Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.955

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ГУРСА — ДАРБУ С ГРАНИЧНЫМИ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Н. И. Погодаев

Аннотация: Рассматривается управляемая система, описываемая уравнением Гурса — Дарбу. Система управляется с помощью распределенных и граничных управлений. Управления подчинены ограничениям, которые представляют собой многозначные отображения с замкнутыми, возможно, невыпуклыми значениями, зависящими от фазовой переменной. Наряду с исходными ограничениями рассматриваются овыпукленные ограничения и ограничения, значениями которых являются крайние точки овыпукленных ограничений. Изучаются вопросы существования решений и устанавливается взаимосвязь между решениями при различных ограничениях.

Ключевые слова: непрерывные селекторы, граничные и распределенные управления, плотность, граничность, необходимые и достаточные условия замкнутости.

§ 1. Постановка задачи

Пусть $I_1 = [0,a]$, $I_2 = [0,b]$, $a, b > 0$, $\Omega = I_1 \times I_2$; $X = \mathbb{R}^N$, $Y = \mathbb{R}^M$; $C(\Omega, X)$, $C(I_1, X)$, $C(I_2, X)$ — пространства непрерывных функций соответственно из Ω, I_1, I_2 в X с sup-нормами; $\mathscr{L}(Y, X)$ — пространство непрерывных линейных операторов из Y в X (пространство матриц размера $N \times M$).

Рассмотрим управляемую систему

$$z_{xy} = F(x, y, z(x,y)) + A(x, y, z(x,y))u(x,y), \tag{1.1}$$

$x \in I_1$, $y \in I_2$, $z \in X$, с граничными условиями

$$z(x,0) = \varphi(x) + \int_0^x u^1(s)\,ds, \quad z(0,y) = \psi(y) + \int_0^y u^2(t)\,dt, \quad \varphi(0) = \psi(0) \tag{1.2}$$

и со смешанными ограничениями на управления

$$u(x,y) \in \mathscr{U}(x, y, z(x,y)), \quad u^1(x) \in \mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)), \quad u^2(y) \in \mathscr{U}_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)). \tag{1.3}$$

Здесь $A : \Omega \times X \to \mathscr{L}(Y, X)$, $F : \Omega \times X \to X$ — однозначные отображения; $\mathscr{U} : \Omega \times X \to Y$, $\mathscr{U}_1 : I_1 \times X \to X$, $\mathscr{U}_2 : I_2 \times X \to X$ — многозначные отображения с компактными значениями; $\mathscr{V}_1 : C(\Omega, X) \to C(I_1, X)$, $\mathscr{V}_2 : C(\Omega, X) \to C(I_2, X)$ — непрерывные нелинейные операторы; $\varphi \in C(I_1, X)$, $\psi \in C(I_2, X)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00247–а).

Наряду с ограничениями (1.3) будем рассматривать ограничения

$$u(x,y) \in \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z(x,y)),\\ u^1(x) \in \operatorname{co}\mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)), \quad u^2(y) \in \operatorname{co}\mathscr{U}_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)) \tag{1.4}$$

и

$$u(x,y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z(x,y)),\\ u^1(x) \in \operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)), \quad u^2(y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)), \tag{1.5}$$

где символ $\operatorname{co} E$ обозначает выпуклую оболочку множества E, а $\operatorname{ext}\operatorname{co} E$ — совокупность всех крайних точек множества $\operatorname{co} E$.

В работе мы рассматриваем вопросы существования решений систем ((1.1), (1.2), (1.3)), ((1.1), (1.2), (1.4)) и ((1.1), (1.2), (1.5)), а также устанавливаем взаимосвязи между множествами этих решений.

В случае, когда $X = Y$, $F(x,y,z) \equiv 0_X$, $\mathscr{U}_1(x,z) \equiv 0_X$, $\mathscr{U}_2(y,z) \equiv 0_X$, где 0_X — нулевой элемент пространства X, и $A(x,y,z)$ является тождественным оператором из X в X, управляемая система (1.1), (1.2) с ограничениями (1.3), (1.4), (1.5) переходит соответственно в дифференциальные включения

$$z_{xy} \in \mathscr{U}(x,y,z(x,y)), \tag{1.6}$$

$$z_{xy} \in \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z(x,y)), \tag{1.7}$$

$$z_{xy} \in \operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z(x,y)) \tag{1.8}$$

с граничными условиями

$$z(x,0) = \varphi(x), \quad z(0,y) = \psi(y), \quad \varphi(0) = \psi(0).$$

Уравнениями Гурса — Дарбу описываются различные физические явления, например, процесс сорбции газа [1, 2]. Поскольку в реальных процессах существуют возмущения, изменяющиеся в определенных границах, то учет этих возмущений приводит к включениям. В связи с этим изучению включения (1.6) посвящено огромное количество работ. Подавляющее большинство из них касается вопросов существования решений в рамках тех или иных предположений. Для конечномерного пространства подобные вопросы изучались в [3, 4] и др., а для бесконечномерного — в [5–7] и др. Для многозначного отображения $\mathscr{U}$ с компактными значениями в бесконечномерном пространстве включения вида (1.6)–(1.8), в которых вместо co стоит $\overline{\operatorname{co}}$ (замкнутая выпуклая оболочка), изучались в [8]. В этой работе были доказаны теоремы существования решений включений (1.6)–(1.8) и плотность множеств решений включений (1.6), (1.8) в множестве решений включения (1.7).

Поскольку дифференциальные включения (1.6)–(1.8) являются частными случаями управляемой системы (1.1) с ограничениями (1.3)–(1.5), результаты данной работы включают в себя результаты работ [3, 4] и др. и дополняют результаты работы [8].

§ 2. Основные обозначения, определения и предварительные сведения

Пусть $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — банахово пространство. Символ w-Z означает, что пространство Z наделено слабой топологией. Такое же обозначение мы используем для подмножеств из Z. В остальных случаях считаем, что пространство Z

наделено нормированной топологией. Мы будем использовать следующие обозначения: B_Z — открытый единичный шар в Z с центром в нуле, $\overline{B}_Z$ — его замыкание; $\operatorname{co} E$, $\overline{\operatorname{co}}\, E$ — выпуклая и замкнутая выпуклая оболочки множества E; $\operatorname{ext} \overline{\operatorname{co}}\, E$ — совокупность всех крайних (экстремальных) точек множества $\overline{\operatorname{co}}\, E$.

Напомним, что точка $z \in E$ называется *крайней* (*экстремальной*) *точкой* замкнутого выпуклого множества E, если она не является серединой отрезка с концами из E.

Пусть $\operatorname{comp} Z$ ($\operatorname{conv} Z$) — совокупность всех компактных (выпуклых компактных) подмножеств из Z. На множестве $\operatorname{comp} Z$ определим метрику Хаусдорфа:

$$D_Z(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} d_Z(x,B), \sup_{y\in B} d_Z(y,A)\},$$

где $d_Z(x,B)$ — расстояние от точки x до множества B.

Определение 2.1. Пусть W — метрическое пространство. Отображение $\Gamma : W \to \operatorname{comp} Z$ называется *непрерывным по Хаусдорфу* (D_Z-*непрерывным*), если оно непрерывно в метрике $D_Z(\cdot,\cdot)$.

Определение 2.2. Пусть (T,Σ) — измеримое пространство. Многозначное отображение $\Gamma : T \to Z$ называется *измеримым*, если $\{t \in T : \Gamma(t) \cap E \neq \varnothing\} \in \Sigma$ для любого замкнутого $E \subset Z$.

Через $L_1(T,Z)$ обозначим банахово пространство интегрируемых функций (классов эквивалентности) из T в Z.

В пространствах $L_1(\Omega,Y)$, $L_1(I_1,X)$ и $L_1(I_2,X)$ помимо стандартной нормы будем рассматривать следующие нормы:

$$\|f\|_w = \sup_{\substack{0\le x_1<x_2\le a\\ 0\le y_1<y_2\le b}} \left\| \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2} f\,d\mu_2 \right\|_Y, \quad f\in L_1(\Omega,Y),$$

$$\|f\|_w^1 = \sup_{0\le x_1<x_2\le a} \left\| \int\limits_{x_1}^{x_2} f\,d\mu_1 \right\|_X, \quad f\in L_1(I_1,X),$$

$$\|f\|_w^2 = \sup_{0\le y_1<y_2\le b} \left\| \int\limits_{y_1}^{y_2} f\,d\mu_1 \right\|_X, \quad f\in L_1(I_2,X).$$

Здесь μ_1 — мера Лебега в $\mathbb{R}$, μ_2 — мера Лебега в $\mathbb{R}^2$. Пространства $(L_1(\Omega,Y), \|\cdot\|_w)$, $\big(L_1(I_1,X), \|\cdot\|_w^1\big)$ и $\big(L_1(I_2,X), \|\cdot\|_w^2\big)$ будем обозначать соответственно через $L_1^w(\Omega,Y)$, $L_1^w(I_1,X)$ и $L_1^w(I_2,X)$. Такие же обозначения будут использоваться для подмножеств этих пространств.

В дальнейшем точку множества Ω будем обозначать либо через (x,y), либо через ω.

Лемма 2.1. *Пусть*

$$E := \{f\in L_1(\Omega,Y) : \|f(x,y)\|_Y \le g(x,y) \text{ п. в.}\}, \quad g(\cdot)\in L_1(\Omega,\mathbb{R}^+).$$

Тогда топологии на множествах w-E и E^w совпадают.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{T}(f)(x,y) := \int\limits_0^x\int\limits_0^y f(s,t)\,dsdt.$$

Известно [8], что оператор $\mathcal{T} : w\text{-}E \to C(\Omega, X)$ непрерывен. Очевидно, для любых $0 \le x_1 < x_2 \le a$, $0 \le y_1 < y_2 \le b$ и $f \in w\text{-}E$

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f\,d\mu_2 = \int_0^{x_2}\int_0^{y_2} f\,d\mu_2 - \int_0^{x_2}\int_0^{y_1} f\,d\mu_2 - \int_0^{x_1}\int_0^{y_2} f\,d\mu_2 + \int_0^{x_1}\int_0^{y_1} f\,d\mu_2$$
$$= \mathcal{T}(f)(x_2, y_2) - \mathcal{T}(f)(x_2, y_1) - \mathcal{T}(f)(x_1, y_2) + \mathcal{T}(f)(x_1, y_1).$$

Отсюда следует, что

$$\|\mathcal{T}(f)\|_{C(\Omega,X)} \le \|f\|_w \le 4\|\mathcal{T}(f)\|_{C(\Omega,X)}. \tag{2.1}$$

Пусть $i : w\text{-}E \to E^w$ — тождественное отображение. Покажем, что i непрерывно. Известно [9, теорема 4.4], что $w\text{-}E$ — метризуемый компакт. Поэтому если $f_n \to f$ в $w\text{-}E$, то $\mathcal{T}(f_n) \to \mathcal{T}(f)$ в $C(\Omega, X)$ в силу непрерывности $\mathcal{T}$. Но тогда из (2.1) следует, что $f_n \to f$ в E^w, а следовательно, отображение i непрерывно.

Так как $i : w\text{-}E \to E^w$ непрерывно и $w\text{-}E$ — компакт, то i — гомеоморфизм [10]. Лемма доказана.

Аналогичные утверждения верны и для подобных множеств из $L_1(I_1, X)$ и $L_1(I_2, X)$.

Определение 2.3. *Решением управляемой системы* (1.1)–(1.3) называется четверка (z, u, u^1, u^2), $z \in C(\Omega, X)$, $u \in L_1(\Omega, Y)$, $u^1 \in L_1(I_1, X)$, $u^2 \in L_1(I_2, X)$ такая, что

$$z(x, y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x u^1(s)\,ds + \int_0^y u^2(t)\,dt$$
$$+ \int_0^x\int_0^y (F(s, t, z(s, t)) + A(s, t, z(s, t))u(s, t))\,dsdt, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{2.2}$$

и почти всюду выполняются включения (1.3).

Аналогично определяются решения систем (1.1), (1.2), (1.4) и (1.1), (1.2), (1.5). Множества решений управляемой системы (1.1) с ограничениями (1.3), (1.4), (1.5) обозначим соответственно через $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$.

Определение 2.4. Пусть $E \subset (0, a)\times(0, b)$ — измеримое множество. Точка $(x, y) \in E$ называется *точкой правой плотности множества* E, если

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\mu_2(\{[x, x + h] \times [y, y + h]\} \cap E)}{h^2} = 1.$$

Лемма 2.2. *Почти каждая точка $(x, y) \in E$ является точкой правой плотности.*

Доказательство. Согласно следствию 7 [11, гл. III, § 12] если $f \in L_1(\Omega, \mathbb{R})$, то

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h^2} \int_x^{x+h}\int_y^{y+h} f(s, t)\,ds\,dt = f(x, y) \quad \text{п. в. на } (0, a) \times (0, b).$$

Взяв в качестве f характеристическую функцию множества E, получим требуемый результат.

Определение 2.5. Пусть E — замкнутое множество. Будем говорить, что множество $G \subset E$ является *граничным для множества* E, если $\overline{E \setminus G} = E$, где черта означает замыкание.

Всюду в дальнейшем будем считать, что выполняются следующие предположения.

Гипотеза $\mathcal{H}(A)$. *$A : \Omega \times X \to \mathscr{L}(Y, X)$ является отображением Каратеодори, и существует такое $\alpha > 0$, что $\|A(x, y, z)\|_{\mathscr{L}} \le \alpha(1 + \|z\|_X)$ для всех $z \in X$ п. в. на Ω.*

Гипотеза $\mathcal{H}(F)$. *$F : \Omega \times X \to X$ является отображением Каратеодори, и существует такое $\beta(\cdot) \in L_1(\Omega, \mathbb{R}^+)$, что $\|F(x, y, z)\|_X \le \beta(x, y)(1 + \|z\|_X)$ для всех $z \in X$ п. в. на Ω.*

Гипотеза $\mathcal{H}(\mathscr{U})$. *$\mathscr{U} : \Omega \times X \to \operatorname{comp} Y$ обладает свойствами:*
(1) *для каждого $z \in X$ отображение $(x, y) \mapsto \mathscr{U}(x, y, z)$ измеримо;*
(2) *п. в. на Ω отображение $z \mapsto \mathscr{U}(x, y, z)$ D_Y-непрерывно;*
(3) *существует такое $p(\cdot) \in L_1(\Omega, \mathbb{R}^+)$, что*

$$\|\mathscr{U}(x, y, z)\|_Y = \sup\{\|u\|_Y : u \in \mathscr{U}(x, y, z)\} \le p(x, y)$$

для всех $z \in X$ п. в. на Ω.

Гипотеза $\mathcal{H}(\mathscr{U}_1)$. *$\mathscr{U}_1 : I_1 \times X \to \operatorname{comp} X$ обладает свойствами:*
(1) *для каждого $z \in X$ отображение $x \mapsto \mathscr{U}_1(x, z)$ измеримо;*
(2) *п. в. на I_1 отображение $z \mapsto \mathscr{U}_1(x, z)$ D_X-непрерывно;*
(3) *существует такое $p_1(\cdot) \in L_1(I_1, \mathbb{R}^+)$, что $\|\mathscr{U}_1(x, z)\|_X \le p_1(x)(1 + \|z\|_X)$ для всех $z \in X$ п. в. на I_1.*

Гипотеза $\mathcal{H}(\mathscr{U}_2)$. *$\mathscr{U}_2 : I_2 \times X \to \operatorname{comp} X$ обладает свойствами:*
(1) *для каждого $z \in X$ отображение $y \mapsto \mathscr{U}_2(y, z)$ измеримо;*
(2) *п. в. на I_2 отображение $z \mapsto \mathscr{U}_2(y, z)$ D_X-непрерывно;*
(3) *существует такое $p_2(\cdot) \in L_1(I_2, \mathbb{R}^+)$, что*

$$\|\mathscr{U}_2(y, z)\|_X \le p_2(y)$$

для всех $z \in X$ п. в. на I_2.

Гипотеза $\mathcal{H}(\mathscr{V})$**.** *Операторы $\mathscr{V}_1 : C(\Omega, X) \to C(I_1, X)$ и $\mathscr{V}_2 : C(\Omega, X) \to C(I_2, X)$ непрерывны и существует такое $\gamma > 0$, что*

$$\|\mathscr{V}_1(z)(x)\|_X \le \gamma(1 + \sup_{y \in I_2} \|z(x, y)\|_X)$$

для всех $z \in C(\Omega, X)$, $x \in I_1$.

§ 3. Вспомогательные результаты

Пусть (z, u, u^1, u^2) принадлежит одному из множеств $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ или $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$. Положим $m(x) := \max\limits_{y \in I_2} \|z(x, y)\|_X$. Так как функция $z(\cdot)$ равномерно непрерывна на Ω, то функция $m(\cdot)$ непрерывна на I_1.

Из наших предположений следует, что функция $(x, y) \mapsto F(x, y, z(x, y)) + A(x, y, z(x, y))u(x, y)$ интегрируема, поэтому равенство (2.2) имеет смысл. Воспользовавшись равенством (2.2) и гипотезами $\mathcal{H}(A)$, $\mathcal{H}(F)$, $\mathcal{H}(\mathscr{V})$, $\mathcal{H}(\mathscr{U})(3)$, $\mathcal{H}(\mathscr{U}_1)(3)$, $\mathcal{H}(\mathscr{U}_2)(3)$, получим оценку

$$\|z(x, y)\|_X \le m(x) \le r_0 + \int_0^x l(s) m(s)\, ds, \quad x \in I_1, \tag{3.1}$$

где

$$r_0 = \max_{\Omega} \|\varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0)\|_X + \int\limits_0^a (1+\gamma)p_1(s)\,ds + \int\limits_0^b p_2(t)\,dt + \int\limits_0^a \int\limits_0^b (\beta(s,t) + \alpha p(s,t))\,dsdt,$$

$$l(s) = \gamma p_1(s) + \int\limits_0^b (\beta(s,t) + \alpha p(s,t))\,dt.$$

Пусть

$$r(x) := r_0 \exp\left\{ \int\limits_0^x l(s)\,ds \right\}. \tag{3.2}$$

Тогда из (3.1), (3.2) и неравенства Беллмана — Гронуолла следует, что

$$\|z(x,y)\|_X \le r(x), \quad x \in I_1,\ y \in I_2. \tag{3.3}$$

Положим

$$S := \{f \in L_1(\Omega, Y) : \|f(x,y)\|_Y \le p(x,y) \text{ п. в. на } \Omega\},$$

$$Q := \{f \in L_1(\Omega, X) : \|f(x,y)\|_X \le (\beta(x,y) + \alpha p(x,y))(1 + r(x)) \text{ п. в. на } \Omega\},$$

$$Q_1 := \{f \in L_1(I_1, X) : \|f(x)\|_X \le p_1(x)(1 + \gamma(1 + r(x))) \text{ п. в. на } I_1\},$$

$$Q_2 := \{f \in L_1(I_2, X) : \|f(y)\|_X \le p_2(y) \text{ п. в. на } I_2\},$$

$$K := \Bigg\{ z \in C(\Omega, X) : z(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int\limits_0^x f_1\,ds + \int\limits_0^y f_2\,dt + \int\limits_0^x \int\limits_0^y f\,dsdt,\ f \in Q,\ f_1 \in Q_1,\ f_2 \in Q_2 \Bigg\}.$$

Согласно теореме 4.4 в [9] множества w-S, w-Q, w-Q_1, w-Q_2 являются выпуклыми, метризуемыми компактами, а множество K является выпуклым компактом в $C(\Omega, X)$ (см. [8]).

Из (3.2) и определений множеств Q, Q_1, Q_2 и K следует, что

$$\|z(x,y)\|_X \le r(x) \text{ для всех } z \in K, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{3.4}$$

Рассмотрим операторы $\mathcal{F} : C(\Omega, X) \times L_1(\Omega, Y) \to L_1(\Omega, X)$ и $\mathcal{P} : L_1(\Omega, X) \times L_1(I_1, X) \times L_1(I_2, X) \to C(\Omega, X)$, определенные по правилу

$$\mathcal{F}(z,u)(x,y) := F(x,y,z(x,y)) + A(x,y,z(x,y))u(x,y),$$

$$\mathcal{P}(v, v^1, v^2)(x,y) := \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int\limits_0^x v^1(s)\,ds + \int\limits_0^y v^2(t)\,dt + \int\limits_0^x \int\limits_0^y v(s,t)\,dsdt.$$

Лемма 3.1. *Оператор $\mathcal{F}$ является непрерывным из $K \times w\text{-}S$ в $w\text{-}Q$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что оператор $\mathcal{F}$ действует из $K \times S$ в Q. Это следует из определения множеств K, S и Q, неравенства (3.4) и гипотез $\mathcal{H}(A)$ и $\mathcal{H}(F)$. Покажем, что оператор $\mathcal{F} : K \times w\text{-}S \to w\text{-}Q$ непрерывен. Так как $w\text{-}S$ и $w\text{-}Q$ являются метризуемыми компактами, достаточно доказать секвенциальную непрерывность этого оператора.

Пусть $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K$, $z_n \to z$ в $C(\Omega, X)$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, $u_n \to u$ в $w\text{-}L_1(\Omega, Y)$. Из гипотезы $\mathcal{H}(F)$ и теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что последовательность $F(\omega, z_n(\omega))$, $n \geq 1$, сходится к $F(\omega, z(\omega))$ в $L_1(\Omega, X)$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что для любой измеримой существенно ограниченной функции $h : \Omega \to X$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{\Omega} \langle h(\omega), A(\omega, z_n(\omega))u_n(\omega) - A(\omega, z(\omega))u(\omega)\rangle_X \, dxdy \right| = 0. \tag{3.5}$$

Запишем подынтегральное выражение в (3.5) в виде

$$\begin{aligned} &\langle h(\omega), A(\omega, z_n(\omega))u_n(\omega) - A(\omega, z(\omega))u(\omega)\rangle_X \\ &= \langle A^*(\omega, z(\omega))h(\omega), u_n(\omega) - u(\omega)\rangle_Y + \langle h(\omega), (A(\omega, z_n(\omega)) - A(\omega, z(\omega)))u_n(\omega)\rangle_X, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где A^* — оператор, сопряженный к A (транспонированная матрица). Из гипотезы $\mathcal{H}(A)$ следует, что функция $\omega \mapsto A^*(\omega, z(\omega))h(\omega)$ является измеримой существенно ограниченной функцией со значениями в Y. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{\Omega} \langle A^*(\omega, z(\omega))h(\omega), u_n(\omega) - u(\omega)\rangle_Y \, dxdy \right| = 0. \tag{3.7}$$

Воспользовавшись гипотезой $\mathcal{H}(A)$, определением множества S и неравенством (3.4), получим, что

$$\begin{aligned} &|\langle h(\omega), (A(\omega, z_n(\omega)) - A(\omega, z(\omega)))u_n(\omega)\rangle_X| \\ &\qquad \leq p(\omega)\|h(\omega)\|_X \|A(\omega, z_n(\omega)) - A(\omega, z(\omega))\|_{\mathscr{L}} \\ &\qquad\qquad \leq 2\alpha p(\omega)\|h(\omega)\|_X (1 + \max_{x\in I_1} r(x)) \quad \text{п. в. на } \Omega. \end{aligned}$$

Из этого неравенства, гипотезы $\mathcal{H}(A)$ и теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{\Omega} \langle h(\omega), (A(\omega, z_n(\omega)) - A(\omega, z(\omega)))u_n(\omega)\rangle_X \, dxdy \right| = 0. \tag{3.8}$$

Теперь равенство (3.5) вытекает из (3.6)–(3.8). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Оператор $\mathcal{P}$ непрерывен из $w\text{-}Q \times w\text{-}Q_1 \times w\text{-}Q_2$ в K.*

Доказательство. Известно, что любой непрерывный линейный оператор из банахова пространства Z в банахово пространство W является непрерывным из $w\text{-}Z$ в $w\text{-}W$. Поскольку интегралы, входящие в определение оператора $\mathcal{P}$, являются непрерывными линейными операторами из соответствующих пространств интегрируемых функций в соответствующие пространства непрерывных функций, то оператор $\mathcal{P}$ непрерывен из $w\text{-}L_1(\Omega, X) \times w\text{-}L_1(I_1, X) \times w\text{-}L_1(I_2, X)$ в $w\text{-}C(\Omega, X)$. Из неравенства (3.4) следует, что $\mathcal{P}(v, v^1, v^2) \in K$ для всех $v \in Q$, $v^1 \in Q_1$, $v^2 \in Q_2$. Так как множество K является компактом в $C(\Omega, X)$, теорема доказана.

§ 4. Существование решений

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос существования решений системы (1.1), (1.2) с ограничениями (1.3)–(1.5).

Теорема 4.1. *Множества $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$ непусты.*

Доказательство. Так как для любого компактного множества E в конечномерном пространстве $\mathrm{ext\,co}\,E \subset E \subset \mathrm{co}\,E$, то $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}} \subset \mathscr{R} \subset \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$. Поэтому нам достаточно показать, что $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}} \neq \varnothing$. Согласно утверждению 8.2 в [9] существуют непрерывные отображения $g : K \to L_1(\Omega, Y)$, $g^1 : K \to L_1(I_1, X)$, $g^2 : K \to L_1(I_2, X)$ такие, что для каждого $z \in K$

$$\begin{aligned} &g(z)(x,y) \in \mathrm{ext\,co}\,\mathscr{U}(x,y,z(x,y)) \quad \text{п. в. на } \Omega,\\ &g^1(z)(x) \in \mathrm{ext\,co}\,\mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)) \quad \text{п. в. на } I_1,\\ &g^2(z)(y) \in \mathrm{ext\,co}\,\mathscr{U}_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)) \quad \text{п. в. на } I_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Из этих включений и гипотез $\mathcal{H}(\mathscr{U})(3)$, $\mathcal{H}(\mathscr{U}_1)(3)$, $\mathcal{H}(\mathscr{U}_2)(3)$ вытекает, что для всех $z \in K$ будет $g(z) \in S$, $g^1(z) \in Q_1$, $g^2(z) \in Q_2$, т. е. $g \in C(K,S)$, $g^1 \in C(K,Q_1)$, $g^2 \in C(K,Q_2)$. Тогда $g \in C(K, w\text{-}S)$, $g^1 \in C(K, w\text{-}Q_1)$, $g^2 \in C(K, w\text{-}Q_2)$. Отсюда и из непрерывности отображений $\mathcal{F} : K \times w\text{-}S \to w\text{-}Q$ и $\mathcal{P} : w\text{-}Q \times w\text{-}Q_1 \times w\text{-}Q_2 \to K$ следует, что оператор $\mathcal{T}$, определенный по правилу

$$\mathcal{T}(z)(x,y) := \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x g^1(z)(s)\,ds + \int_0^y g^2(z)(t)\,dt + \int_0^x\int_0^y \mathcal{F}(z,g(z))(s,t)\,dsdt,$$

является непрерывным из K в K. Так как K — выпуклый компакт, по теореме Шаудера существует неподвижная точка z_* оператора $\mathcal{T}$, т. е. $z_* = \mathcal{T}(z_*)$.

Положим $u_* := g(z_*)$, $u_*^1 := g^1(z_*)$, $u_*^2 := g^2(z_*)$. Тогда

$$z_*(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x u_*^1(s)\,ds + \int_0^y u_*^2(t)\,dt + \int_0^x\int_0^y \mathcal{F}(z_*,u_*)(s,t)\,dsdt.$$

Из последнего равенства, определения оператора $\mathcal{F}$ и включений (4.1) следует, что четверка (z_*, u_*, u_*^1, u_*^2) — решение системы (1.1), (1.2), (1.5), т. е. $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}} \neq \varnothing$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Множество $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ компактно в пространстве*

$$C(\Omega,X) \times w\text{-}L_1(\Omega,Y) \times w\text{-}L_1(I_1,X) \times w\text{-}L_1(I_2,X). \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ и $z_n \to z$ в $C(\Omega,X)$, $u_n \to u$ в $w\text{-}L_1(\Omega,Y)$, $u_n^1 \to u^1$ в $w\text{-}L_1(I_1,X)$, $u_n^2 \to u^2$ в $w\text{-}L_1(I_2,X)$. Согласно определению решения системы (1.1), (1.2), (1.4) для всех $n \geq 1$

$$z_n(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x u_n^1(s)\,ds + \int_0^y u_n^2(t)\,dt + \int_0^x\int_0^y \mathcal{F}(z_n,u_n)(s,t)\,dsdt \tag{4.3}$$

и

$$u_n(x,y) \in \mathrm{co}\,\mathscr{U}(x,y,z_n(x,y)), \quad u_n^1(x) \in \mathrm{co}\,\mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z_n)(x)),$$

$$u_n^2(y) \in \operatorname{co} \mathscr{U}_2(y, \mathscr{V}_2(z_n)(y)).$$

Поскольку $z_n \in K$, $u_n \in S$, $u_n^1 \in Q_1$, $u_n^2 \in Q_2$, из (4.3) и непрерывности операторов $\mathcal{F} : K \times w\text{-}S \to w\text{-}Q$ и $\mathcal{P} : w\text{-}Q \times w\text{-}Q_1 \times w\text{-}Q_2 \to K$ следует, что

$$z(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x u^1(s)\,ds + \int_0^y u^2(t)\,dt + \int_0^x \int_0^y \mathcal{F}(z,u)(s,t)\,dsdt.$$

Проверим справедливость включений (1.4). Покажем, что

$$u(x,y) \in \operatorname{co} \mathscr{U}(x,y,z(x,y)) \quad \text{п. в. на } \Omega.$$

Для этого рассмотрим многозначные отображения

$$G_n(x,y) = \overline{\operatorname{co}} \bigcup_{k \ge n} u_k(x,y), \quad n \ge 1.$$

Согласно гипотезе $\mathcal{H}(\mathscr{U})(3)$ имеем $\|G_n(x,y)\| \le p(x,y)$ п. в. на Ω, $n \ge 1$. Из теоремы 5.6 в [12] следует, что отображения G_n, $n \ge 1$, измеримы. Поэтому по теореме 4.4 в [9] множества $S_n = \{g \in L_1(\Omega, Y) : g(x,y) \in G_n(x,y) \text{ п. в.}\}$, $n \ge 1$, являются выпуклыми метризуемыми компактами в $w\text{-}L_1(\Omega, Y)$. Последнее означает, что $u \in \bigcap_{n \ge 1} S_n$ и, следовательно,

$$u(x,y) \in \bigcap_{n \ge 1} \overline{\operatorname{co}} \bigcup_{k \ge n} u_k(x,y) \quad \text{п. в.} \tag{4.4}$$

В силу гипотезы $\mathcal{H}(\mathscr{U})(2)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такое, что

$$\bigcup_{k \ge n_0} \mathscr{U}(x,y,z_k(x,y)) \subset \mathscr{U}(x,y,z(x,y)) + \varepsilon B_Y \subset \operatorname{co} \mathscr{U}(x,y,z(x,y)) + 2\varepsilon \overline{B}_Y \quad \text{п. в.} \tag{4.5}$$

Так как множество $\operatorname{co} \mathscr{U}(x,y,z(x,y))$ является выпуклым компактом в Y при всех $(x,y) \in \Omega$, то множество $\operatorname{co} \mathscr{U}(x,y,z(x,y)) + 2\varepsilon \overline{B}_Y$ также будет выпуклым компактом при всех $(x,y) \in \Omega$. Ввиду произвольности ε из (4.4) и (4.5) непосредственно вытекает, что

$$u(x,y) \in \bigcap_{n \ge 1} \overline{\operatorname{co}} \bigcup_{k \ge n} \mathscr{U}(x,y,z_k(x,y)) \subset \operatorname{co} \mathscr{U}(x,y,z(x,y)) \quad \text{п. в.}$$

Справедливость включений

$$u^1(x) \in \operatorname{co} \mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \quad \text{и} \quad u^2(y) \in \operatorname{co} \mathscr{U}_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y))$$

доказывается аналогично.

Таким образом, мы показали, что $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ секвенциально замкнуто в пространстве (4.2). Так как $\mathscr{R}_{\mathrm{co}} \subset K \times S \times Q_1 \times Q_2$ и множество $K \times S \times Q_1 \times Q_2$ является метризуемым компактом в пространстве (4.2), то множество $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ также является компактом в пространстве (4.2). Теорема доказана.

§ 5. Плотность

В этом параграфе установим взаимосвязь между множествами $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ и $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$. Мы предполагаем, что выполняются гипотезы $\mathcal{H}(A)$, $\mathcal{H}(F)$, $\mathcal{H}(\mathscr{V})$, $\mathcal{H}(\mathscr{U})$, $\mathcal{H}(\mathscr{U}_1)$, $\mathcal{H}(\mathscr{U}_2)$ и следующие дополнительные предположения.

Гипотеза $\mathcal{H}^*(A)$. *Существует такое* $m_1 > 0$, *что*

$$\|A(x,y,z_1) - A(x,y,z_2)\|_{\mathscr{L}} \le m_1\|z_1 - z_2\|_X$$

для любых $z_1, z_2 \in X$ *п. в. на* Ω.

Гипотеза $\mathcal{H}^*(F)$. *Существует такое* $m_2(\cdot) \in L_1(\Omega, \mathbb{R}^+)$, *что*

$$\|F(x,y,z_1) - F(x,y,z_2)\|_X \le m_2(x,y)\|z_1 - z_2\|_X$$

для любых $z_1, z_2 \in X$ *п. в. на* Ω.

Гипотеза $\mathcal{H}^*(\mathscr{V})$. *Существует такое* $\nu > 0$, *что*

$$\|\mathscr{V}_1(z_1)(x) - \mathscr{V}_1(z_2)(x)\|_X \le \nu \sup_{y \in I_2} \|z_1(x,y) - z_2(x,y)\|_X$$

для любых $z_1(\cdot), z_2(\cdot) \in C(\Omega, X)$, $x \in I_1$.

Гипотеза $\mathcal{H}^*(\mathscr{U})$. *Существует такое* $l(\cdot) \in L_1(\Omega, \mathbb{R}^+)$, *что*

$$D_Y(\operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z_1), \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z_2)) \le l(x,y)\|z_1 - z_2\|_X$$

для любых $z_1, z_2 \in X$ *п. в. на* Ω.

Гипотеза $\mathcal{H}^*(\mathscr{U}_1)$. *Существует такое* $l_1(\cdot) \in L_1(I_1, \mathbb{R}^+)$, *что*

$$D_X(\operatorname{co}\mathscr{U}_1(x,z_1), \operatorname{co}\mathscr{U}_1(x,z_2)) \le l_1(x)\|z_1 - z_2\|_X$$

для любых $z_1, z_2 \in X$ *п. в. на* I_1.

Гипотеза $\mathcal{H}^*(\mathscr{U}_2)$. *Отображение* $\mathscr{U}_2$ *не зависит от* z.

Теорема 5.1. *Для каждого* $\left(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\right) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ *существует последовательность* $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \in \mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$, *сходящаяся к* $\left(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\right)$ *в пространстве* (4.2).

Доказательство. Пусть $\left(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\right) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$. Согласно [13, утверждение 2.3, теорема 3.1] существуют непрерывные отображения $f_n : K \to L_1(\Omega, Y)$, $f_n^1 : K \to L_1(I_1, X)$, $n \ge 1$, такие, что для всех $z \in K$

$$f_n(z)(x,y) \in \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z(x,y)) \text{ п. в. на } \Omega,$$

$$f_n^1(z)(x) \in \operatorname{co}\mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \text{ п. в. на } I_1$$

и

$$\|u_*(x,y) - f_n(z)(x,y)\|_Y < 1/n + l(x,y)\|z_*(x,y) - z(x,y)\|_X \quad \text{п. в. на } \Omega, \tag{5.1}$$

$$\|u_*^1(x) - f_n^1(z)(x)\|_X < 1/n + l_1(x)\|\mathscr{V}_1(z_*)(x) - \mathscr{V}_1(z)(x)\|_X \quad \text{п. в. на } I_1. \tag{5.2}$$

Согласно утверждению 6.9 в [8] существуют непрерывные отображения $g_n : K \to L_1(\Omega, Y)$, $g_n^1 : K \to L_1(I_1, X)$ и функции $g_n^2 \in L_1(I_2, X)$, $n \ge 1$, такие, что для всех $z \in K$

$$g_n(z)(x,y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z(x,y)) \quad \text{п. в. на } \Omega,$$

$$g_n^1(z)(x) \in \operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \text{ п. в. на } I_1, \quad g_n^2(y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co}\mathscr{U}_2(y) \text{ п. в. на } I_2$$

и

$$\|f_n(z) - g_n(z)\|_w < 1/n, \tag{5.3}$$

$$\left\|f_n^1(z) - g_n^1(z)\right\|_w^1 < 1/n, \tag{5.4}$$

$$\left\|u^2_* - g^2_n\right\|^2_w < 1/n. \tag{5.5}$$

Рассмотрим операторы

$$\mathcal{T}_n(z)(x,y) := \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) \\ + \int\limits_0^x g^1_n(z)(s)\,ds + \int\limits_0^y g^2_n(t)\,dt + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \mathcal{F}(z, g_n(z))(s,t)\,dsdt, \quad n \ge 1.$$

Рассуждая, как и в § 4, можно доказать, что операторы $\mathcal{T}_n$ имеют неподвижные точки z_n, т. е. $z_n = \mathcal{T}_n(z_n)$, $n \ge 1$. Положим $v_n := f_n(z_n)$, $v^1_n := f^1_n(z_n)$, $u_n := g_n(z_n)$, $u^1_n := g^1_n(z_n)$, $u^2_n := g^2_n$. Ясно, что $\left(z_n, u_n, u^1_n, u^2_n\right) \in \mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$.

Покажем, что $z_n \to z_*$ в $C(\Omega, X)$. Очевидно, что для всех $(x,y) \in \Omega$ выполняется неравенство

$$\|z_*(x,y) - z_n(x,y)\|_X \le \left\|\int\limits_0^x \left[u^1_*(s) - u^1_n(s)\right] ds\right\|_X + \left\|\int\limits_0^y \left[u^2_*(t) - u^2_n(t)\right] dt\right\|_X \\ + \left\|\int\limits_0^x \int\limits_0^y [F(s,t,z_*(s,t)) - F(s,t,z_*(s,t))]\,dsdt\right\|_X \\ + \left\|\int\limits_0^x \int\limits_0^y [A(s,t,z_*(s,t))u_*(s,t) - A(s,t,z_n(s,t))u_n(s,t)]\,dsdt\right\|_X. \tag{5.6}$$

Оценим каждое слагаемое в этом неравенстве.

1. Из $\mathcal{H}^*(\mathscr{V})$, (5.2) и (5.4) следует, что

$$\left\|\int\limits_0^x \left[u^1_*(s) - u^1_n(s)\right] ds\right\|_X \le \left\|\int\limits_0^x \left[u^1_*(s) - v^1_n(s)\right] ds\right\|_X + \left\|\int\limits_0^x \left[v^1_n(s) - u^1_n(s)\right] ds\right\|_X \\ \le \nu \int\limits_0^x l_1(x) \sup_{t \in I_2} \|z_*(s,t) - z_n(s,t)\|_X\,ds.$$

2. Согласно (5.5)

$$\left\|\int\limits_0^y \left[u^2_*(t) - u^2_n(t)\right] dt\right\|_X \le \|u^2_* - u^2_n\|^2_w < \frac{1}{n}.$$

3. На основании $\mathcal{H}^*(F)$

$$\left\|\int\limits_0^x \int\limits_0^y [F(s,t,z_*(s,t)) - F(s,t,z_*(s,t))]\,ds\,dt\right\|_X \\ \le \int\limits_0^x \int\limits_0^y m_2(s,t)\|z_*(s,t) - z_n(s,t)\|_X\,dsdt.$$

4. Используя $\mathcal{H}(\mathscr{U})$, $\mathcal{H}(A)$, (3.4) и (5.1), получим

$$\left\|\int\limits_0^x \int\limits_0^y [A(s,t,z_*(s,t))u_*(s,t) - A(s,t,z_*(s,t))u_n(s,t)]\,dsdt\right\|_X$$

$$\leq \left\| \int_0^x \int_0^y [A(s,t,z_*(s,t)) - A(s,t,z_n(s,t))] u_*(s,t)\, dsdt \right\|_X$$
$$+ \left\| \int_0^x \int_0^y A(s,t,z_n(s,t))[u_*(s,t) - v_n(s,t)]\, dsdt \right\|_X$$
$$+ \left\| \int_0^x \int_0^y A(s,t,z_n(s,t))[v_n(s,t) - u_n(s,t)]\, dsdt \right\|_X$$
$$\leq \int_0^x \int_0^y [m_1 p(s,t) + \alpha(1+r(s)) l(s,t)] \|z_*(s,t) - z_n(s,t)\|_X \, dsdt$$
$$+ \frac{\alpha}{n} \int_0^x \int_0^y (1 + r(s))\, dsdt + \left\| \int_0^x \int_0^y A(s,t,z_n(s,t))[v_n(s,t) - u_n(s,t)]\, dsdt \right\|_X .$$

Так как $z_n \in K$, $n \geq 1$, и K — компакт, без ограничения общности можно считать, что z_n сходится к некоторому $z \in K$ в пространстве $C(\Omega, X)$. Учитывая неравенства пп. 1–4, перейдем в (5.6) к пределу при $n \to \infty$:

$$\|z_*(x,y) - z(x,y)\|_X \leq \nu \int_0^x l_1(x) \sup_{t \in I_2} \|z_*(s,t) - z(s,t)\|_X \, ds$$
$$+ \int_0^x \int_0^y [m_1 p(s,t) + \alpha(1 + r(s)) l(s,t)] \|z_*(s,t) - z(s,t)\|_X \, dsdt$$
$$+ \limsup_{n\to\infty} \left\| \int_0^x \int_0^y A(s,t,z_n(s,t))[v_n(s,t) - u_n(s,t)]\, dsdt \right\|_X . \quad (5.7)$$

Покажем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \left\| \int_0^x \int_0^y A(s,t,z_n(s,t))[v_n(s,t) - u_n(s,t)]\, dsdt \right\|_X = 0. \quad (5.8)$$

Для этого рассмотрим оператор $\mathcal{A} : C(\Omega, X) \times L_1(\Omega, Y) \to L_1(\Omega, X)$, определенный по правилу

$$\mathcal{A}(z,u)(x,y) := A(x,y,z(x,y))u(x,y).$$

Из доказательства леммы 3.1 (см. равенство (3.8)) следует, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывен из $K \times w\text{-}S$ в $w\text{-}L_1(\Omega, X)$. На основании (5.3) $(v_n - u_n) \to 0$ в S^w, а по лемме 2.1 и в $w\text{-}S$. Следовательно, $\mathcal{A}(z_n, v_n - u_n) \to 0$ в $w\text{-}L_1(\Omega, X)$. Тем самым (5.8) доказано.

Положим

$$w(s) := \nu l_1(s) + \int_0^b [m_2(s,t) + m_1 p(s,t) + \alpha(1 + r(s)) l(s,t)]\, dt.$$

Из (5.7) и (5.8) вытекает, что для каждого $x \in I_1$

$$\sup_{y\in I_2} \|z_*(x,y) - z(x,y)\|_X \le \int_0^x w(s) \sup_{t\in I_2} \|z_*(s,t) - z(s,t)\|_X \, ds. \tag{5.9}$$

Применив к неравенству (5.9) лемму Беллмана — Гронуолла, получим

$$\sup_{y\in I_2} \|z_*(x,y) - z(x,y)\|_X = 0, \quad x \in I_1.$$

Это значит, что $z(x,y) = z_*(x,y)$ для всех $(x,y) \in \Omega$ и, следовательно, $z_n \to z_*$ в $C(\Omega, X)$.

Используя этот факт, из неравенств (5.1)–(5.5) получим, что

$$u_n \to u_* \text{ в } S^w, \quad u_n^1 \to u_*^1 \text{ в } Q_1^w, \quad u_n^2 \to u_*^2 \text{ в } Q_2^w.$$

Тогда согласно лемме 2.1

$$u_n \to u_* \text{ в } w\text{-}S, \quad u_n^1 \to u_*^1 \text{ в } w\text{-}Q_1, \quad u_n^2 \to u_*^2 \text{ в } w\text{-}Q_2.$$

Таким образом, $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \to \left(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\right)$ в пространстве (4.2). Поскольку $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \in \mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$ по построению, теорема доказана.

Следствие 5.1. *В рамках предположений теоремы* 5.1 *справедливы равенства* $\mathscr{R}_{\mathrm{co}} = \overline{\mathscr{R}} = \overline{\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}}$, *где черта означает замыкание в пространстве* (4.2).

Следствие вытекает из теоремы 4.1, теоремы 5.1 и включения $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}} \subset \mathscr{R} \subset \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$.

§ 6. Граничность

В этом параграфе докажем граничность множеств $\mathscr{R}$ и $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}$ в множестве $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$. Будем считать, что выполняются те же предположения, что и в § 5.

Теорема 6.1. *Пусть* $\left(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\right) \in \mathscr{R}$. *Если выполняется хотя бы одно из неравенств*

(i) $\mu_2\{(x,y) \in \Omega : D_Y(\mathscr{U}(x,y,z_*(x,y)), \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z_*(x,y))) > 0\} > 0$,

(ii) $\mu_1\{x \in I_1 : D_X(\mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z_*)(x)), \operatorname{co}\mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z_*)(x))) > 0\} > 0$,

(iii) $\mu_1\{x \in I_2 : D_X(\mathscr{U}_2(y), \operatorname{co}\mathscr{U}_1(y)) > 0\} > 0$,

то существует последовательность $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}} \setminus \mathscr{R}$, $n \ge 1$, *сходящаяся к* $\left(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\right)$ *в пространстве* $C(\Omega, X) \times L_1(\Omega, Y) \times L_1(I_1, X) \times L_1(I_2, X)$.

Доказательство. Пусть, например, выполняется (i). В силу гипотезы $\mathcal{H}(\mathscr{U})$ функция $\omega \mapsto D_Y(\mathscr{U}(\omega, z(\omega)), \operatorname{co}\mathscr{U}(\omega, z(\omega)))$ интегрируема на Ω. Поэтому из (i) вытекает неравенство

$$\int_\Omega D_Y(\mathscr{U}(\omega, z(\omega)), \operatorname{co}\mathscr{U}(\omega, z(\omega)))\, d\mu_2 > 0,$$

эквивалентное по утверждению 4.2 из [9] неравенству $D_{L_1(\Omega,Y)}(S_{\mathscr{U}}, S_{\operatorname{co}\mathscr{U}}) > 0$, где $S_{\mathscr{U}} := \{f \in L_1(\Omega, Y) : f(\omega) \in \mathscr{U}(\omega, z_*(\omega)) \text{ п. в.}\}$, $S_{\operatorname{co}\mathscr{U}} := \{f \in L_1(\Omega, Y) : f(\omega) \in \operatorname{co}\mathscr{U}(\omega, z_*(\omega)) \text{ п. в.}\}$. Так как $S_{\mathscr{U}} \subset S_{\operatorname{co}\mathscr{U}}$, отсюда следует, что существует $v \in S_{\operatorname{co}\mathscr{U}}$ такое, что $d_{L_1(\Omega,Y)}(v, S_{\mathscr{U}}) > 0$. Поскольку (см. [14])

$$d_{L_1(\Omega,Y)}(v, S_{\mathscr{U}}) = \int_\Omega d_Y(v(\omega), \mathscr{U}(\omega, z_*(\omega)))\, d\mu_2,$$

то

$$\int\limits_{\Omega} d_Y(v(\omega), \mathscr{U}(\omega, z_*(\omega)))\, d\mu_2 > 0.$$

Поэтому существуют $\varepsilon > 0$ и измеримое множество $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, $\mu_2(\widetilde{\Omega}) > 0$, такие, что

$$d_Y(v(\omega), \mathscr{U}(\omega, z_*(\omega))) > 3\varepsilon \quad \text{п. в. на } \widetilde{\Omega}. \tag{6.1}$$

По теореме Лузина существует компактное множество $\Omega_0 \subset \widetilde{\Omega}$, $\mu_2(\Omega_0) > 0$, на котором функции $l(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $d_Y(v(\cdot), \mathscr{U}(\cdot, z_*(\cdot)))$ непрерывны, а по теореме Скорца — Драгони [15] это множество можно выбрать так, чтобы отображение $\mathscr{U}$ было непрерывным по Хаусдорфу на $\Omega_0 \times X$.

Пусть $C := z_*(\Omega_0) + \overline{B}$, тогда C является компактом в X. Следовательно, $\mathscr{U}$ равномерно непрерывно на $\Omega_0 \times C$. Последнее означает, что существует $1 > \delta > 0$ такое, что $D_Y(\mathscr{U}(\omega, z_1), \mathscr{U}(\omega, z_2)) < \varepsilon$, как только $\|z_1 - z_2\|_X < \delta$, $\omega \in \Omega_0$, $z_1, z_2 \in C$. В частности,

$$D_Y(\mathscr{U}(\omega, z), \mathscr{U}(\omega, z_*(\omega))) < \varepsilon, \tag{6.2}$$

если $\|z - z_*(\omega)\|_X < \delta$ и $\omega \in \Omega_0$. Пусть $u \in Y$, $\omega \in \Omega_0$ и

$$d_Y(u, v(\omega)) < \varepsilon. \tag{6.3}$$

Объединяя (6.1)–(6.3), получим, что

$$d_Y(u, \mathscr{U}(\omega, z)) > \varepsilon \quad \text{при } \|z - z_*(\omega)\|_X < \delta,\ \|u - v(\omega)\|_Y < \varepsilon \text{ и } \omega \in \Omega_0. \tag{6.4}$$

Пусть $\omega_* = (x_*, y_*) \in \Omega_0$ — точка правой плотности множества Ω_0. Положим $\Omega_n := \left\{\left[x_*, x_* + \frac{1}{n}\right] \times \left[y_*, y_* + \frac{1}{n}\right]\right\} \cap \Omega_0$ и определим последовательность функций

$$v_n(\omega) := \begin{cases} v(\omega), & \omega \in \Omega_n, \\ u_*(\omega), & \omega \in \Omega \setminus \Omega_n, \end{cases} \qquad n \ge 1.$$

Очевидно, $v_n(\omega) \in \operatorname{co} \mathscr{U}(\omega, z_*(\omega))$ и $v_n(\omega) \to u_*(\omega)$ п. в. на Ω. По теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$v_n \to u_* \quad \text{в} \quad L_1(\Omega, Y). \tag{6.5}$$

Теперь построим требуемую последовательность.

Согласно утверждению 2.3 и теореме 3.1 в [13] существуют непрерывные отображения $g_n : K \to L_1(\Omega, Y)$, $g_n^1 : K \to L_1(I_1, X)$, $n \ge 1$, такие, что $g_n(z)(x, y) \in \operatorname{co} \mathscr{U}(x, y, z(x, y))$ п. в. на Ω, $g_n^1(z)(x) \in \operatorname{co} \mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x))$ п. в. на I_1 и

$$\|v_n(x, y) - g_n(z)(x, y)\|_Y < 1/n + l(x, y)\|z_*(x, y) - z(x, y)\|_X \quad \text{п. в. на } \Omega, \tag{6.6}$$

$$\left\|u_*^1(x) - g_n^1(z)(x)\right\|_X < 1/n + l_1(x)\|\mathscr{V}_1(z_*)(x) - \mathscr{V}_1(z)(x)\|_X \quad \text{п. в. на } I_1. \tag{6.7}$$

Рассмотрим операторы

$$\mathcal{T}_n(z)(x, y) := \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) \\ + \int\limits_0^x g_n^1(z)(s)\, ds + \int\limits_0^y u_*^2(t)\, dt + \int\limits_0^x \int\limits_0^y \mathcal{F}(z, g_n(z))(s, t)\, ds\, dt, \quad n \ge 1.$$

Рассуждая, как и в § 4, можно доказать, что операторы $\mathcal{T}_n$ имеют неподвижные точки z_n, т. е. $z_n = \mathcal{T}_n(z_n)$, $n \ge 1$.

Положим $u_n := g_n(z_n)$, $u_n^1 := g_n^1(z_n)$, $u_n^2 := u_*^2$, $n \ge 1$. Очевидно, что $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$. Используя (6.5)–(6.7), по аналогии с доказательством теоремы 5.1 можно показать, что $z_n \to z_*$ в $C(\Omega, X)$. Тогда из (6.5)–(6.7) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что $u_n \to u_*$ в $L_1(\Omega, Y)$, $u_n^1 \to u_*^1$ в $L_1(I_1, X)$.

Таким образом, $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ по построению, и $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \to \left(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\right)$ в пространстве $C(\Omega, X) \times L_1(\Omega, Y) \times L_1(I_1, X) \times L_1(I_2, X)$.

Покажем, что $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \notin \mathscr{R}$. Согласно (6.5) и (6.6) существует такое n_0, что при всех $n \geq n_0$

$$\|z_n(\omega) - z_*(\omega)\|_X < \delta \quad \text{и} \quad \|v_n(\omega) - u_n(\omega)\|_Y < \varepsilon \quad \text{п. в. на } \Omega_0. \tag{6.8}$$

Так как $v_n(\omega) = v(\omega)$, $\omega \in \Omega_n$, то из (6.4) и (6.8) следует, что при $n \geq n_0$

$$d_Y(u_n(\omega), \mathscr{U}(\omega, z_n(\omega))) > \varepsilon \quad \text{п. в. на } \Omega_n. \tag{6.9}$$

Поскольку ω_* является точкой правой плотности множества Ω_0, то

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \mu_2(\Omega_n) = 1.$$

Поэтому $\mu_2(\Omega_n) > 0$ для всех $n \geq n_0$. В свою очередь, из (6.9) следует, что $u_n(\omega) \notin \mathscr{U}(\omega, z_n(\omega))$ п. в. на Ω_n при достаточно больших n. Тем самым мы показали, что $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \notin \mathscr{R}$.

Если выполняется условие (ii) или условие (iii), то доказательство аналогично. Теорема доказана.

Следствие 6.1. *В рамках предположений теоремы* 6.1 *справедливы равенства*

$$\mathscr{R}_{\mathrm{co}} = \overline{\mathscr{R}} = \overline{\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}} = \overline{\mathscr{R}_{\mathrm{co}} \setminus \mathscr{R}} = \overline{\mathscr{R}_{\mathrm{co}} \setminus \mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}},$$

где черта означает замыкание в пространстве (4.2).

Следствие вытекает из следствия 5.1 и теоремы 6.1.

§ 7. Необходимые и достаточные условия замкнутости множества $\mathscr{R}$

При доказательстве следующей теоремы мы считаем, что справедливы те же предположения относительно функций A, F, $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{U}$, $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$, что и в предыдущем параграфе.

Теорема 7.1. *Множество $\mathscr{R}$ является замкнутым в пространстве* (4.2) *тогда и только тогда, когда для каждого $(z, u, u^1, u^2) \in \mathscr{R}$ выполняются равенства*

(i) $\mathscr{U}(x, y, z(x, y)) = \operatorname{co} \mathscr{U}(x, y, z(x, y))$ *п. в. на* Ω,

(ii) $\mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) = \operatorname{co} \mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x))$ *п. в. на* I_1,

(iii) $\mathscr{U}_2(y) = \operatorname{co} \mathscr{U}_1(y)$ *п. в. на* I_2.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathscr{R}$ замкнуто в пространстве (4.2). Тогда согласно следствию 5.1 $\mathscr{R}_{\mathrm{co}} = \overline{\mathscr{R}} = \mathscr{R}$. Если при этом хотя бы одно из условий (i)–(iii) не выполняется, то по теореме 6.1 $\mathscr{R}_{\mathrm{co}} \setminus \mathscr{R} \neq \varnothing$, что противоречит равенству $\mathscr{R}_{\mathrm{co}} = \mathscr{R}$.

Достаточность. Пусть для каждого $(z, u, u^1, u^2) \in \mathscr{R}$ справедливы равенства (i)–(iii). Покажем, что тогда из $(z, u, u^1, u^2) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ следует, что $(z, u, u^1, u^2) \in \mathscr{R}$.

Согласно теореме 5.1 существует последовательность $\left(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\right) \in \mathscr{R}$, $n \geq 1$, сходящаяся к $(z, u, u^1, u^2) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ в пространстве (4.2). Ясно, что почти всюду

$$u(x, y) \in \operatorname{co} \mathscr{U}(x, y, z(x, y)), \quad u^1(x) \in \operatorname{co} \mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)). \tag{7.1}$$

Из (i), (ii) и гипотез $\mathcal{H}(\mathscr{U})$, $\mathcal{H}(\mathscr{U}_1)$, $\mathcal{H}(\mathscr{V})$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z_n(x,y)) &= \mathscr{U}(x,y,z_n(x,y)) \to \mathscr{U}(x,y,z(x,y)) \quad \text{п. в. на } \Omega, \\ \operatorname{co}\mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z_n)(x)) &= \mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z_n)(x)) \to \mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)) \quad \text{п. в. на } I_1. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Поскольку пространства $\operatorname{conv} X$ и $\operatorname{conv} Y$, снабженные метрикой Хаусдорфа, являются полными, то из (7.2) следует, что

$$\operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z(x,y)) = \mathscr{U}(x,y,z(x,y)) \quad \text{п. в. на } \Omega,$$

$$\operatorname{co}\mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)) = \mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)) \quad \text{п. в. на } I_1.$$

Отсюда на основании (7.1) заключаем, что $u(x,y) \in \mathscr{U}(x,y,z(x,y))$ п. в. на Ω, $u^1(x) \in \mathscr{U}_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x))$ п. в. на I_1. Включение

$$u^2(y) \in \operatorname{co}\mathscr{U}_2(y) = \mathscr{U}_2(y) \quad \text{п. в. на } I_2$$

очевидно.

Итак, $(z,u,u^1,u^2) \in \mathscr{R}$. Тем самым мы показали, что $\mathscr{R}$ замкнуто. Теорема доказана.

Определение 7.1. Функция $f:\Omega \to X$ называется *ступенчатой*, если существуют конечные разбиения $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = a$, $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_k = b$ отрезков $I_1 = [0,a]$ и $I_2 = [0,b]$ такие, что на каждом из множеств $E_{ij} = (a_{i-1},a_i) \times (b_{i-1},b_i)$, $i = 1,\dots,k$, $j = 1,\dots,l$, функция f постоянна. В точках множества $\Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k}\bigcup\limits_{j=1}^{l} E_{ij}$ функция f может принимать произвольные значения.

Пусть $0 \le x_0 < a$, $0 \le y_0 < b$ произвольны, $I_1^0 = [x_0,a]$, $I_2^0 = [y_0,b]$, $\Omega_0 = I_1^0 \times I_2^0$, $\omega_0 = (x_0,y_0)$; $\varphi_0 \in C\big(I_1^0,X\big)$, $\psi_0 \in C\big(I_2^0,X\big)$; $\mathscr{V}_1^0 : C(\Omega_0,X) \to C\big(I_1^0,X\big)$, $\mathscr{V}_2^0 : C(\Omega_0,X) \to C\big(I_2^0,X\big)$.

Рассмотрим управляемую систему (1.1) с граничными условиями

$$z(x,y_0) = \varphi_0(x) + \int\limits_{x_0}^{x} u^1(s)\,ds, \quad z(x_0,y) = \psi_0(y) + \int\limits_{y_0}^{y} u^2(t)\,dt, \varphi_0(x_0) = \psi_0(y_0) = z_0 \tag{7.3}$$

и ограничениями на управления (1.3)–(1.5), в которых отображения $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ заменены отображениями $\mathscr{V}_1^0$, $\mathscr{V}_2^0$.

В этом случае решением управляемой системы будет четверка функций (z,u,u^1,u^2), $z \in C(\Omega_0,X)$, $u \in L_1(\Omega_0,Y)$, $u^1 \in L_1\big(I_1^0,X\big)$, $u^2 \in L_1\big(I_2^0,X\big)$.

Для произвольных $\omega_0 = (x_0,y_0)$, φ_0, ψ_0, $\mathscr{V}_1^0$, $\mathscr{V}_2^0$ множества решений системы (1.1), (7.3) с ограничениями (1.3)–(1.5) будем обозначать соответственно через $\mathscr{R}\big(\omega_0,\varphi_0,\psi_0,\mathscr{V}_1^0,\mathscr{V}_2^0\big)$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}\big(\omega_0,\varphi_0,\psi_0,\mathscr{V}_1^0,\mathscr{V}_2^0\big)$, $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}\big(\omega_0,\varphi_0,\psi_0,\mathscr{V}_1^0,\mathscr{V}_2^0\big)$.

Заменяя в гипотезах $\mathcal{H}(\mathscr{V})$, $\mathcal{H}^*(\mathscr{V})$ и в формулировках теорем 4.1, 4.2, 5.1, 6.1, 7.1 функции $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$ на $\mathscr{V}_1^0$, $\mathscr{V}_2^0$, получим аналоги этих теорем для множеств $\mathscr{R}\big(\omega_0,\varphi_0,\psi_0,\mathscr{V}_1^0,\mathscr{V}_2^0\big)$, $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}\big(\omega_0,\varphi_0,\psi_0,\mathscr{V}_1^0,\mathscr{V}_2^0\big)$, $\mathscr{R}_{\mathrm{ext\,co}}\big(\omega_0,\varphi_0,\psi_0,\mathscr{V}_1^0,\mathscr{V}_2^0\big)$.

При доказательстве следующей теоремы предположим, что имеют место гипотезы $\mathcal{H}(A)$, $\mathcal{H}(F)$, $\mathcal{H}(\mathscr{U})$, $\mathcal{H}^*(\mathscr{U})$, $\mathcal{H}(\mathscr{U}_1)$, $\mathcal{H}^*(\mathscr{U}_1)$, $\mathcal{H}(\mathscr{U}_2)$, $\mathcal{H}^*(\mathscr{U}_2)$ и для каждого $(x_0,y_0) \in \Omega$ справедливы предположения $\mathcal{H}(\mathscr{V})$, $\mathcal{H}^*(\mathscr{V})$, в которых отображение $\mathscr{V}_1$ заменено отображением $\mathscr{V}_1^0$.

Теорема 7.2. *Множество $\mathscr{R}\big(\omega_0,\varphi_0,\psi_0,\mathscr{V}_1^0\big)$ замкнуто в пространстве*

$$C(\Omega_0,X) \times w\text{-}L_1(\Omega_0,Y) \times w\text{-}L_1\big(I_1^0,X\big) \times w\text{-}L_1\big(I_2^0,X\big) \tag{7.4}$$

для любых ω_0, φ_0, ψ_0, $\mathscr{V}_1^0$ тогда и только тогда, когда для каждого $z \in X$ имеют место равенства

(i) $\mu_2\{(x,y) \in \Omega : \mathscr{U}(x,y,z) \neq \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z)\} = 0$,

(ii) $\mu_1\{x \in I_1 : \mathscr{U}_1(x,z) \neq \operatorname{co}\mathscr{U}_1(x,z)\} = 0$,

(iii) $\mu_1\{y \in I_2 : \mathscr{U}_2(y) \neq \operatorname{co}\mathscr{U}_2(y)\} = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть для любых ω_0, φ_0, ψ_0, $\mathscr{V}_1^0$ множество $\mathscr{R}\big(\omega_0, \varphi_0, \psi_0, \mathscr{V}_1^0\big)$ замкнуто в (7.4) и какое-нибудь из равенств (i)–(iii) не выполняется.

Допустим, что для некоторого $z_0 \in X$ не выполняется равенство (i). Положим

$$E := \{(x,y) \in \Omega : \mathscr{U}(x,y,z_0) \neq \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z_0)\}, \quad \mu_2(E) > 0.$$

Воспользовавшись следствием 2.1 из [15], получим, что существует компактное множество $E_0 \subset E$, $\mu_2(E_0) > 0$ такое, что сужение функции $(x,y,z) \mapsto \mathscr{U}(x,y,z)$ на $E_0 \times X$ D_Y-непрерывно.

Почти все точки множества E_0 являются точками его правой плотности; возьмем одну из них: $\omega_0 = (x_0, y_0) \in E_0$.

Пусть $\varphi_0(x_0) = \psi_0(y_0) = z_0$ и $\big(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\big) \in \mathscr{R}\big(\omega_0, \varphi_0, \psi_0, \mathscr{V}_1^0\big)$. Тогда функция $(x,y) \mapsto \mathscr{U}(x,y,z_*(x,y))$ будет D_Y-непрерывной на E_0 и

$$\mathscr{U}(x_0,y_0,z_*(x_0,y_0)) = \mathscr{U}(x_0,y_0,z_0) \neq \operatorname{co}\mathscr{U}(x_0,y_0,z_0). \tag{7.5}$$

Покажем, что для некоторого $h > 0$

$$\mathscr{U}(x,y,z_*(x,y)) \neq \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z_*(x,y)), \quad (x,y) \in E_0 \cap \{[x_0, x_0+h] \times [y_0, y_0+h]\}.$$

Предположим, что это не так. Тогда существует последовательность $(x_n, y_n) \in \Omega$, $n \geq 1$, $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, такая, что для всех n

$$\mathscr{U}(x_n,y_n,z_*(x_n,y_n)) = \operatorname{co}\mathscr{U}(x_n,y_n,z_*(x_n,y_n)).$$

Так как пространство $\operatorname{conv} Y$, наделенное метрикой $D_Y(\cdot,\cdot)$, является полным и $(x,y) \mapsto \mathscr{U}(x,y,z_*(x,y))$ D_Y-непрерывно на E_0, то

$$\mathscr{U}(x_n,y_n,z_*(x_n,y_n)) \to \mathscr{U}(x_0,y_0,z_*(x_0,y_0)) = \operatorname{co}\mathscr{U}(x_0,y_0,z_*(x_0,y_0)),$$

но это противоречит (7.5).

Таким образом, при $(x,y) \in E_0 \cap \{[x_0, x_0+h] \times [y_0, y_0+h]\}$ множество $\mathscr{U}(x,y,z_*(x,y))$ невыпукло. Поскольку (x_0, y_0) — точка правой плотности множества E_0, то $\mu_2(E_0 \cap \{[x_0, x_0+h] \times [y_0, y_0+h]\}) > 0$ и поэтому

$$\mu_2\{(x,y) \in \Omega_0 : \mathscr{U}(x,y,z_*(x,y)) \neq \operatorname{co}\mathscr{U}(x,y,z_*(x,y))\} > 0.$$

Следовательно, по предыдущей теореме, справедливой также и для множества $\mathscr{R}\big(\omega_0, \varphi_0, \psi_0, \mathscr{V}_1^0\big)$, получим, что $\mathscr{R}\big(\omega_0, \varphi_0, \psi_0, \mathscr{V}_1^0\big)$ не замкнуто в (7.4). Это противоречит нашему предположению.

Если не выполняется равенство (ii), то, очевидным образом изменив приведенные рассуждения, докажем, что и в этом случае $\mathscr{R}\big(\omega_0, \varphi_0, \psi_0, \mathscr{V}_1^0\big)$ не замкнуто в пространстве (7.4) при некоторых ω_0, φ_0, ψ_0, $\mathscr{V}_1^0$. Если не выполняется равенство (iii), то незамкнутость $\mathscr{R}\big(\omega_0, \varphi_0, \psi_0, \mathscr{V}_1^0\big)$ в пространстве (7.4) сразу следует из теоремы 7.1. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\omega_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ — произвольная точка, $I_1^0 = [x_0, a]$, $I_2^0 = [y_0, b]$, $\Omega_0 = I_1^0 \times I_2^0$. Предположим, что для любого $z \in X$ справедливы равенства (i)–(iii).

Пусть $z(\cdot) \in C(\Omega_0, X)$ произвольно. Рассмотрим две последовательности ступенчатых функций: последовательность $z_n : \Omega_0 \to X$, $n \geq 1$, поточечно сходящуюся к $z(\cdot)$, и последовательность $z_n^1 : I_1^0 \to X$, $n \geq 1$, поточечно сходящуюся к $\mathscr{V}_1(z)(\cdot) \in C\big(I_1^0, X\big)$.

Из равенств (i), (ii) следует, что

$$\mu_2\{(x,y) \in \Omega_0 : \mathscr{U}(x,y,z_n(x,y)) \neq \mathrm{co}\,\mathscr{U}(x,y,z_n(x,y))\} = 0,$$
$$\mu_1\{x \in I_1^0 : \mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z_n)(x)) \neq \mathrm{co}\,\mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z_n)(x))\} = 0.$$

Так как функции $z \mapsto \mathscr{U}(x,y,z)$ и $z \mapsto \mathscr{U}_1(x,z)$ непрерывны, то

$$\begin{gathered}\mu_2\{(x,y) \in \Omega_0 : \mathscr{U}(x,y,z(x,y)) \neq \mathrm{co}\,\mathscr{U}(x,y,z(x,y))\} = 0,\\ \mu_1\big\{x \in I_1^0 : \mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \neq \mathrm{co}\,\mathscr{U}_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x))\big\} = 0.\end{gathered} \tag{7.6}$$

Поскольку (7.6) справедливо для произвольного непрерывного $z(\cdot)$, оно справедливо и для любого $(z,u,u^1,u^2) \in \mathscr{R}\big(\omega_0, \varphi_0, \psi_0, \mathscr{V}_1^0\big)$ Теперь, применив к множеству $\mathscr{R}\big(\omega_0, \varphi_0, \psi_0, \mathscr{V}_1^0\big)$ теорему 7.1, получим, что $\mathscr{R}\big(\omega_0, \varphi_0, \psi_0, \mathscr{V}_1^0\big)$ замкнуто в (7.4) для любых ω_0, φ_0, ψ_0, $\mathscr{V}_1^0$. Теорема доказана.

Автор выражает признательность профессору А. А. Толстоногову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
2. *Рачинский В. В.* Введение в общую теорию динамики сорбции и хроматографии. М.: Наука, 1964.
3. *De Blasi F. S., Myjak J.* On the structure of the set of solutions of the Darboux problem for hyperbolic equations // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1986. V. 29. P. 7–14.
4. *Teodoru G.* The Goursat problem associated with a Lipschitzian hyperbolic multivalued equation // Mathematica. 1990. V. 32, N 1. P. 81–87.
5. *Kubiaczyk I.* Existence theorem for multivalued hyperbolic equation in Banach spaces // Funct. Approx. 1988. V. 16. P. 217–223.
6. *Dawidowski M., Kubiaczyk I.* On bounded solutions of hyperbolic differential inclusion in Banach spaces // Demonstratio Math. 1992. V. 25, N 1–2. P. 153–159.
7. *Byszewski L., Papageorgiou N.* Application of noncompactness technique to an investigation of the existence of solutions to a nonlocal multivalued Darboux problem // J. Appl. Math Stochastic Anal. 1999. V. 12, N 2. P. 179–190.
8. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4, N 3. P. 237–269.
9. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-Valued Anal. 1996. V. 4, N 2. P. 173–203.
10. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1.
11. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. Т. 1.
12. *Himmelberg C. J.* Measurable relations // Fund. Math. 1975. V. 87, N 1. P. 53–71.
13. *Fryszkowski A.* Continuous selections for a class of non-convex multivalued maps // Studia Math. 1983. V. 76, N 2. P. 71–80.
14. *Hiai F., Umegaki H.* Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions // J. Multivaruate Anal. 1977. V. 7. P. 149–182.
15. *Толстоногов А. А.* К теореме Скорца — Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Мат. заметки. 1999. Т. 48, № 5. С. 109–120.

Статья поступила 26 апреля 2006 г.

Погодаев Николай Ильич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
npogo@mail.ru