamma_i < \alpha$ для всех $i = 0, \dots, \ell$ и $\hat{\alpha} = \{\alpha\} \cup \widehat{\gamma}_0 \cup \ldots \cup \widehat{\gamma}_\ell$.*

Тогда α — вычислимое понятие в $\mathfrak{F}$.

Доказательство. Покажем, что множество $\{\alpha\}$ при этих условиях обязано быть открытым. Сначала покажем, как отделить его от любого множества $\check{\delta} \cup \hat{\delta}$, где α и δ несравнимы. Пусть A — объем понятия α и D — объем понятия δ. Поскольку α и δ несравнимы, оба утверждения $A \subseteq D$ и $D \subseteq A$ ложны, поэтому мы можем зафиксировать $x_0 \in A \setminus D$ и $x_1 \in D \setminus A$. Легко проверить, что для $f = \{\langle x_0, 1\rangle, \langle x_1, 0\rangle\}$ справедливо $\alpha \in U_{f,\varnothing}$ и для всех $\pi \in \check{\delta} \cup \hat{\delta}$ выполнено $\pi \notin U_{f,\varnothing}$.

Если β_i — один из элементов, упомянутых в условии, и x принадлежит объему понятия β_i, но не принадлежит объему α, то $\alpha \in U_{f,\varnothing}$, где $f = \{\langle x, 0\rangle\}$, и для всех $\pi \in \check{\beta}_i$ выполнено $\pi \notin U_{f,\varnothing}$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что можно отделить α от всех конусов $\widehat{\gamma}_i$.

Поскольку требуется всего лишь конечное число окрестностей для отделения α от всех остальных элементов из $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$, пересечение этих окрестностей является открытым множеством, состоящим из единственного элемента α. Отсюда по теореме плотности получаем, что α — вычислимое понятие. $\square$

Замечание. Из доказательства следует, что условия 2 и 3 в теореме 3 можно соответственно заменить следующими более слабыми условиями:

2′) существует конечная последовательность натуральных чисел $b_0, \dots, b_k$ такая, что все b_i не принадлежат объему понятия α, и если $\beta > \alpha$, то объем понятия β содержит одно из этих b_i, $i = 0, \dots, k$;

3′) существует конечная последовательность натуральных чисел $c_0, \dots, c_\ell$ такая, что все c_i принадлежат объему понятия α, и если $\beta < \alpha$, то объем понятия β не содержит один из элементов c_i, $i = 0, \dots, \ell$.

Несмотря на то, что эти условия, видимо, являются более слабыми, они не носят структурного характера, т. е. они обращаются к чему-то большему, чем тип изоморфизма элемента α в $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$.

Теперь мы легко можем получить некоторые следствия.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст. Если множество $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ конечно, то все его формальные понятия вычислимы.*

Приведем еще один пример, когда мы можем утверждать, что понятие вычислимо, пользуясь лишь структурными свойствами $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$. Читатель может легко продолжить серию таких примеров.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — вычислимый формальный контекст. Если решетка $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ изоморфна решетке $\langle \omega+1; < \rangle$, то в ней все понятия, за исключением, быть может, максимального, вычислимы.*

Можно показать, что можно сделать максимальное понятие из следствия 2 как вычислимым, так и невычислимым. Рассмотрим вычислимую разнозначную функцию $f : \omega \to \omega$ и определим формальный контекст $\mathfrak{F}_f = \langle \omega, \omega, \models \rangle$ следующим образом: $x \models y \overset{df}{\Leftrightarrow} y \notin \{f(0), \dots, f(x)\}$. Непосредственно убеждаемся, что все формальные понятия для $\mathfrak{F}$ имеют вид $\langle S, \omega \setminus f[S] \rangle$, где S — начальный сегмент ω, т. е. одно из множеств $\varnothing$, $\{0\}$, $\{0,1\}$, $\{0,1,2\}$, $\dots$, ω. Отсюда следует, что решетка понятий $\mathscr{L}(\mathfrak{F}_f)$ изоморфна $\langle \omega+1, < \rangle$. Наибольший элемент этой решетки, равный $\langle \omega, \omega \setminus f[\omega] \rangle$, вычислим тогда и только тогда, когда множество $\rho(f) = f[\omega]$ вычислимо; обе возможности при этом реализуются на соответствующих функциях f.

Можно привести пример, показывающий, что вычислимость понятий может зависеть от вычислимого представления формального контекста. Хорошо известно [4], что существуют два вычислимых упорядочения $\leq_0$ и $\leq_1$, имеющие тип $\omega + \omega^*$ и такие, что начальный сегмент ω вычислим в $\leq_0$, но не вычислим в $\leq_1$. Рассмотрим вычислимые формальные контексты $\mathfrak{F}_i = \langle \omega, \omega, \leq_i \rangle$, $i = 0, 1$. Легко видеть, что $\mathscr{L}(\mathfrak{F}_i) \cong \omega + 1 + \omega^*$ и в $\mathscr{L}(\mathfrak{F}_0)$ наименьший предельный элемент α (соответствующий 1 в середине суммы $\omega + 1 + \omega^*$) вычислим, в то время как соответствующий элемент в $\mathscr{L}(\mathfrak{F}_1)$ не вычислим. По теореме 3 все остальные понятия решеток $\mathscr{L}(\mathfrak{F}_i)$, $i = 0, 1$, будут вычислимы.

Далее мы предполагаем, что читатель имеет некоторое представление об обобщенной вычислимости (см, например, [2, 5]).

Приведенный пример может быть обобщен следующим образом. В нем под тьюринговой степенью понятия $\langle A, B \rangle$ будет пониматься степень $\deg(A) \oplus \deg(B)$.

Предложение 2. *Для каждого конструктивного ординала α существует вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F}$, имеющий в точности одно формальное понятие тьюринговой степени $\mathbf{0}^{(\alpha)}$, остальные формальные понятия которого вычислимы.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть только нетривиальный случай $\alpha \neq 0$. Рассмотрим перечислимое дерево $T \subseteq \omega^\omega$, имеющее в точности одну бесконечную ветвь тьюринговой степени $\mathbf{0}^{(\alpha)}$. Такие деревья существуют (см. [2]). Без потери общности можно считать, что это дерево имеет следующее свойство:

$$\forall s \in T\, \forall i, j\ (s\check{\ }i \in T \ \Leftrightarrow\ s\check{\ }j \in T).$$

Для $x, y \in T$ запись $x \sqsubseteq y$ будет обозначать, что x — начальный сегмент y. Через s_i будем обозначать i-й элемент из $s \in T$. Рассмотрим так называемое *упорядочение Клини — Брауэра* на элементах T, определенное как

$$s <_{\mathrm{KB}} u \Leftrightarrow (u \sqsubseteq s) \vee [\neg(u \sqsubseteq s) \wedge \neg(s \sqsubseteq u) \\ \wedge (s_i < u_i,\ \text{для наименьшего } i \text{ такого, что } s_i \neq u_i)].$$

Пусть $\leq_{\mathrm{KB}} = <_{\mathrm{KB}} \cup \{\langle x, x \rangle \mid x \in T\}$. Естественным образом кодируя элементы дерева T натуральными числами, рассмотрим вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F} = \langle T, T, \leq_{\mathrm{KB}} \rangle$. Легко видеть, что это упорядочение изоморфно счетному линейному порядку вида $L_0 + L_1$, где $L_0 = \ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \cdots$ и $L_1 = \cdots + \ell'_2 + \ell'_1 + \ell'_0$, и все порядки ℓ_i и ℓ'_i, $i = 0, 1, 2, \dots$, являются вполне упорядочениями. Отсюда следует, что решетка $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ изоморфна линейному порядку вида $L_0 + 1 + L_1$. Пусть β будет понятием, соответствующим среднему 1 в этой сумме. Используя единственную бесконечную ветвь T в качестве оракула, можно вычислять объем и содержание понятия β. С другой стороны, если мы имеем оракул, позволяющий вычислять объем и содержание понятия β, мы можем перечислить единственную бесконечную ветвь s^* дерева T, используя следующее свойство.

Пусть A — объем понятия β и B — его содержание. Тогда множество всех элементов T, образующих s^*, совпадает с множеством

$$\{s \mid \exists s_0\, \exists s_1 (s \sqsubseteq s_0 \wedge s \sqsubseteq s_1 \wedge s_0 \in A \wedge s_1 \in B)\}.$$

Это дает нам алгоритм для вычисления s^* с оракулами A и B. Поскольку $\deg(s^*) = \mathbf{0}^{(\alpha)}$, видим, что тьюрингова степень β равна $\mathbf{0}^{(\alpha)}$. Все остальные элементы $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ вычислимы по построению. $\square$

Предложение 3. *Существуют вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F}$ и его формальное понятие $a \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ такие, что для всех гиперарифметических формальных контекстов $\mathfrak{F}^*$ и изоморфизмов $\varphi : \mathscr{L}(\mathfrak{F}) \xrightarrow{\text{на}} \mathscr{L}(\mathfrak{F}^*)$ формальное понятие $\varphi(a)$ не является гиперарифметическим.*

Доказательство. Нам понадобятся некоторые дальнейшие факты из обобщенной теории вычислимости. Обозначим через ω_1^{CK} наименьший ординал, не изоморфный вычислимому линейному порядку. Известно, что существует вычислимый линейный порядок $\preccurlyeq$ такой, что $\langle \omega; \preccurlyeq\rangle \cong \omega_1^{\mathrm{CK}} + \left(\omega_1^{\mathrm{CK}} \times \eta\right)$ (см. [5] или [6]). Пусть $\mathfrak{F} = \langle \omega, \omega, \preccurlyeq\rangle$. Решетка $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ имеет порядковый тип $\omega_1^{\mathrm{CK}} + 1 + L$ для подходящего линейного порядка L. Определим $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ как единственный элемент со свойством $\hat{\alpha} \cong \omega_1^{\mathrm{CK}} + 1$.

Предположим, что $\mathfrak{F}^*$ — гиперарифметический формальный контекст и что $\varphi : \mathscr{L}(\mathfrak{F}^*) \xrightarrow{\text{на}} \mathscr{L}(\mathfrak{F})$ является изоморфизмом. Предположим, что понятие $\varphi(\alpha)$ гиперарифметическое. Обозначим его объем через A. Тогда множество A — гиперарифметическое подмножество ω и все формальные понятия, меньшие его, образуют цепь типа ω_1^{CK}. Заметим, что для всех $x \in A$ множество $\mathtt{Mod}\,(\mathtt{Th}\,(x))$ является объемом наименьшего формального понятия, содержащего x. Определим на A квазиупорядочение $\lhd$ следующим образом:

$$x \lhd y \Leftrightarrow \mathtt{Mod}\,(\mathtt{Th}\,(x)) \subseteq \mathtt{Mod}\,(\mathtt{Th}\,(y)).$$

Из определений следует, что $\lhd$ является Δ_1^1-отношением, обычная факторизация которого по Δ_1^1-эквивалентности $(x \lhd y) \wedge (y \lhd x)$ имеет порядковый тип ω_1^{CK} или $\omega_1^{\mathrm{CK}}+1$. Отсюда уже можно легко построить Δ_1^1-упорядочение по типу ω_1^{CK}, которого, как хорошо известно, не существует (см. [2]); противоречие. $\square$

Используя результаты о совершенном подмножестве в дескриптивной теории множеств (см., например, [5, гл. IV]), легко получить следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — гиперарифметический формальный контекст и его решетка формальных понятий $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ счетна. Тогда все формальные понятия этого контекста гиперарифметические.* $\square$

Покажем, что, несмотря на теорему плотности, которая говорит, что в канторовской топологии любое формальное понятие аппроксимируемо вычислимыми формальными понятиями, в общем случае не следует ожидать, что каждое формальное понятие может быть аппроксимировано вычислимыми понятиями *в теоретико-решеточном смысле,* так как не каждое формальное понятие можно представить в виде точной верхней или нижней грани некоторого семейства вычислимых понятий.

Теорема 5. *Существует вычислимый формальный контекст $\mathfrak{F}$, в котором множество*

$$\{\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}) \mid \alpha \text{ несравнимо со всеми } \gamma \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})\}$$

имеет мощность континуума. Отсюда следует, что каждый элемент этого множества не может быть представлен ни как точная верхняя, ни как точная нижняя грань никакого семейства вычислимых формальных понятий.

Доказательство. Зафиксируем разбиение множества ω на два бесконечных вычислимых множества A и B: $\omega = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$. Зафиксируем вычислимое разнозначное отображение $f : A \to B$, для которого множество $B \setminus \rho(f)$ не вычислимо.

Теперь мы полагаем $\mathfrak{F} = \langle \omega, \omega, \models \rangle$, где $\models = \omega^2 \setminus (f \cup f^{-1})$.

Лемма 3. *Все понятия из $\mathscr{L}(\mathfrak{F})$ исчерпываются понятиями вида*

$$\beta_{S_0,S_1} = \langle\, S_0 \cup [B \setminus \rho(f)] \cup [A \setminus f^{-1}(S_1)],\; S_1 \cup [B \setminus \rho(f)] \cup [A \setminus f^{-1}(S_0)] \,\rangle$$

для подходящих подмножеств $S_0, S_1 \subseteq \rho(f)$.

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Рассмотрим произвольное иммунное множество $S \subseteq \rho(f)$, т. е. бесконечное множество, не содержащее бесконечных вычислимо перечислимых множеств. В теории вычислимости известен ряд способов построения иммунных множеств, но, учитывая, что среди предполагаемых читателей этой работы будут не только специалисты по вычислимости, а также что все известные авторам ссылки на существование 2^ω иммунных множеств содержатся в упражнениях, приводим здесь краткое изложение идей такого построения.

Напомним сначала идею построения некоторого иммунного множества S. Это можно сделать следующей пошаговой конструкцией. Зафиксируем некоторую нумерацию $A_0, A_1, \ldots$ всех бесконечных вычислимо перечислимых подмножеств в $\rho(f)$ (существование каких-либо дополнительных алгоритмов для такой нумерации не предполагается). В начале построения предполагаем членство всех элементов из $\rho(f)$ в множестве S неопределенным. На каждом шаге i мы выбираем какой-либо элемент $x_i \in A_i$, для которого членство в S на данный момент не определено, и полагаем $x_i \notin S$; после этого фиксируем членство в S для всех элементов множества $\{0, 1, \ldots, x_i\} \cap \rho(f)$, для которых оно на данный момент не определено (например, помещаем их в S). Для обеспечения бесконечности множества S добавим к нему некоторый новый элемент из $\rho(f)$. После ω шагов множество S будет полностью определено и для каждого $i \in \omega$ будет выполнено $x_i \in A_i \setminus S$; таким образом, $A_i \subseteq S$ не может быть истинным ни для какого $i \in \omega$.

Развивая данную конструкцию, можно одновременно построить 2^ω различных иммунных множеств. В самом деле, на каждом шаге можно выбирать два различных элемента $x'_i, x''_i \in A_i$ и добавлять один из них в S, а другой в $\rho(f) \setminus S$, или наоборот. Ассоциируя последовательность совершенных нами выборов из вышеуказанных двух возможностей с бесконечной ветвью бинарного дерева, придем к тому, что иммунные множества S, получаемые вдоль различных таких ветвей, попарно различны. Отсюда следует, что множество всех построенных нами подмножеств имеет мощность континуума.

Пусть S — любое конечное или иммунное подмножество в $\rho(f)$ и $\alpha = \beta_{S,S}$. Предположим, что некоторое понятие $\beta \in \mathscr{L}_c(\mathfrak{F})$ обладает свойством $\beta \leq \alpha$. Тогда по лемме 3 существуют $S_0, S_1 \subseteq \rho(f)$ такие, что $\beta = \beta_{S_0,S_1}$. Условие $\beta \leq \alpha$ дает нам $S_0 \subseteq S$. Поскольку понятие β вычислимо, S_0 является вычислимо перечислимым подмножеством в S, которое по выбору S должно быть конечным. Таким образом, пересечение объема понятия β с вычислимым множеством B равно $[\omega \setminus \rho(f)] \cup S_0$. Так как объем понятия β вычислим, это множество вычислимо. С другой стороны, оно отличается от невычислимого множества $\rho(f)$ только на элементах конечного множества S_0. Отсюда получаем, что это множество не вычислимо; противоречие.

Чтобы доказать отсутствие вычислимых понятий $\beta = \beta_{S_0,S_1}$ со свойством $\beta \geq \alpha$, достаточно заметить, что в этом случае будет справедливо $S_1 \subseteq S$, и потом применить симметричные рассуждения.

Отметим, что равенство понятий $\beta_{S_0,S_1} = \beta_{S'_0,S'_1}$ эквивалентно $S_0 = S'_0 \wedge S_1 = S'_1$. Отсюда следует, что существует по меньшей мере 2^ω требуемых различных формальных понятий вида $\beta_{S,S}$. $\square$

Замечание. Если мы рассмотрим произвольное конечное множество S, то получим формальное понятие $\beta_{S,S}$, вычислимое в $\mathbf{0}'$ (более того, его объем и содержание будут вычислимо коперечислимыми) и не сравнимое ни с каким вычислимым понятием для $\mathfrak{F}$. Таким образом, существуют достаточно простые примеры понятий, не аппроксимируемых никакими вычислимыми понятиями в теоретико-решеточном смысле.

Теоремы 1 и 2 настоящей работы доказаны соавторами совместно, остальные результаты получены А. С. Морозовым.

Благодарность первого автора. Я благодарю проф. д-ра Карла Эриха Вольффа за замечательную рабочую атмосферу, созданную им во время моего визита в Дармштадский технический университет, когда была получена большая часть этих результатов, а также всех участников международного проекта COMO DFG-РФФИ за обсуждения и ценные предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ganter B., Wille R.* Formal concept analysis: Mathematical foundations. Berlin; New York: Springer-Verl., 1999.
2. *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw-Hill Book Comp., 1967.
3. *Handbook* on mathematical logic / J. Barwise, editor. Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland, 1977.
4. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
5. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
6. *Sacks G. E.* Higher recursion theory. Heidelberg: Springer-Verl., 1990.

Статья поступила 26 апреля 2006 г.

Морозов Андрей Сергеевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru

Львова Мария Александровна
Новосибирский гос. университет, Пирогова 2, Новосибирск 630090
lvova@gorodok.net