Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.518

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

Р. Ойнаров

Аннотация: Вводятся расширяющиеся классы интегральных операторов вольтерровского типа. Для операторов из этих классов устанавливаются критерии ограниченности и компактности в пространствах Лебега.

Ключевые слова: интегральный оператор, интегральный оператор вольтерровского типа, оператор дробного интегрирования, ограниченность, компактность.

1. Постановка задачи. Основной целью работы является получение оценок

$$\|Kf\|_{q,\mu} \le c\|f\|_p, \quad f \in L_p(I), \tag{1}$$

для широкого класса интегральных операторов вида

$$Kf(x) = \int_0^x K(x,s)f(s)\,ds, \quad x > 0, \tag{2}$$

$$K^*g(s) = \int_s^\infty K(x,s)g(x)\,dx, \quad s > 0, \tag{3}$$

с неотрицательным ядром $K(\cdot,\cdot)$.

Здесь и далее $1 < p, q < \infty$, $I = (0, +\infty)$, B_0 — множество борелевских мер на I, не имеющих сингулярных компонентов, дискретные компоненты которых сосредоточены на множестве монотонных последовательностей точек из I. При интегрировании по $\mu \in B_0$ промежутки интегрирования считаются замкнутыми. Более того, ядро $K(\cdot,\cdot)$ операторов (2), (3) является соответственно $\mu\times\lambda$-, $\lambda\times\mu$-измеримыми (λ — мера Лебега), $L_{p,\mu}(I)$ — пространство μ-измеримых функций $g : I \to \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|g\|_{p,\mu} = \left(\int_0^\infty |g(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}},$$

причем $\|g\|_{p,\mu} \equiv \|g\|_p$ и $L_{p,\mu}(I) \equiv L_p(I)$ при $d\mu(x) = dx$.

В работах [1–4] В. Д. Степанов установил точные оценки вида

$$\|K\varphi\|_{q,\mu} \le c\|v\varphi\|_p \tag{4}$$

для оператора дробного интегрирования Римана — Лиувилля. Эти оценки дали новые импульсы для исследования аналогичных оценок для операторов вида (2) и (3) (см. [5–9]).

Заметим, что оценки (1) и (4) эквивалентны. Полагая в (4) $v\varphi = f$, имеем оценку (1), где ядра операторов (2) и (3) соответственно имеют вид $K(x,s)v^{-1}(s)$ и $K(x,s)v^{-1}(x)$.

В работах [9, 10] нами рассмотрены операторы вида (2) и (3) с ядром $K(\cdot,\cdot) \equiv K_1(\cdot,\cdot) \geq 0$, удовлетворяющим условию: существует постоянная d_1 такая, что

$$\frac{1}{d_1}(K_1(x,t) + K_1(t,s)) \leq K_1(x,s) \leq d_1(K_1(x,t) + K_1(t,s)) \tag{5}$$

при $x \geq t \geq s \geq 0$.

Этому условию удовлетворяют ядра многих операторов дробного интегрирования. В частности, для этого класса операторов установлены точные оценки вида (4), обобщающие результаты работ [5–7]. Класс интегральных операторов с ядром, удовлетворяющим условию (5), позже стал объектом исследования многих авторов (см., например, [11–14]).

В работах [15, 16] в связи с теоремами вложения весовых пространств и с исследованием спектральных свойств сингулярных дифференциальных операторов полярного типа изучены оценки вида (4) для оператора кратного интегрирования с весами, ядро которого, вообще говоря, не удовлетворяет условию (5). Поэтому, чтобы охватить более широкие классы интегральных операторов вольтерровского типа, встречающихся в различных задачах анализа, в частности, операторы типа кратного интегрирования с весами, в работе [17] введены расширяющиеся классы $H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n \subset \dots$ положительных ядер, где H_0 состоит из одной функции $K(x,s) \equiv 1$, а класс H_1 характеризуется условием (5), и для операторов (2) и (3) с ядрами из класса H_n, $n \geq 1$, найдены необходимые и достаточные условия справедливости неравенства (4) при $1 < p \leq q < \infty$ с точной по порядку оценкой наименьшей постоянной в (4). Исследования операторов с ядрами из класса H_n продолжены в работах [18, 19].

Из принадлежности ядра $K(\cdot,\cdot)$ операторов (2) и (3) классам H_n, $n \geq 1$, вытекает, что функция $K(\cdot,\cdot)$ эквивалентна функции, не убывающей по первому аргументу и не возрастающей по второму аргументу, что ограничивает широту охвата исследований операторов вида (2) и (3).

Здесь вводятся классы ядер P_n и Q_n, $n \geq 0$, более широкие, чем классы H_n, и даются критерии ограниченности и компактности из L_p в L_q, $1 < p \leq q < \infty$, операторов (2) и (3), когда их ядра принадлежат $P_n \cup O_n$.

В работе полагается $\frac{0}{0} = 0$, $\infty \cdot 0 = 0$. Соотношение $A \ll B$ означает $A \leq cB$, где константа $c > 0$ может зависеть от несущественных параметров. Мы пишем $A \approx B$ вместо $A \ll B \ll A$. Через $V_i(\cdot)$, $U_i(\cdot)$, $i = 0, 1, \dots$, обозначим неотрицательные функции, определенные на I, $\chi_D(\cdot)$ — характеристическая функция множества $D \subset R$.

2. Необходимые понятия и обозначения. Для каждого $n \geq 0$ определим классы P_n и Q_n ядер операторов вида (2) и (3) соответственно и договоримся писать $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot)$, если $K(\cdot,\cdot) \in P_n$ или $K(\cdot,\cdot) \in Q_n$.

Сначала определим индуктивным образом классы $\overline{P}_n$, $n \geq 0$. Обозначим через $\overline{K}(x,s)$ неотрицательную $\mu \times \lambda$-измеримую функцию, определенную при всех $x \geq s > 0$ и не убывающую по первому аргументу.

К классу $\overline{P}_0$ отнесем все ядра вида $\overline{K}_0(x,s) \equiv V_0(s) \geq 0$, $x \geq s > 0$. Пусть определены классы $\overline{P}_i$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, $m \geq 1$. По определению ядро $\overline{K}(\cdot,\cdot) = \overline{K}_m(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу $\overline{P}_m$ тогда и только тогда, когда существуют функции $\overline{K}_i(\cdot,\cdot) \in \overline{P}_i$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, и число $h_m > 0$ такие, что

$$\overline{K}_m(x,s) \le h_m \left(\sum_{i=0}^{m-1} \overline{K}_{m,i}(x,t)\overline{K}_i(t,s) + \overline{K}_m(t,s) \right) \tag{6}$$

при $x \ge t \ge s > 0$, где

$$\overline{K}_{m,i}(x,t) = \inf_{0<s\le t} \frac{\overline{K}_m(x,s)}{\overline{K}_i(t,s)}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \tag{7}$$

Из определения $\overline{K}_{m,i}$ следует, что функции $\overline{K}_{m,i}(x,t)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, $m = 1, 2, \dots$, не убывают по первому аргументу и не возрастают по второму аргументу и справедливы неравенства

$$\overline{K}_m(x,s) \ge \overline{K}_{m,i}(x,t)\overline{K}_i(t,s), \quad x \ge t \ge s > 0,\ i = 0, 1, \dots, m,\ m = 0, 1, \dots, \tag{8}$$

где для удобства принято $\overline{K}_{m,m}(\cdot,\cdot) \equiv 1$, $m = 0, 1, \dots$.

Тем самым каждый класс $\overline{P}_m$, $m \ge 0$, ядер $\overline{K}_m(\cdot,\cdot)$ характеризуется соотношением вида

$$\overline{K}_m(x,s) \approx \sum_{i=0}^{m} \overline{K}_{m,i}(x,t)\overline{K}_i(t,s) \tag{9}$$

для всех x, t, s таких, что $x \ge t \ge s > 0$, где $\overline{K}_{m,i}(\cdot,\cdot)$, $i = 0, 1, \dots, m$, определены по формуле (7).

В частности, $\overline{K}_1(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу $\overline{P}_1$, если существует функция V_1 такая, что

$$\overline{K}_1(x,s) \approx \overline{K}_{1,0}(x,t)V_1(s) + \overline{K}_1(t,s)$$

для всех $x \ge t \ge s > 0$.

Ядра класса $\overline{P}_2$ характеризуются соотношением

$$\overline{K}_2(x,s) \approx \overline{K}_{2,0}(x,t)V_2(s) + \overline{K}_{2,1}(x,t)\overline{K}_1(t,s) + \overline{K}_2(t,s)$$

для всех $x \ge t \ge s > 0$.

В дальнейшем нам понадобится следующее неравенство. Пусть $m \ge j \ge i \ge 0$. Тогда

$$\overline{K}_{m,i}(x,t) \ge \overline{K}_{m,j}(x,\tau)\overline{K}_{j,i}(\tau,t), \quad x \ge \tau \ge t > 0. \tag{10}$$

Действительно, для $x \ge \tau \ge t > 0$ имеем

$$\overline{K}_{m,j}(x,t) = \inf_{0<s\le t} \frac{\overline{K}_m(x,s)}{\overline{K}_j(t,s)} \ge \overline{K}_{m,i}(x,\tau) \inf_{0<s\le t} \frac{\overline{K}_i(\tau,s)}{\overline{K}_j(t,s)} = \overline{K}_{m,i}(x,\tau)\overline{K}_{i,j}(\tau,t).$$

Теперь определим классы P_n, $n \ge 0$. Ядро $K_n(\cdot,\cdot)$ принадлежит P_n тогда и только тогда, когда существуют функции U_n, $\overline{K}_n(\cdot,\cdot) \in \overline{P}_n$ и имеет место соотношение

$$K_n(x,s) \approx U_n(x)\overline{K}_n(x,s) \tag{11}$$

для $x \ge s > 0$.

Как и выше, для определения классов Q_m, $m \ge 0$, сначала определим классы $\underline{Q}_m$, $m \ge 0$. Неотрицательную $\lambda \times \mu$-измеримую функцию $K(\cdot,\cdot)$, определенную при всех $x \ge s > 0$ и не возрастающую по второму аргументу, обозначим через $\underline{K}(\cdot,\cdot)$. По определению ядро $\underline{K}(\cdot,\cdot) \equiv \underline{K}_0(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу $\underline{Q}_0$ тогда и только тогда, когда оно имеет вид $K_0(x,s) \equiv U_0(x) \ge 0$, $x \ge s > 0$. Пусть определены классы $\underline{Q}_i$, $i=0,1,\dots,m-1$, $m\geq 1$. Ядро $K(\cdot,\cdot)\equiv\underline{K}_m(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу $\underline{Q}_m$ тогда и только тогда, когда существуют функции $\underline{K}_i(\cdot,\cdot)\in\underline{Q}_i$, $i=0,1,\dots,m-1$, и число $h_m>0$ такие, что

$$\underline{K}_m(x,s)\leq h_m\sum_{i=0}^{m}\underline{K}_i(x,t)\underline{K}_{i,m}(t,s),\quad x\geq t\geq s>0,$$

где

$$\underline{K}_{m,m}(t,s)\equiv 1,\ \underline{K}_{i,m}(t,s)=\inf_{t\leq x<\infty}\frac{\underline{K}_m(x,s)}{\underline{K}_i(x,t)},\quad i=0,1,\dots,m-1. \tag{12}$$

Функции $\underline{K}_{i,m}(t,s)$, $i=0,1,\dots,m-1$, $m=0,1,\dots$, не убывают по первому аргументу и не возрастают по второму аргументу и для $m\geq i\geq j\geq 0$, $t\geq\tau\geq s>0$ удовлетворяют неравенству

$$\underline{K}_{j,m}(t,s)\geq\underline{K}_{j,i}(t,\tau)\underline{K}_{i,m}(\tau,s).$$

Как в (9), каждый класс $\underline{Q}_m$, $m\geq 0$, ядер $\underline{K}_m(\cdot,\cdot)$ характеризуется соотношением вида

$$\underline{K}_m(x,s)\approx\sum_{i=0}^{m}\underline{K}_i(x,t)\underline{K}_{i,m}(t,s)$$

для всех x,t,s таких, что $x\geq t\geq s>0$, где $\underline{K}_{i,m}(\cdot,\cdot)$, $i=0,1,\dots,m$, определены по формуле (12).

Ядра из классов $\underline{Q_1}$ и $\underline{Q_2}$ соответственно характеризуются соотношениями

$$\underline{K}_1(x,s)\approx\underline{K}_1(x,t)+U_1(x)\underline{K}_{0,1}(t,s),$$

$$\underline{K}_2(x,s)\approx\underline{K}_2(x,t)+\underline{K}_1(x,t)\underline{K}_{1,2}(t,s)+U_2(x)\underline{K}_{0,2}(t,s)$$

при $x\geq t\geq s>0$.

Замечание 1. Если существуют функции $\phi_{m,i}(\cdot,\cdot)\geq 0$, $\psi_{i,m}(\cdot,\cdot)\geq 0$, $i=0,1,\dots,m-1$, и имеют место соотношения

$$\overline{K}(x,s)\approx\sum_{i=0}^{m-1}\phi_{m,i}(x,t)\overline{K}_i(t,s)+\overline{K}(t,s),\quad m\geq 1, \tag{13}$$

$$\underline{K}(x,s)\approx\underline{K}(x,t)+\sum_{i=0}^{m-1}\underline{K}_i(x,t)\psi_{i,m}(t,s),\quad m\geq 1,$$

для всех x,t,s таких, что $x\geq t\geq s>0$, то соответственно

$$\overline{K}\equiv\overline{K}_m\in\overline{P}_m,\quad\underline{K}\equiv\underline{K}_m\in\underline{Q}_m.$$

Действительно, из (13) следует, что

$$\overline{K}(x,s)\gg\phi_{m,i}(x,t)\overline{K}_i(t,s),\quad i=0,1,\dots,m-1,$$

при $x\geq t\geq s>0$. Отсюда и из (7) имеем $\overline{K}_{m,i}(x,t)\gg\phi_{m,i}(x,t)$, $i=0,1,\dots,m-1$, при всех $x\geq t>0$. Следовательно, в силу (13) выполнено (6), т. е. $\overline{K}\equiv\overline{K}_m\in\overline{P}_m$. Аналогично показывается справедливость соотношения $\underline{K}\equiv\underline{K}_m\in\underline{Q}_m$.

Например, функция $\overline{K}_1(x,s)=(f(x)+g(s))^\beta$, где $\beta>0$ и $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ — неотрицательные возрастающие функции, не удовлетворяет, вообще говоря, условию (5), однако принадлежит классу $\overline{P}_1$, так как

$$(f(x)+g(s))^\beta\approx(f(x)-f(t))^\beta+(f(t)+g(s))^\beta,\quad x\geq t\geq s>0.$$

Определим классы Q_m, $m \geq 0$. Ядро $K(\cdot,\cdot) \equiv K_m(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу Q_m тогда и только тогда, когда существуют функции $V_m(\cdot) \geq 0$, $\underline{K}_m(\cdot,\cdot) \in \underline{Q}_m$ и имеет место соотношение

$$K_m(x,s) \approx \underline{K}_m(x,s)V_m(s)$$

для $x \geq s > 0$.

Из определения классов P_m и Q_m, $m \geq 0$, вытекает, что $P_0 = Q_0$ и $K(\cdot,\cdot) = K_0(\cdot,\cdot) \in P_0$ тогда и только тогда, когда

$$K_0(x,s) \approx U_0(x)V_0(s)$$

для всех $x \geq s > 0$. Отметим, что класс ядер H_m из работы [17] содержится в $P_m \cap Q_m$.

Положим

$$A^+(z,\mu) \equiv A^+(z,\mu,K) = \left(\int\limits_z^\infty \left(\int\limits_0^z K^{p'}(x,s)\,ds\right)^{\frac{q}{p'}} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A^-(z,\mu) \equiv A^-(z,\mu,K) = \left(\int\limits_0^z \left(\int\limits_z^\infty K^{q}(x,s)\,d\mu(x)\right)^{\frac{p'}{q}} ds\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B^+(z,\mu) \equiv B^+(z,\mu,K) = \left(\int\limits_z^\infty \left(\int\limits_0^z K^{q}(x,s)\,d\mu(s)\right)^{\frac{p'}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$B^-(z,\mu) \equiv B^-(z,\mu,K) = \left(\int\limits_0^z \left(\int\limits_z^\infty K^{p'}(x,s)\,dx\right)^{\frac{q}{p'}} d\mu(s)\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. В случае, когда μ — мера Лебега, полагаем $A^+(z,\mu) \equiv A^+_{p,q}(z)$, $A^-(z,\mu) \equiv A^-_{p,q}(z)$, $B^+(z,\mu) \equiv B^+_{p,q}(z)$ и $B^-(z,\mu) \equiv B^-_{p,q}(z)$. Нетрудно заметить, что $A^+_{q',p'}(z) = B^+_{p,q}(z)$ и $A^-_{q',p'}(z) = B^-_{p,q}(z)$, где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

3. Критерии ограниченности.

Теорема 1. *Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $\mu \in B_0$ и ядро оператора (2) принадлежит классу P_m, $m \geq 0$. Тогда для оператора (2) справедлива оценка (1) в том и только в том случае, если выполнено одно из условий:*

$$A^+(\mu) = \sup_{z>0} A^+(z,\mu) < \infty, \tag{14}$$

$$A^-(\mu) = \sup_{z>0} A^-(z,\mu) < \infty. \tag{15}$$

При этом для наименьшей константы C в (1) имеет место соотношение $A^+(\mu) \approx A^-(\mu) \approx C$.

Теорема 2. *Пусть $1 < p \le q < \infty$, $\mu \in B_0$ и ядро оператора* (3) *принадлежит классу Q_m, $m \ge 0$. Тогда для оператора* (3) *справедлива оценка* (1) *в том и только в том случае, если выполнено одно из условий:*

1) $B^+(\mu) = \sup\limits_{z>0} B^+(z,\mu) < \infty$;

2) $B^-(\mu) = \sup\limits_{z>0} B^-(z,\mu) < \infty$.

При этом для наименьшей константы C в (1) *имеет место соотношение $B^+(\mu) \approx B^-(\mu) \approx C$.*

Следующее неравенство дуально неравенству (1) относительно формы $\int\limits_0^\infty f(x)g(x)\,d\mu(x)$:

$$\|K'_\mu g\|_{p'} \le C, \quad \|g\|_{q',\mu}, g \in L_{q',\mu}(I), \tag{16}$$

где дуальные к операторам (2) и (3) операторы соответственно имеют вид

$$K'_\mu g(s) = \int\limits_s^\infty K(x,s)g(x)\,d\mu(x), \tag{17}$$

$$(K^*)'_\mu g(x) = \int\limits_0^x K(x,s)g(s)\,d\mu(s). \tag{18}$$

Действительно, пусть K — один из операторов (2) или (3). Тогда

$$C = \sup_{f\in L_p(I), f\ne 0} \frac{\|Kf\|_{q,\mu}}{\|f\|_p} = \sup_{f\in L_p(I), f\ne 0}\ \sup_{g\in L_{q',\mu}(I), g\ne 0} \frac{\int\limits_0^\infty g(x)Kf(x)\,d\mu(x)}{\|g\|_{q',\mu}\,\|f\|_p}$$

$$= \sup_{g\in L_{q',\mu}(I), g\ne 0}\ \sup_{f\in L_p(I), f\ne 0} \frac{\int\limits_0^\infty f(s)K'_\mu g(s)\,ds}{\|f\|_p\|g\|_{q',\mu}} = \sup_{g\in L_{q',\mu}(I), g\ne 0} \frac{\|K'_\mu g\|_{p'}}{\|g\|_{q',\mu}}, \tag{19}$$

что показывает эквивалентность неравенств (16) и (1). Так как в силу (19) неравенства (1) и (16) одновременно выполняются или не выполняются, из теорем 1 и 2 вытекают

Теорема 3. *Пусть $1 < q' \le p' < \infty$, $\mu \in B_0$ и ядро оператора* (17) *принадлежит классу P_m, $m \ge 0$. Тогда для оператора* (17) *справедлива оценка* (16) *тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий* 1 *или* 2 *теоремы* 1.

Теорема 4. *Пусть $1 < q' \le p' < \infty$, $\mu \in B_0$ и ядро оператора* (18) *принадлежит классу Q_m, $m \ge 0$. Тогда для оператора* (18) *справедлива оценка* (16) *тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий* 1 *или* 2 *теоремы* 2.

В случае, когда μ — мера Лебега, сравнивая условия и утверждения теорем 4 и 3 при $q' = p$, $p' = q$ с условиями и утверждениями теорем 1 и 2 соответственно, имеем следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть $1 < p \le q < \infty$ и ядро оператора* (2) *принадлежит классу $P_m \cup Q_m$, $m \ge 0$. Тогда оператор* (2) *ограничен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) $A^+_{p,q} = \sup\limits_{z>0} A^+_{p,q}(z) < \infty$,

2) $A^-_{p,q} = \sup\limits_{z>0} A^-_{p,q}(z) < \infty$.

При этом для нормы оператора (2) *выполнены соотношения $\|K\|_{p\to q} \approx A^+_{p,q} \approx A^-_{p,q}$.*

Теорема 6. *Пусть $1 < p \le q < \infty$ и ядро оператора (3) принадлежит классу $P_m \cup Q_m$, $m \ge 0$. Тогда оператор (3) ограничен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) $B^+_{p,q} = \sup\limits_{z>0} B^+_{p,q}(z) < \infty$,

2) $B^-_{p,q} = \sup\limits_{z>0} B^-_{p,q}(z) < \infty$.

При этом для нормы оператора (3) выполнены соотношения $\|K\|_{p\to q} \approx B^+_{p,q} \approx B^-_{p,q}$.

4. Доказательство теоремы 1. Теорема 2 доказывается так же, как теорема 1. Поэтому мы докажем только теорему 1. Сначала докажем слабую форму теоремы 1.

Теорема 1$'$. *Пусть $1 < p \le q < \infty$, $\mu \in B_0$ и ядро оператора (2) принадлежит классу $\overline{P}_m$, $m \ge 0$. Тогда оценка (1) для оператора (2) справедлива тогда и только тогда, когда*

$$A_m \equiv A_m(\mu) = \max_{0\le i\le m} \sup_{z>0} A_{m,i}(z,\mu) < \infty, \tag{20}$$

при этом $A_m \approx C$, где C — наименьшая константа в (1). Здесь

$$A_{m,i}(z,\mu) = \left(\int_z^\infty \overline{K}^q_{m,i}(x,z)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^z \overline{K}^{p'}_i(z,s)\,ds\right)^{\frac{1}{p'}},$$

функции $\overline{K}_{m,i}(\cdot,\cdot)$, $\overline{K}_i(\cdot,\cdot)$, $i = 0,1,\dots,m$, из оценки (6).

Доказательство теоремы 1$'$. Необходимость. Пусть ядро оператора (2) принадлежит классу $\overline{P}_m$, $m \ge 0$, и имеет место оценка (1). Полагая в (1) $f(\cdot) = \chi_{(0,z)}(\cdot)$, $z > 0$, получим

$$z^{\frac{1}{p}} C \ge \|K\chi_{(0,z)}\|_{q,\mu} \ge \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z \overline{K}_m(x,s)\,ds\right)^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \ge (8)$$

$$\ge \left(\int_z^\infty \overline{K}^q_{m,i}(x,z)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^z \overline{K}_i(z,s)\,ds\right), \quad i = 0,1,\dots,m.$$

Отсюда вытекает, что $\overline{K}_{m,i}(\cdot,z) \in L_{q,\mu}[z,+\infty)$, $i = 0,1,\dots,m$, для $z > 0$. Так как неравенства (1) и (16) выполняются одновременно, полагая $g(\cdot) = \chi_{[z,\infty)}(\cdot)\overline{K}^{q-1}_{m,i}(\cdot,z)$, $0 \le i \le m$, в (16), имеем

$$\left(\int_z^\infty \overline{K}^q_{m,i}(x,z)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q'}} C \ge \|K'_\mu g\|_{p'}$$

$$\ge \left(\int_0^z \left(\int_z^\infty \overline{K}_m(x,s)\overline{K}^{q-1}_{m,i}(x,z)\,d\mu(x)\right)^{p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\ge (7) \ge \left(\int_0^z \overline{K}^{p'}_i(z,s)\,ds\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_z^\infty \overline{K}^q_{m,i}(x,z)\,d\mu(x)\right),$$

откуда
$$\infty > C \geq A_m. \tag{21}$$
Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\mu \in B_0$, ядро оператора (2) принадлежит классу $\overline{P}_m$, $m \geq 0$, и имеет место (20).

Начнем со случая $m = 0$. По определению класса $\overline{P}_0$ ядро оператора (2) имеет вид $\overline{K}_0(x,s) \equiv V_0(s) \geq 0$. Тогда оператор (2) — оператор интегрирования K_0 с весом V_0, а условие (20) дает оценку (см. обзор [20])
$$\|K_0 f\|_{q,\mu} \ll A_0(\mu)\|f\|_p, \quad f \in L_p(I).$$

Пусть из условия (20) при $m = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geq 1$, вытекает оценка
$$\|K_m f\|_{q,\mu} \ll A_m(\mu)\|f\|_p, \quad f \in L_p(I), \tag{22}$$
где K_m — оператор (2) с ядром $\overline{K}_m(\cdot,\cdot) \in \overline{P}_m$. Покажем, что из (20) следует справедливость оценки (22) и при $m = n$. Положим
$$F(x) = \int\limits_0^x \overline{K}_n(x,s)|f(s)|\,ds, \quad x > 0,$$
где f — произвольная функция из $L_p(I)$ с компактным носителем. Функция $F(\cdot)$ не убывает и обращается в нуль в некоторой окрестности нуля. Пусть $\widetilde{x} = \inf\{x > 0 : F(x) > 0\}$, $\widetilde{I} = (\widetilde{x}, \infty)$ и $h \equiv h_n$, где h_n из (6) при $m = n$. Определим функцию
$$k(x) = \max\{k \in Z : (h+1)^k \leq F(x)\}, \quad x \in \widetilde{I},$$
где Z — множество целых чисел. Из определения функции $k(\cdot)$ и свойств функции $F(\cdot)$ следует, что $k(\cdot)$ — неубывающая функция и
$$(h+1)^{k(x)} \leq F(x) < (h+1)^{k(x)+1} \quad \forall x > \widetilde{x}.$$
Отсюда и из определения функции $k(\cdot)$ легко следует, что если функция $F(\cdot)$ непрерывна справа в точке $x \in \widetilde{I}$, то функция $k(\cdot)$ также непрерывна справа в этой же точке. Пусть $\{k_i\}$, $k_i < k_{i+1}$, — область значений функции $k : \widetilde{I} \to Z$ и I_i — прообраз точки $k_i \in Z$, т. е. $I_i = \{x : k(x) = k_i\}$. Тогда
$$\widetilde{I} = \bigcup_i I_i. \tag{23}$$
Положим $x_i = \inf I_i$. Очевидно, что $x_i \leq x_{i+1}$.

Пусть $\mu = \mu_1 + \mu_0$, где μ_1 — абсолютно непрерывный (относительно меры Лебега) компонент меры μ, а μ_0 — дискретный компонент меры μ. Тогда
$$\int\limits_0^\infty |K_n f(x)|^q\,d\mu(x) \leq \int\limits_{\widetilde{x}}^\infty F^q(x)\,d\mu_1(x) + \int\limits_{\widetilde{x}}^\infty F^q(x)\,d\mu_0(x) = J_1 + J_0. \tag{24}$$
Оценим J_1 и J_0 по отдельности. Для оценки J_1, не ограничивая общности, можем считать, что функция $\overline{K}_n(x,s)$ по первому аргументу непрерывна справа в точках $\{x_i\}$, так как в противном случае $\overline{K}_n(x_i,s)$ заменим на $\overline{K}_n(x_i+0,s)$,

что не влияет на значение J_1 в силу абсолютной непрерывности меры μ_1. Тогда $I_i = [x_i, x_{i+1})$ и

$$(h+1)^{k_j} \le F(x) < (h+1)^{k_j+1} \quad \text{при } x_j \le x < x_{j+1}. \tag{25}$$

По определению $k_j < k_{j+1}$, поэтому

$$k_j - 1 \ge k_{j-1} \ge k_{j-2} + 1. \tag{26}$$

В силу (25), (26) и (6) имеем

$$\begin{aligned}(h+1)^{k_j-1} &= (h+1)^{k_j} - h(h+1)^{k_j-1} \le (h+1)^{k_j} - h(h+1)^{k_{j-2}+1} \\ &< F(x_j) - hF(x_{j-2}) \le \int\limits_{x_{j-2}}^{x_j} \overline{K}_n(x_j,s)|f(s)|\,ds + h\sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_{n,i}(x_j,x_{j-2})K_i|f|(x_{j-2}).\end{aligned} \tag{27}$$

На основании (23), (25) и (27) получим

$$\begin{aligned}J_1 &= \int\limits_0^\infty |K_n f(x)|^q\,d\mu_1(x) \le \sum_j \int\limits_{I_j} F^q(x)\,d\mu_1(x) \le \sum_j (h+1)^{q(k_j+1)}\mu_1(I_j) \\ &\ll \sum_j (h+1)^{q(k_j-1)}\mu_1(I_j) \ll \sum_j \mu_1(I_j)\left(\int\limits_{x_{j-2}}^{x_j} \overline{K}_n(x_j,s)|f(s)|\,ds\right)^q \\ &+ h^q \sum_{i=0}^{n-1}\sum_j \overline{K}^q_{n,i}(x_j,x_{j-2})\mu_1(I_j)(K_i|f|(x_{j-2}))^q = J_{1,n} + h^q\sum_{i=0}^{n-1} J_{1,i}.\end{aligned} \tag{28}$$

Применяя неравенство Гёльдера, с учетом $q \ge p$ имеем

$$\begin{aligned}J_{1,n} &\le \sum_j \mu_1(I_j)\left(\int\limits_{x_{j-2}}^{x_j} \overline{K}^{p'}_n(x_j,s)\,ds\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\int\limits_{x_{j-2}}^{x_j} |f|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\le \sup_{y\in I} A^q_{n,n}(y,\mu)\left(\sum_j \int\limits_{x_{j-2}}^{x_j} |f|^p\,ds\right)^{\frac{q}{p}} \ll (A_n(\mu))^q\|f\|^q_p.\end{aligned} \tag{29}$$

Выражение для $J_{1,i}$, $i = 0,1,\dots,n-1$, перепишем в виде

$$J_{1,i} = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t \overline{K}_i(t,s)|f(s)|\,ds\right)^q d\mu_{1,i}(t) = \|K_i|f|\|^q_{q,\mu_{1,i}}, \tag{30}$$

где $d\mu_{1,i}(t) = \sum\limits_j \mu_1(I_j)\overline{K}^q_{n,i}(x_j,x_{j-2})\delta(t-x_{j-2})dt$, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Так как $\mu_{1,i} \in B_0$, то по нашему допущению для оператора K_i, $i = 0,1,\dots,$ $n-1$, имеет место оценка вида (22), следовательно,

$$J_{1,i} \ll A^q_i(\mu_{1,i})\|f\|^q_p, \quad i = 0,1,\dots,n-1, \tag{31}$$

где

$$A_i(\mu_{1,i}) = \max_{0\le j\le i}\sup_{z>0}\left(\int\limits_z^\infty \overline{K}^q_{i,j}(x,z)\,d\mu_{1,i}(x)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^z \overline{K}^{p'}_j(z,s)\,ds\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Далее, поскольку

$$\int\limits_z^\infty \overline{K}^q_{i,k}(x,z)d\mu_{1,i}(x) = \sum_{x_{k-2}\ge z} \mu_1(I_k)\overline{K}^q_{n,i}(x_k,x_{k-2})\overline{K}^q_{i,k}(x_{k-2},z)$$

$$\le (10) \le \sum_{x_{k-2}\ge z} \int\limits_{I_k} d\mu_1(x)\overline{K}^q_{n,k}(x_k,z) \le \int\limits_z^\infty \overline{K}_{n,k}(x,z)\,d\mu(x)$$

для $n \ge i \ge k \ge 0$, то $A_i(\mu_{1,i}) \le A_n(\mu)$ для $i = 0,1,\dots,n-1$. Тогда из (31) имеем

$$J_{1,i} \ll A^q_n(\mu)\|f\|^q_p, \quad i = 0,1,\dots,n-1. \tag{32}$$

Из (28), (29) и (32) следует, что

$$J_1 \ll A^q_n(\mu)\|f\|^q_p. \tag{33}$$

Теперь оценим J_0. Пусть $\{\tilde{k}_j\} \subseteq \{k_i\}$ — область значений функции $k(\cdot)$ в точках $\{y_i\} \subset \widetilde{I}$, $y_i < y_{i+1}$, где сосредоточена мера μ_0. Пусть $\widetilde{I}_j$ — прообраз точки $\tilde{k}_j$. Положим $l_j = \min\{i : y_i \in \widetilde{I}_j\}$. Тогда $l_{j+1} - 1 = \max\{i : y_i \in \widetilde{I}_j\}$ и

$$(h+1)^{\tilde{k}_j} \le F(y_i) < (h+1)^{\tilde{k}_j+1} \quad \text{при } l_j \le i \le l_{j+1}-1. \tag{34}$$

Для удобства значение y_i при $i = l_j$ обозначим через $\tilde{x}_j$, т. е. $\tilde{x}_j = y_{l_j}$. Так как $\tilde{k}_j$ удовлетворяет условию (26), поступая, как в (27), из (34) и (6) приходим к неравенству

$$(h+1)^{\tilde{k}_j-1} < \int\limits_{\tilde{x}_{j-2}}^{\tilde{x}_j} \overline{K}_n(\tilde{x}_j,s)|f(s)|\,ds + h\sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_{n,i}(\tilde{x}_j,\tilde{x}_{j-2})K_i|f|(\tilde{x}_{j-2}). \tag{35}$$

Используя (34) и (35), получим аналог соотношения (28):

$$J_0 = \sum_i F^q(y_i)\mu_0(y_i) = \sum_j \sum_{i=l_j}^{l_{j+1}-1} F^q(y_i)\mu_0(y_i) \le \sum_j (h+1)^{q(\tilde{k}_j+1)}\mu_0(\widetilde{I}_j)$$

$$\ll \sum_j (h+1)^{q(\tilde{k}_j-1)}\mu_0(\widetilde{I}_j) \ll \sum_j \mu_0(\widetilde{I}_j)\left(\int\limits_{\tilde{x}_{j-2}}^{\tilde{x}_j} \overline{K}_n(\tilde{x}_j,s)|f(s)|\,ds\right)^q$$

$$+ h^q \sum_{i=0}^{n-1}\sum_j \overline{K}^q_{n,i}(\tilde{x}_j,\tilde{x}_{j-2})\mu_0(\widetilde{I}_j)(K_i|f|(\tilde{x}_{j-2}))^q = J_{0,n} + h^q\sum_{i=0}^{n-1} J_{0,i}. \tag{36}$$

Далее, для оценки $J_{0,i}$, $i = 0,1,\dots,n$, поступая точно так же, как при оценивании $J_{1,i}$, $i = 0,1,\dots,n$, из (36) имеем $J_0 \ll A^q_n\|f\|^q_p$. Из полученной оценки вместе с (24) и (33) вытекает, что неравенство (22) имеет место и при $m = n$ для функций из $L_p(I)$ с компактным носителем. Но совокупность таких функций плотна в $L_p(I)$, поэтому неравенство (22) при $m = n$ выполнено для всех $f \in L_p(I)$. Тем самым для любого $m \ge 0$ из (20) следует справедливость неравенства (1) с оценкой $C \ll A_m$ для наименьшей константы C в (1). Эта оценка вместе с (21) дает $C \approx A_m$. Теорема $1'$ доказана.

Теперь для доказательства теоремы 1 нам нужна

Лемма 1. *Пусть ядро оператора* (2) *принадлежит классу* $\overline{P}_m$, $m \geq 0$. *Тогда для* $z > 0$ *выполнены соотношения*

$$A^+(z,\mu,\overline{K}_m) \approx \max_{0\leq i\leq m} A_{m,i}(z,\mu) \approx A^-(z,\mu,\overline{K}_m), \tag{37}$$

где константа эквивалентности не зависит от $z > 0$.

Действительно, справедливость (37) легко следует из (9).

Доказательство теоремы 1. Пусть ядро $K_m(\cdot,\cdot)$ оператора (2) принадлежит классу P_m, $m \geq 0$. Тогда по определению класса P_m существуют функции $U_m(\cdot) \geq 0$, $\overline{K}_m(\cdot,\cdot) \in \overline{P}_m$ и имеет место соотношение (11). Тем самым

$$\|K_m f\|_{q,\mu} \approx \|\overline{K}_m f\|_{q,\mu_u}, \tag{38}$$

где $d\mu_u \equiv U_m^q d\mu$, а $\overline{K}_m$ и K_m — операторы вида (2), когда их ядра $K(\cdot,\cdot)$ соответственно равны $\overline{K}_m(\cdot,\cdot)$ и $K_m(\cdot,\cdot)$.

Из (38) вытекает, что оценка (1) эквивалентна оценке

$$\|\overline{K}_m f\|_{q,\mu_u} \leq \overline{C}\|f\|_p, \quad f \in L_p(I), \tag{39}$$

где $C \approx \overline{C}$, при этом C и $\overline{C}$ — наименьшие константы в (1) и (39) соответственно.

Очевидно, что $\mu_u \in B_0$, поэтому на основании теоремы $1'$ выполнение оценки (39) эквивалентно условию $A_m(\mu_u) < \infty$, причем $\overline{C} \approx A_m(\mu_u)$. В силу леммы 1 имеем

$$A_m(\mu_u) \approx \sup_{z>0} A^+(z,\mu_u,\overline{K}_m), \quad A_m(\mu_u) \approx \sup_{z>0} A^-(z,\mu_u,\overline{K}_m). \tag{40}$$

На основании (11)

$$\begin{aligned} A^+(z,\mu_u,\overline{K}_m) &= \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z \overline{K}_m^{p'}(x,s)\,ds\right)^{\frac{q}{p'}} U_m^q(x)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\approx \left(\int_z^\infty \left(\int_0^z K_m^{p'}(x,s)\,ds\right)^{\frac{q}{p'}} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} = A^+(z,\mu,K_m). \end{aligned} \tag{41}$$

Точно так же устанавливаем, что

$$A^-(z,\mu_u,\overline{K}_m) \approx A^-(z,\mu,K_m). \tag{42}$$

Из (40)–(42), эквивалентности неравенств (1) и (39) и эквивалентности констант C и $\overline{C}$ получим, что неравенство (1) равносильно выполнению условий (14) и (15). Более того, имеет место соотношение $A^+(\mu) \approx A^-(\mu) \approx C$. Теорема 1 доказана.

5. Критерии компактности.

Теорема 7. *Пусть* $1 < p \leq q < \infty$ *и ядро оператора* (2) *принадлежит классу* $P_m \cup Q_m$, $m \geq 0$. *Тогда оператор* (2) *компактен из* $L_p(I)$ *в* $L_q(I)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) $A^+_{p,q} < \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} A^+_{p,q}(z) = \lim\limits_{z\to\infty} A^+_{p,q}(z) = 0$,

2) $A^-_{p,q} < \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} A^-_{p,q}(z) = \lim\limits_{z\to\infty} A^-_{p,q}(z) = 0$.

Операторы (2) и (3) являются взаимно сопряженными, поэтому оператор (2) компактен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда оператор (3) компактен из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$. Следовательно, из теоремы 7 вытекает

Теорема 8. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и ядро оператора* (3) *принадлежит классу* $P_m \cup Q_m$, $m \ge 0$. *Тогда оператор* (3) *компактен из* $L_p(I)$ *в* $L_q(I)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) $B^+_{p,q} < \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} B^+_{p,q}(z) = \lim\limits_{z\to\infty} B^+_{p,q}(z) = 0$,

2) $B^-_{p,q} < \infty$, $\lim\limits_{z\to 0} B^-_{p,q}(z) = \lim\limits_{z\to\infty} B^-_{p,q}(z) = 0$.

Доказательство теоремы 7 опирается на следующие утверждения, которые являются частными случаями теорем 7 и 8.

Теорема $7'$**.** *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и ядро оператора* (2) *принадлежит классу* P_m, $m \ge 0$. *Тогда оператор* (2) *компактен из* $L_p(I)$ *в* $L_q(I)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий* 1 *или* 2 *теоремы* 7.

Теорема $8'$**.** *Пусть* $1 < p \le q < \infty$ *и ядро оператора* (3) *принадлежит классу* Q_m, $m \ge 0$. *Тогда оператор* (3) *компактен из* $L_p(I)$ *в* $L_q(I)$ *тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий* 1 *или* 2 *теоремы* 8.

На основании теорем $7'$ и $8'$ установим сначала справедливость утверждения теоремы 7. Если ядро оператора (2) принадлежит классу P_m, $m \ge 0$, то утверждение теоремы вытекает из теоремы $7'$. Пусть ядро оператора (2) $K(\cdot,\cdot) \equiv K_m(\cdot,\cdot)$ принадлежит Q_m, $m \ge 0$. Рассмотрим оператор (3) с ядром $K_m(\cdot,\cdot)$ из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$. По условию теоремы 7 $1 < p \le q < \infty$, следовательно, $1 < q' \le p' < \infty$. Тогда на основании теоремы $8'$ компактность оператора (3) из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$ в силу $B^+_{q',p'}(z) = A^+_{p,q}(z)$ и $B^-_{q',p'}(z) = A^-_{p,q}(z)$ эквивалентна каждому из условий 1 и 2 теоремы 7. Но компактность оператора (3) из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$ равносильна компактности оператора (2) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ ввиду того, что операторы (2) и (3) взаимно сопряженные. Поэтому утверждение теоремы 7 справедливо и в случае, когда ядро оператора (2) принадлежит классу Q_m, $m \ge 0$. Теорема 7 доказана.

Теперь перейдем к доказательству теорем $7'$ и $8'$. Теорема $8'$ доказывается таким же методом, что и теорема $7'$. Поэтому мы докажем только теорему $7'$.

Доказательство теоремы $7'$. Пусть ядро $K_m(\cdot,\cdot)$ оператора (2) принадлежит P_m, $m \ge 0$. Из утверждения леммы 1 и соотношений (41), (42) имеем $A^+_{p,q}(z) \approx A^-_{p,q}(z)$, где константы эквивалентности не зависят от $z > 0$, откуда вытекает эквивалентность условий 1 и 2 теоремы 7.

Теперь покажем, что для компактности из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ оператора (2) необходимо и достаточно условие 1.

Необходимость. Пусть оператор (2) компактен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$, тогда он ограничен. Следовательно, в силу теоремы 5 выполнено условие $A^+_{p,q} < \infty$, а из (42) вытекает, что оператор $\overline{K}_m$ ограничен из $L_p(I)$ в $L_{q,\mu_u}(I)$, где μ — мера Лебега. Тогда из теоремы $1'$ следует, что для $z > 0$ имеем $\overline{K}_i(z,\cdot) \in L_{p'}(0,z)$, $U_m(\cdot)\overline{K}_{m,i}(\cdot,z) \in L_q(z,+\infty)$, $i = 0,1,\dots,m$, где функции $U_m(\cdot)$, $\overline{K}_{m,i}(\cdot,\cdot)$, $\overline{K}_i(\cdot,\cdot)$, $i = 0,1,\dots,m-1$, из (6) и (11).

Пусть $\{z_k\}$ — последовательность точек из I такая, что $z_k \to 0$ при $k \to \infty$. Положим $g_k(\cdot) = \chi_{(0,z_k)}(\cdot)\overline{K}_i^{p'-1}(z_k,\cdot)$, $0 \le i \le m$, и рассмотрим функцию $f_k(\cdot) = g_k(\cdot)/\|g_k\|_p$. Так как $\|f_k\|_p = 1$, то

$$\left|\int_0^\infty \varphi(x) f_k(x)\,dx\right| \le \left(\int_0^{z_k} |\varphi|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad \forall \varphi \in L_{p'}(I).$$

Поэтому последовательность $\{f_k\}$ из $L_p(I)$ слабо сходится к нулю. Тогда в силу компактности (2) из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ последовательность $\{K_m f_k\} \subset L_q(I)$ сильно сходится к нулю. На основании (38)

$$\lim_{k\to\infty} \|\overline{K}_m f_k\|_{q,\mu_u} = 0. \tag{43}$$

Поскольку

$$\|\overline{K}_m f_k\|_{q,\mu_u} \geq \left(\int\limits_{z_k}^{\infty} \left(\int\limits_{0}^{z_k} \overline{K}_m(x,s) f_k(s)\,ds \right)^q U_m^q(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\geq (8) \geq \left(\int\limits_{z_k}^{\infty} |U_m(x)\overline{K}_{m,i}(x,z_k)|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{0}^{z_k} \overline{K}_i^{p'}(z_k,s)\,ds \right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$= A_{m,i}(z_k,\mu_u), \quad 0 \leq i \leq m,$$

ввиду леммы 1 и (41), (43) имеем $\lim\limits_{k\to\infty} A^+_{p,q}(z_k) = 0$. Отсюда в силу произвольности последовательности $\{z_k\}$ следует, что

$$\lim_{z\to 0} A^+_{p,q}(z) = 0. \tag{44}$$

Из компактности оператора K_m из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ вытекает компактность из $L_{q'}(I)$ в $L_{p'}(I)$ сопряженного оператора K_m^*. Пусть теперь $\{z_k\}$ — произвольная последовательность из I такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \infty$. Положим

$$\tilde{g}_k(\cdot) = \chi_{[z_k,\infty)}(\cdot) U_m^{q-1}(\cdot) \overline{K}_{m,i}^{q-1}(\cdot, z_k)$$

и рассмотрим функцию $\tilde{f}_k(\cdot) = \frac{\tilde{g}_k(\cdot)}{\|\tilde{g}_k\|_{q'}}$. Так как $\|\tilde{f}_k\|_{q'} = 1$, то

$$\left| \int\limits_0^{\infty} \psi(s)\tilde{f}_k(s)\,ds \right| \leq \left(\int\limits_{z_k}^{\infty} |\psi(s)|^q\,ds \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall \psi \in L_q(I),$$

что показывает слабую сходимость к нулю последовательности $\{\tilde{f}_k\} \in L_{q'}(I)$. Тогда в силу компактности K_m^*

$$\lim_{k\to\infty} \|K_m^* \tilde{f}_k\|_{p'} = 0. \tag{45}$$

Из соотношений (11) и (8) имеем

$$\|K_m^* \tilde{f}_k\|_{p'} \geq \left(\int\limits_0^{z_k} \left(\int\limits_{z_k}^{\infty} K_m(x,s)\tilde{f}_k(x)/,dx \right)^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} \gg A_{m,i}(z_k,\mu_u), \quad 0 \leq i \leq m.$$

Отсюда и из (45), как в случае (44), получаем, что $\lim\limits_{z\to\infty} A^+_{p,q}(z) = 0$. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть ядро $K_m(\cdot,\cdot)$ оператора (2) принадлежит P_m, $m \geq 0$, и выполнено условие 1 теоремы 7. Из условия $A^+_{p,q} < \infty$ на основании теоремы 5 оператор (2) непрерывно действует из $L_p(I)$ в $L_q(I)$.

Пусть $\omega(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — неотрицательные функции, заданные на I. Из определения классов (см. (6), (11)) $\overline{P}_m, P_m$ следует, что $K_m(x,s)v(s) \in P_m$, и поэтому по теореме 1

$$\|\omega K_m v f\|_q = \|K_m v f\|_{q,\mu_\omega} \ll A^+(\mu_\omega, K_m v)\|f\|_p,$$

значит,

$$\|\omega K_m v\|_{p\to q} \ll A^+(\mu_\omega, K_m v), \tag{46}$$

где $d\mu_\omega(x) = \omega(x)dx$, $A^+(\mu_\omega, K_m v) = \sup\limits_{z>0} A^+(z, \mu_\omega, K_m v)$.

Пусть $0 < a < b < \infty$. Рассмотрим оператор $K_{a,b} \equiv \chi_{(a,b)} K_m \chi_{(a,b)}$. Оператор $K_{a,b}$ компактен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$ тогда и только тогда, когда он компактен из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$. В силу теоремы 5.6 из [21, с. 92] оператор компактен из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{|D^*|+|D|\to 0} \|\chi_{D^*} K_{a,b} \chi_D\|_{p,(a,b)\to q,(a,b)} = 0, \tag{47}$$

где $D^* \subset (a,b)$, $D \subset (a,b)$, $|D|$ — лебегова мера множества D. Так как ядро оператора $K_{a,b}\chi_D$ принадлежит классу $\overline{P}_m$, из (46) и леммы 1 имеем

$$\|\chi_{D^*} K_{a,b} \chi_D\|_{p,(a,b)\to q,(a,b)}$$
$$\ll \max_{0\le j\le m} \left(\int_a^b \chi_{D^*}(x) \overline{K}^q_{m,j}(x,a) U^q_m(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \overline{K}^{p'}_j(b,s)\chi_D(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда легко следует (47). Таким образом, для любых $0 < a < b < \infty$ оператор $K_{a,b}$ компактен из $L_p(I)$ в $L_q(I)$. Оператор (2) представим в виде

$$K_m = K_a + K_b + \widetilde{K}_{a,b} + K_{a,b},$$

где $K_a = \chi_{(0,a)} K_m \chi_{(0,a)}$, $K_b = \chi_{(b,\infty)} K_m$ и $\widetilde{K}_{a,b} = \chi_{(a,b)} K_m \chi_{(0,a)}$, откуда

$$\|K - K_{a,b}\|_{p\to q} \le \|K_a\|_{p\to q} + \|K_b\|_{p\to q} + \|\widetilde{K}_{a,b}\|_{p\to q}. \tag{48}$$

Если покажем, что правая часть (48) стремится к нулю при $a \to 0$ и $b \to \infty$, то оператор (2) как равномерный предел компактных операторов будет компактным из $L_p(I)$ в $L_q(I)$.

Введем меры

$$d\mu_a(x) = \chi_{(0,a)}(x)\,dx, \quad d\mu_b(x) = \chi_{(b,\infty)}(x)\,dx, \quad d\mu_{a,b}(x) = \chi_{(a,b)}(x)\,dx.$$

По теореме 1 справедливы оценки

$$\|K_a f\|_q \le \|K_m f\|_{q,\mu_a} \ll A^+(\mu_a)\|f\|_p, \quad \|K_b f\|_q \le \|K_m f\|_{q,\mu_b} \ll A^+(\mu_b)\|f\|_p,$$
$$\|\widetilde{K}_{a,b} f\|_q = \|K_m \chi_{(0,a)} f\|_{q,\mu_{a,b}} \ll A^+(\mu_{a,b}, K_m \chi_{(0,a)})\|f\|_p.$$

Следовательно,

$$\|K_a\|_{p\to q} \ll A^+(\mu_a), \quad \|K_a\|_{p\to q} \ll A^+(\mu_a), \quad \|\widetilde{K}_{(a,b)}\|_{p\to q} \ll A^+(\mu_{a,b}). \tag{49}$$

Поскольку $A^+(\mu_a) = \sup\limits_{z>0} A^+(z, \mu_a)$ и

$$A^+(z,\mu_a) = \begin{cases} 0 & \text{при } z \ge a, \\ \left(\int\limits_z^a \left(\int\limits_0^z K^{p'}_m(x,s)\,ds\right)^{\frac{q}{p'}} dx\right)^{\frac{1}{q}} & \text{при } 0 < z \le a, \end{cases}$$

то $A^+(z,\mu_a) \leq A^+_{p,q}(z)$ и $A^+(\mu_a) \leq \sup\limits_{0<z<a} A^+_{p,q}(z)$. Поэтому

$$\lim_{a\to 0} A^+(\mu_a) = \lim_{a\to 0} \sup_{0<z<a} A^+_{p,q}(z) = \lim_{z\to 0} A^+_{p,q}(z) = 0$$

и из первого соотношения (49) имеем

$$\lim_{a\to 0} \|K_a\|_{p\to q} = 0.$$

Так как $A^+_{p,q}(b) = A^+(b,\mu_b) \geq A^+(z,\mu_b)$ при $b \geq z$ и $A^+_{p,q}(b) \to 0$ при $b \to \infty$, то $A^+(\mu_b) = \sup\limits_{b\leq z} A^+(z,\mu_b)$ и $\lim\limits_{b\to\infty} \sup\limits_{b\leq z} A^+(z,\mu_b) = 0$. Следовательно, из второго соотношения (49) при $b \to \infty$ получим $\|K_b\|_{p\to q} \to 0$.

Из определения $A^+(\mu_{a,b}, K_m\chi_{(0,a)})$ легко следует, что $A^+(\mu_{a,b}, K_m\chi_{(0,a)}) \leq A^+_{p,q}(a)$. Поэтому из третьего соотношения (49) вытекает, что

$$\lim_{a\to 0} \lim_{b\to\infty} \|\widetilde{K}_{(a,b)}\|_{p\to q} \ll \lim_{a\to 0} A^+_{p,q}(a) = 0.$$

Таким образом, правая часть (48) стремится к нулю при $a \to 0$ и $b \to \infty$. Теорема $7'$ доказана.

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания, позволившие улучшить содержание статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов В. Д.* О весовом неравенстве типа Харди для производных высших порядков и их приложения // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, № 5. С. 1059–1062.
2. *Степанов В. Д.* Об одном весовом неравенстве типа Харди для производных высших порядков и их приложения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1989. Т. 187. С. 178–190.
3. *Степанов В. Д.* Двухвесовые оценки интегралов Римана — Лиувилля // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 3. С. 645–655.
4. *Степанов В. Д.* О весовом неравенстве типа Харди для дробных интегралов Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 3. С. 186–197.
5. *Степанов В. Д.* Об ограниченности и компактности одного класса интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1990. Т. 302, № 3. С. 544–545.
6. *Martin-Reyes F. I., Sawyer E.* Weighted inequalities for Riemann–Liouville fractional integrals of order one and greater // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 106, N 3. P. 727–733.
7. *Bloom S., Kerman R.* Weighted norm inequalities for operators of Hardy type // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 113, N 1. P. 135–141.
8. *Бережной Е. И.* Двухвесовые оценки для одного класса интегральных операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1992. Т. 201. С. 14–26.
9. *Ойнаров Р.* Двусторонние оценки норм некоторых классов интегральных операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1993. Т. 204. С. 240–250.
10. *Ойнаров Р.* Весовые неравенства для одного класса интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 5. С. 1076–1076.
11. *Edmunds D. E., Stepanov V. D.* On the singular numbers of certain Volterra integral operators // J. Funct. Anal. 1995. V. 134, N 1. P. 222–246.
12. *Stepanov V. D.* Weighted norm inequalities for integral operators and related topics // Nonlinear analysis, function spaces and applications: Proc. of the spring school held in Prague, May 23–28 1994. Prague, 1994. V. 5. P. 139–175.
13. *Stepanov V. D.* On the lower bounds for Schatten–von Neumann norms of certain Volterra integral operators // J. London Math. Soc. 2000. V. 61, N 2. P. 905–922.
14. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 2001. Т. 232. С. 298–317.
15. *Байарыстанов А. О.* Об одном обобщении неравенства В. Д. Степанова и его приложения. 1993. 20 с. Деп. в КазНИИНТИ Ка93, № 3975.

16. *Байарыстанов А. О.* Двухвесовая оценка операторов многократного интегрирования с весами. 1996. 14 с. Деп. в КазНИИНТИ Ка96, № 7183.

17. *Baideldinov B. L., Oinarov R.* Two-weighted estimation for operators of fractional integration operators of composition type // Докл. НАН РК. 1996. N 6. P. 16–22.

18. *Ойнаров Р., Сагиндыков Б. О.* Оценка оператора многократного интегрирования с весами на конусе монотонных функций $(1 < q < p < \infty)$ // Наука и образование Южного Казахстана. Сер. математика, информатика. 1998. Т. 2, № 7. С. 53–60.

19. *Сагиндыков Б. О.* Оценка сверху нормы одного класса интегральных операторов // Тр. междунар. научно-технической и учебно-методической конференции «Наука и образование: эффективные рычаги реализации стратегии Казахстан – 2030». Шымкент, 1998. С. 50–54.

20. *Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.* Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 21. С. 42–129. (Итоги науки и техники).

21. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 8 декабря 2005 г., окончательный вариант — 19 мая 2007 г.

Ойнаров Рыскул
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва,
ул. Мунайтпасова, 5, Астана 010008, Казахстан
o_ryskul@mail.ru