*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5*

*УДК 517.53*

# ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ НУЛЕЙ, ИМЕЮЩИЕ ПРАВИЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ. I

**А. М. Гайсин, Д. И. Сергеева**

**Аннотация:** Показано, что если возрастающая до бесконечности последовательность положительных чисел имеет $S$-плотность, то ее можно дополнить до некоторой последовательности, являющейся нулевым множеством произведения Вейерштрасса с регулярным поведением на вещественной оси.

**Ключевые слова:** произведение Вейерштрасса, класс Картрайт.

## Введение

В задачах аппроксимации линейными комбинациями экспонент $e^{\lambda_n z}$ $(n \geq 1)$ на различных множествах комплексной плоскости, в теории рядов Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ особую роль играет бесконечное произведение (произведение Вейерштрасса)

$$Q(z) = \prod_{\lambda_n \in \Lambda} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (0 < \lambda_n \uparrow \infty), \tag{1}$$

определяющее целую функцию экспоненциального типа.

В статье изучается поведение целых функций вида (1) на вещественной оси. Естественно ограничиться рассмотрением только тех последовательностей $\Lambda = \{\lambda_n\}$, которые имеют конечную верхнюю плотность

$$D = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

Актуальность обсуждаемых здесь задач вызвана тем, что в общем случае функция $Q$ может вести себя очень нерегулярно.

Имеет место

**Теорема A** [1, гл. I, § 2, п. 7]. *Пусть последовательность $\Lambda$ имеет конечную плотность*

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n}.$$

*Тогда для функции $Q$, заданной формулой* (1), *верны утверждения:*

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00417–а).

1) *для* $z = re^{i\theta}$ $(\theta \neq 0, \pi)$ *существует предел*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|Q(re^{i\theta})|}{r} = \pi\sigma|\sin\theta|;$$

2) *имеются число* $p > 0$ *и последовательность* $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $\frac{r_{n+1}}{r_n} \to 1$ *при* $n \to \infty$, *такие, что при любом* $\varepsilon > 0$

$$\ln|Q(re^{i\theta})| > [\pi\sigma|\sin\theta| - \varepsilon]r$$

*для* $r_n - p \le r \le r_n + p$, $n \ge N(\varepsilon)$;

3) *если дополнительно известно, что*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \ge h > 0 \quad (n \ge 1), \tag{2}$$

*то в качестве* $r_n$ *в п.* 2 *можно взять*

$$r_n = \frac{\lambda_n + \lambda_{n+1}}{2} \quad (n \ge 1);$$

4) *при условии* (2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| = 0.$$

При дополнительных требованиях на распределение точек последовательности $\Lambda$ можно получить более точные оценки (как сверху, так и снизу) для функции $Q$ на вещественной оси.

Справедливы следующие теоремы (см., например, [2]).

**Теорема B** (Пэли, Винер, 1934 г.). *Пусть* $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ *и*

$$|\lambda_n - n| \le d < \infty. \tag{3}$$

*Тогда для функции*

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (z = x + iy)$$

*справедливы оценки:*

1) $|xQ(x)| \le \mathrm{const}\,|x|^{4d}$;

2) *для* $|x - \lambda_n| \ge \varepsilon > 0$ $(n \ge 1)$

$$|xQ(x)| \ge \mathrm{const}\,|x|^{-4d} \quad (|x| \ge 1).$$

**Теорема C** (Б. Я. Левин, 1949 г.). *Если выполняется условие* (3), *то*

$$|Q(z)| \le \mathrm{const}(1 + |z|^{4d})e^{\pi|y|}.$$

*При условии* $\inf\limits_{n\neq j} |\lambda_n - \lambda_j| > 0$

$$|Q'(\lambda_j)| \ge \mathrm{const}\,\lambda_j^{-4d} \quad (j \ge 1).$$

Отметим, что функция $Q$, удовлетворяющая условиям теорем B или C, принадлежит классу Картрайт. Напомним, что *классом Картрайт* называется множество целых функций $C = \{f\}$ экспоненциального типа, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|f(x)|}{1 + x^2}\,dx < \infty, \quad a^+ = \max(a, 0).$$

Через $\sigma_f$ будем обозначать экспоненциальный тип функции $f$:

$$\sigma_f = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|}.$$

Функции из класса $C$ не могут вести себя слишком нерегулярно. Однако во многих случаях приходится предполагать, что сужения функций класса $C$ на вещественную ось удовлетворяют некоторым дополнительным условиям «правильности роста». Эти условия обычно имеют следующий вид: существует неотрицательная и, например, возрастающая функция $\varphi$ такая, что $\ln|f(x)| \le \varphi(x)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{1+x^2}\,dx < \infty. \tag{4}$$

В работе [3] показано, что существует четная целая функция $f$ с вещественными нулями, принадлежащая классу $C$ и обладающая свойством: для любой возрастающей функции $\varphi(x) \ge 0$, удовлетворяющей условию $\ln|f(x)| \le \varphi(x)$, интеграл (4) расходится.

Пусть $L$ — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ функций,

$$W = \left\{\omega \in L : \int_0^{\infty} \frac{\omega(x)}{1+x^2}\,dx < \infty\right\}.$$

В. И. Мацаев (1966 г.) доказал, что если существуют $a \ge 0$ и $h \in W$ такие, что

$$|n(t) - at| \le h(t), \quad n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1, \tag{5}$$

то целая функция $Q$, определенная формулой (1), принадлежит классу $C$ [4]. Из (5) видно, что последовательность $\Lambda$ имеет плотность $a$. Так что при условии (5) сопряженной диаграммой функции $Q$ является вертикальный отрезок $I_a = [-\pi ai, \pi ai]$. Через $\psi_n(t)$ $(n \ge 1)$ обозначим функцию, ассоциированную по Борелю с целой функцией

$$Q_n(\lambda) = \frac{Q(\lambda)}{(\lambda-\lambda_n)Q'(\lambda_n)} \quad (n \ge 1).$$

Функции $\psi_n(t)$, $\psi_n(\infty) = 0$, аналитичны вне отрезка $I_a$ и образуют систему, биортогональную к системе экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \psi_n(t)e^{\lambda_m t}\,dt = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0, & \text{если } n \ne m. \end{cases}$$

Здесь $C$ — граница прямоугольника

$$P = \{t : |\operatorname{Re} t| \le \delta,\ |\operatorname{Im} t| \le b\ (b > a)\}.$$

Во многих вопросах (например, в теории рядов Дирихле) полезно знать поведение функций $\psi_n(t)$ при $n \to \infty$ и $|\operatorname{Re} t| = \delta \to 0$. Поскольку при $|\operatorname{Re} t| = \delta$

$$|\psi_n(t)| \le \left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| \int_0^{\infty} \left|\frac{Q(x)}{x-\lambda_n}\right| e^{-\delta x}\,dx,$$

видим, что требуемая оценка для $\psi_n$ зависит от скорости убывания последовательности $\{Q'(\lambda_n)\}$ и оценки сверху для функции $Q$ на вещественной оси. Отметим, что условие (5) еще не гарантирует какого-нибудь условия правильности роста функции $Q$ на вещественной оси. Так, согласно теореме 54 из [2] имеет место утверждение: для любого $a$ $(0 < a < 1)$ существует последовательность $\Lambda$ натуральных чисел $\lambda_n$ $(n \geq 1)$, для которой выполняется условие (5), но функция $\ln^+ |Q(x)|$ не имеет мажоранты из класса $W$.

Естественно возникает желание заменить функцию $Q$ другой целой функцией $P$, имеющей достаточно правильное поведение на вещественной оси, причем такой, что $P(\lambda_n) = 0$, $P'(\lambda_n) \neq 0$. Для этого можно воспользоваться следующей теоремой Берлинга — Маллявена о мультипликаторе (см., например, [3]): для любой функции $f$ из класса $C$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует мультипликатор — функция $g$ экспоненциального типа $\sigma_g < \varepsilon$ такая, что

$$\sup_{\mathbb{R}} |g(x)| < \infty, \quad \sup_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)| < \infty.$$

Согласно теореме о мультипликаторе для любого $\varepsilon > 0$ существует целая функция $g$ экспоненциального типа $\sigma_g < \varepsilon$ такая, что

$$|g(x)| \leq M, \quad |Q(x)g(x)| \leq 1.$$

Но теорема Берлинга — Маллявена никакой информации о нулях функции $P(\lambda) = Q(\lambda)g(\lambda)$ не дает (доказательство теоремы неконструктивно). Поэтому в качестве биортогональной системы нет смысла рассматривать систему функций, ассоциированных по Борелю с функцией

$$P_n(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{(\lambda - \lambda_n)P'(\lambda_n)} \quad (n \geq 1),$$

если даже $P'(\lambda_n) \neq 0$ $(n \geq 1)$. Дело в том, что последовательность $\{P'(\lambda_n)\}$ может стремиться к нулю сколь угодно быстро. Ситуация упрощается, если

$$\ln |Q(x)| \leq W(x), \quad w \in W. \tag{6}$$

В этом случае мультипликатор $g$ имеет вполне конкретный вид [5], но, как отмечено выше, оценка (6), вообще говоря, может не выполняться, даже если имеет место условие (5).

В статье ставится и решается следующая задача: *при каких условиях на последовательность* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *существует целая функция* $P$ *экспоненциального типа,* $P(\lambda_n) = 0$, $P'(\lambda_n) \neq 0$, *имеющая достаточно правильное поведение на вещественной оси*?

## § 1. Оценка произведения Вейерштрасса с правильным распределением нулей

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность. Тогда

$$Q(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (\lambda = x + iy)$$

— целая функция экспоненциального типа. Если существует предел

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n},$$

то говорят, что последовательность $\Lambda$ *измерима и имеет плотность* $D$. Обозначим через $K$ подкласс функций из класса $L$ таких, что $h(0) = 0$, $h(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, $\frac{h(t)}{t} \downarrow$ при $t \uparrow$.

**Теорема 1.** *Пусть последовательность* $\Lambda$ *имеет плотность* $D$ $(0 \le D < \infty)$, $\Lambda(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$. *Если для некоторой функции* $H \in K$

$$|\Lambda(u) - Du| \le H(u) \quad (u \ge 0), \tag{7}$$

*то для любого* $x \in \mathbb{R}$

$$\ln|Q(x)| \le 6H(x)\ln^+ \frac{x}{H(x)} + A \quad (0 < A < \infty).$$

Доказательство. Можно проверить (см., например, [2]), что для $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$

$$\ln|Q(x)| = \int\limits_0^\infty \Lambda(u)K(x,u)\,du, \quad \int\limits_0^\infty uK(x,u)\,du = 0,$$

где $K(x,u) = \frac{2x^2}{u(x^2-u^2)}$ (интегралы понимаются в смысле главного значения). Следовательно, для всех $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$

$$\ln|Q(x)| = \int\limits_0^\infty [\Lambda(u) - Du]K(x,u)\,du. \tag{8}$$

Используя данное представление, оценим функцию $\ln|Q(x)|$ сверху. Функция $Q$ четная. Поэтому достаточно рассмотреть случай $x > 0$. Заметим, что $K(x,u) < 0$ при $u > x$ и $K(x,u) > 0$, если $0 < u < x$. Так как $H(x) < \frac{x}{2}$ при $x \ge x_0 > 0$, то для $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$ имеем

$$I = \ln|Q(x)| = \left(\int\limits_0^{\lambda_1} + \int\limits_{\lambda_1}^{H} + \int\limits_{H}^{x-H} + \int\limits_{x-H}^{x+H} + \int\limits_{x+H}^{\infty}\right)[\Lambda(u) - Du]K(x,u)\,du$$

$$= \sum_{i=0}^{4} I_i, \quad H = H(x).$$

Далее вместо $H(x)$ в некоторых выражениях будем писать просто $H$.

Поскольку $\Lambda(u) = 0$ для $0 \le u < \lambda_1$, то при $x \to \infty$

$$I_0 = -2x^2 D \int\limits_0^{\lambda_1} \frac{du}{x^2 - u^2} = -xD\ln\left|\frac{x + \lambda_1}{x - \lambda_1}\right| = O(1).$$

Значит, при $x \ge x_1 = \max(x_0, 2\lambda_1)$

$$|I_0| \le M_0 \quad (0 < M_0 < \infty). \tag{9}$$

Оценим $I_1$. Для этого воспользуемся условием (7) и тем обстоятельством, что $\frac{H(u)}{u} \downarrow$ при $u \uparrow$. При $x \ge x_1$, учитывая (7), (8), имеем

$$|I_1| \le 2x^2 \int\limits_{\lambda_1}^{H} \frac{H(u)}{u}\frac{du}{x^2 - u^2} \le \frac{H(\lambda_1)}{\lambda_1} x \ln\left(\frac{x + H}{x - H}\right)\left(\frac{x - \lambda_1}{x + \lambda_1}\right).$$

Следовательно, при $x \ge x_2 \ge x_1$

$$|I_1| \le M_1 H(x) \quad (0 < M_1 < \infty). \tag{10}$$

Далее, при $x \ge x_3 \ge x_2$

$$|I_2| \le \int_H^{x-H} |\Lambda(u) - Du|\, K(x,u)\, du \le H(x) \int_H^{x-H} \frac{2x^2}{u(x^2-u^2)}\, du$$

$$= H(x) \ln \left(\frac{x-H}{H}\right)^2 + H(x) \ln \frac{x^2-H^2}{2xH-H^2} \le 3H(x) \ln \frac{x}{H(x)}. \quad (11)$$

Оценим $I_3$. Пусть $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$. Для любого $\varepsilon$ $(0 < \varepsilon \le 1)$ имеем

$$I_3 = \left( \int_{x-H}^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{x+H} \right) [\Lambda(u) - Du] K(x,u)\, du = I_{31} + I_{32} + I_{33}.$$

Проверяется, что при $x \to \infty$

$$I_{31} \le 2x^2 \left[ \Lambda(x) \int_{x-H}^{x-\varepsilon} \frac{Du}{u(x^2-u^2)} - D \int_{x-H}^{x-\varepsilon} \frac{du}{x^2-u^2} \right] = O(H) + [\Lambda(x) - Dx] \ln \frac{H}{\varepsilon}.$$

Здесь величина $O(H)$ не зависит от $\varepsilon$.

Так как $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$, при $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \le 1$ будет

$$I_{32} = 2x^2 \left[ \Lambda(x) \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{du}{u(x^2-u^2)} - D \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{du}{x^2-u^2} \right]$$

$$= \Lambda(x) \ln \left(\frac{x+\varepsilon}{x-\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{2x-\varepsilon}{2x+\varepsilon}\right) - Dx \ln \frac{2x+\varepsilon}{2x-\varepsilon},$$

так что $I_{32} = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$ для любого $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$.

Наконец, при $x \to \infty$ имеем

$$I_{33} \le 2x^2 \left[ \Lambda(x) \int_{x+\varepsilon}^{x+H} \frac{du}{u(x^2-u^2)} - D \int_{x+\varepsilon}^{x+H} \frac{du}{x^2-u^2} \right]$$

$$= \Lambda(x) \ln \left(\frac{x+H}{x+\varepsilon}\right)^2 \left(\frac{2x+\varepsilon}{2x+H}\right) \frac{\varepsilon}{H} - xD \ln \left(\frac{2x+H}{2x+\varepsilon}\right) \frac{\varepsilon}{H}$$

$$= O(H) + [\Lambda(x) - Dx] \ln \frac{\varepsilon}{H}.$$

Таким образом, учитывая оценки для $I_{31}$, $I_{32}$, $I_{33}$, получаем, что для всех $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$ и $x \ge x_4 \ge x_3$ выполняется неравенство

$$I_3 \le M_2 H(x) \quad (0 < M_2 < \infty). \quad (12)$$

Осталось оценить $I_4$. Имеем

$$|I_4| \le \int_{x+H}^{\infty} |\Lambda(u) - Du| |K(x,u)| du \le \int_{x+H}^{\infty} \frac{H(u)}{u} |uK(x,u)|\, du$$

$$\le \frac{H(x)}{x} \int_{x+H}^{\infty} u |K(x,u)| du = -2xH(x) \int_{x+H}^{\infty} \frac{du}{x^2-u^2}.$$

Отсюда при $x \ge x_5 \ge x_4$

$$|I_4| \le 2H(x) \ln \frac{x}{H(x)}. \tag{13}$$

Таким образом, учитывая оценки (9)–(13), окончательно получаем, что для всех $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$, $x \ge x_6 \ge x_5$

$$I = \ln |Q(x)| = \sum_{i=0}^{4} I_i \le I_0 + |I_1| + |I_2| + I_3 + |I_4| \le M + 6H(x) \ln \frac{x}{H(x)},$$

где $0 < M < \infty$. Это означает, что для всех $x \ge 0$

$$\ln |Q(x)| \le 6H(x) \ln^+ \frac{x}{H(x)} + A \quad (0 < A < \infty).$$

Требуемая оценка получена.

Пусть

$$S = \left\{ H \in K : d(H) = \varlimsup_{x \to \infty} \frac{H(x) \ln H(x)}{x \ln \frac{x}{H(x)}} < \infty \right\}, \tag{14}$$

где $K$ — подкласс функций $H \in L$ таких, что $H(0) = 0$, $H(t) = o(t)$ при $t \to \infty$, $\frac{H(t)}{t} \downarrow$ при $t \uparrow$.

**Теорема 2.** *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — *последовательность, имеющая плотность* $D$ $(0 \le D < \infty)$, *для которой выполняется условие*

$$\Lambda(x+p) - \Lambda(x) \le ap + b + \frac{\varphi(x)}{\ln^+ p + 1} \quad (p \ge 0), \tag{15}$$

*где* $\varphi$ — *любая неотрицательная неубывающая функция, заданная на луче* $\mathbb{R}_+$, $1 \le \varphi(x) \le cx \ln^+ x + q$.

*Если для некоторой функции* $H \in S$

$$|\Lambda(u) - Du| \le H(u) \quad (u \ge 0), \tag{16}$$

*то существует последовательность* $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n+1} - r_n = O(H(r_n))$ *при* $n \to \infty$ *такая, что при* $x = r_n \to \infty$

$$\ln |Q(x)| \ge -(9 + 2D + 2ad(H))H(x) \ln^+ \frac{x}{H(x)} - 2\varphi(x) + O(1). \tag{17}$$

*Здесь* $d(H)$, $a$, $D$ — *числа, фигурирующие в формулах* (14)–(16).

Доказательство. Для $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$ в обозначениях теоремы 1 имеем $\ln |Q(x)| = \sum\limits_{i=0}^{4} I_i$. Из оценок (9)–(11), (13) получаем, что для всех $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$, $x \ge x_7 \ge x_6$

$$\ln |Q(x)| \ge -M_0 - 5H(x) \ln \frac{x}{H(x)} - M_1 H(x) + I_3, \tag{18}$$

где

$$I_3 = \int\limits_{x-H}^{x+H} [\Lambda(u) - Du] K(x,u)\, du, \quad H = H(x).$$

Так как $\frac{H(x)}{x} < 1$ при $x \ge x_7$, то $\frac{H^2(x)}{x} < H(x)$. Пусть $x \ne \lambda_n$ $(n \ge 1)$, $x \ge x_7$ фиксировано. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$x - H < x - h < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < x + h < x + H,$$

где $h = \frac{H^2}{x}$, $H = H(x)$. При $\varepsilon \to 0$

$$I_3 = \left( \int\limits_{x-H}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+H} \right) [\Lambda(u) - Du] K(x,u)\, du + o(1).$$

Далее,

$$-D \left( \int\limits_{x-H}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+H} \right) uK(x,u)\, du = -xD \ln \left( \frac{2x-\varepsilon}{2x+\varepsilon} \right) \left( \frac{2x+H}{2x-H} \right).$$

Устремляя $\varepsilon$ к нулю, видим, что при $x \geq x_8 \geq x_7$

$$-D \int\limits_{x-H}^{x+H} K(x,u) u\, du = -xD \ln \frac{2x+H}{2x-H} \geq -C_1 H(x), \tag{19}$$

где $0 < C_1 < \infty$. Для $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$

$$\int\limits_{x-H}^{x+H} K(x,u)\Lambda(u) du = \left[ \left( \int\limits_{x-H}^{x-h} + \int\limits_{x+h}^{x+H} \right) + \left( \int\limits_{x-h}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+h} \right) + \int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \right] K(x,u)\Lambda(u)\, du$$
$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

Легко проверяется, что если $x \neq \lambda_n$ $(n \geq 1)$, то $J_3 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Далее,

$$J_1 = 2x^2 \left( \int\limits_{x-H}^{x-h} \frac{\Lambda(u)}{u(x^2-u^2)}\, du + \int\limits_{x+h}^{x+H} \frac{\Lambda(u)}{u(x^2-u^2)}\, du \right) = i_1 + i_2.$$

Но при $x \geq x_7$

$$i_1 \geq 2x^2 \Lambda(x-H) \int\limits_{x-H}^{x-h} \frac{du}{u(x^2-u^2)} \geq \Lambda(x-H) \ln \frac{H}{h} + \Lambda(x-H) \ln \frac{2x-H}{2x+H},$$

где $h = \frac{H^2}{x}$, $H = H(x)$. Учитывая то, что $\Lambda(x) = O(x)$, $H(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, для $x \geq x_9 \geq x_8$ получаем

$$i_1 \geq \Lambda(x-H) \ln \frac{x}{H} - C_2 H(x), \quad H = H(x), \quad 0 < C_2 < \infty. \tag{20}$$

Аналогично оценим $i_2$. Имеем

$$i_2 \geq \Lambda(x+H) \ln \frac{h}{H} + \Lambda(x+H) \ln \frac{2x+h}{2x+H},$$

где $h = \frac{H^2}{x}$, $H = H(x)$. Отсюда при $x \geq x_{10} \geq x_9$

$$i_2 \geq -\Lambda(x+H) \ln \frac{x}{H} - C_3 H(x), \quad H = H(x), \quad 0 < C_3 < \infty. \tag{21}$$

Следовательно, учитывая (20), (21), при некотором $C_4 > 0$ для $x \geq x_{11} \geq x_{10}$ получаем оценку

$$J_1 = i_1 + i_2 \geq -C_4 H(x) - [\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H)] \ln \frac{x}{H}, \quad H = H(x). \tag{22}$$

Далее, согласно теореме A существует последовательность $\{r_n\}$ $(0 < r_n \uparrow \infty)$ такая, что $\Lambda \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$, где $I_n = \{x : |x - r_n| \le p \ (0 < p < \infty)\}$. Убедимся, что последовательность $\{r_n\}$ можно выбрать так, что $r_{n+1} - r_n = O(H(r_n))$ при $r_n \to \infty$. Действительно, из (16) следует, что при $t \ge t_0$

$$\mu_\Lambda(\omega(t)) \le (D+3)|\omega(t)|, \quad \omega(t) = [t, t + H(t)),$$

где $\mu_\Lambda(w(t))$ — число точек $\lambda_n$ из полуинтервала $w(t)$. Следовательно, $[t_0, \infty) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \omega_i$, где $\omega_i = [t_i, t_i + H(t_i))$, причем $\mu_\Lambda(\omega_i) \le b|\omega_i|$, $b \ge 3$ $(i \ge 0)$. Не умаляя общности, можно считать, что $|\omega_0| \ge 1$. Пусть $\rho_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ $(i \ge 0)$ — центр $\omega_i$. Тогда каждый полуинтервал $\omega_i' = [\alpha_i, \beta_i)$ с центром в точке $\rho_i$, имеющий длину $\frac{1}{2}|\omega_i|$, содержит отрезок $I_i = \left\{x : |x - r_i| \le \frac{1}{4b}\right\}$, свободный от точек $\Lambda$. Далее,

$$r_{i+1} - r_i \le \frac{3}{4}|\omega_i| + \frac{3}{4}|\omega_{i+1}| \le \frac{3}{2}|\omega_{i+1}| = \frac{3}{2}H(t_{i+1}).$$

Так как $H \in S$, отсюда получаем, что $r_{i+1} - r_i \le dH(t_i)$ $(i \ge 0)$.

Оценим $J_2$ в точках последовательности $\{r_n\}$. Пусть $0 < \varepsilon < \tau$, $\tau = \frac{1}{4b}$. При $\tau \le h$ имеем

$$J_2 = 2x^2 \left[ \left( \int\limits_{x-\tau}^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^{x+\tau} \right) + \left( \int\limits_{x-h}^{x-\tau} + \int\limits_{x+\tau}^{x+h} \right) \right] \frac{\Lambda(u)}{u(x^2 - u^2)}\, du = i_3 + i_4.$$

При $h < \tau$ считаем, что $i_4 = 0$. Так как $\Lambda(u) = \Lambda(x)$ при $u \in [x - \tau, x + \tau]$, $x = r_n$ $(n \ge 1)$, то

$$i_3 = \Lambda(x) \left[ \ln \left( \frac{x - \varepsilon}{x + \varepsilon} \right)^2 \left( \frac{x + \tau}{x - \tau} \right)^2 + \ln \left( \frac{2x + \varepsilon}{2x - \epsilon} \right) \left( \frac{2x - \tau}{2x + \tau} \right) \right]$$
$$\ge \Lambda(x) \ln \frac{2x - \tau}{2x + \tau} + \Lambda(x) \ln \left( \frac{x - \varepsilon}{x + \varepsilon} \right)^2 = O(1) + o(1)$$

при $x \to \infty$ и $\varepsilon \to 0$ соответственно. Значит, при $x = r_n \ge x_{12} \ge x_{11}$, $0 < \varepsilon < \tau$

$$i_3 \ge -C_5 \quad (0 < C_5 < \infty). \tag{23}$$

Чтобы оценить $i_4$, воспользуемся тем, что для достаточно больших $x$

$$0 < h = \frac{H^2}{x} < H < H \ln \frac{x}{H}, \quad H = H(x). \tag{24}$$

Имеем

$$i_4 \ge 2x^2 \left( \Lambda(x - h) \int\limits_{x-h}^{x-\tau} \frac{du}{u(x^2 - u^2)} + \Lambda(x + h) \int\limits_{x+\tau}^{x+h} \frac{du}{u(x^2 - u^2)} \right).$$

Отсюда, учитывая (24), получаем, что при $x \to \infty$

$$i_4 \ge -[\Lambda(x + h) - \Lambda(x - h)] \ln \frac{h}{\tau} + O(h) + o(1). \tag{25}$$

Из (22)–(25) при $x = r_n \ge x_{13} \ge x_{12}$ заключаем, что

$$J_2 \ge -C_6 H(x) - [\Lambda(x + h) - \Lambda(x - h)] \ln \frac{h}{\tau}, \quad 0 < C_6 < \infty. \tag{26}$$

Таким образом, из (18), (19), (22), (24), (26) окончательно получаем, что для $x = r_n \geq x_{14} \geq x_{13}$

$$\ln|Q(x)| \geq -6H\ln\frac{x}{H} - C_7H - [\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H)]\ln\frac{x}{H} - [\Lambda(x+h) - \Lambda(x-h)]\ln\frac{h}{\tau}, \quad (27)$$

где $h = \frac{H^2}{x}$, $H = H(x)$, $0 < C_7 < \infty$.

Пользуясь условием (16), оценим разность $\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H)$ сверху. Имеем

$$\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H) = \Lambda(x+H) - D(x+H) + D(x-H) - \Lambda(x-H) + 2DH \leq H(x+H) + H(x-H) + 2DH(x) \quad (x \geq H).$$

Но $H(x) < x$ при $x \geq x_7$. Так как $H \in K$, то при $x \geq x_7$ будет

$$\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H) \leq H(2x) + H(x) + 2DH(x) \leq (2D+3)H(x),$$

тем самым при $x \geq x_7$

$$[\Lambda(x+H) - \Lambda(x-H)]\ln\frac{x}{H} \leq (2D+3)H\ln\frac{x}{H}, \quad H = H(x). \quad (28)$$

Чтобы оценить разность $\Lambda(x+h) - \Lambda(x-h)$, воспользуемся условием (15). Для этого положим $y = x - h$. Тогда из (15) следует, что

$$\Lambda(x+h) - \Lambda(x-h) = \Lambda(y+2h) - \Lambda(y) \leq 2ah + b + \frac{\varphi(y)}{\ln^+ 2h + 1} \leq 2ah + b + \frac{\varphi(x)}{\ln^+ h + 1}.$$

Следовательно, учитывая то, что $\frac{h(x)}{\tau} = \frac{H^2(x)}{\tau x} < H(x)$, $H \in S$, при $x \geq x_{15} \geq x_{14}$ получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$[\Lambda(x+h) - \Lambda(x-h)]\ln\frac{h}{\tau} \leq 2a\frac{H^2}{x}\ln H + b + 2\varphi(x) \leq 2a(d(H)+\varepsilon)H\ln\frac{x}{H} + 2\varphi(x) + b, \quad H = H(x). \quad (29)$$

Таким образом, из (27)–(29) при $x = r_n \geq x_{16} \geq x_{15}$ окончательно получаем оценку

$$\ln|Q(x)| \geq -[8+2D+2a(d(H)+\varepsilon)]H(x)\ln\frac{x}{H(x)} - C_8H(x) - 2\varphi(x), \quad 0 < C_8 < \infty.$$

Это означает, что для $x = r_n \to \infty$ справедлива оценка (17).

## § 2. Об эффективной оценке произведения Вейерштрасса на лучах

Пусть $M = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n \leq \ldots \leq \mu_n \to \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность

$$\tau = \varlimsup_{n\to\infty}\frac{n}{\mu_n}.$$

Положим

$$W(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right).$$

Наряду с индикатрисой роста

$$h(\varphi) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|W(re^{i\varphi})|}{r}$$

для функции $W$ вводится другая характеристика — коиндикатриса [6]

$$h^*(\varphi) = \varlimsup_{r\to\infty} \ln\left|\frac{1}{W(re^{i\varphi})}\right|, \quad \varphi \neq 0, \pi.$$

Если последовательность $M$ имеет плотность, то $h^*(\varphi) = -h(\varphi)$. В общем случае функция $h^*(\varphi)$ не ограничена при $\varphi \to 0$.

Последовательность $M$ имеет конечную верхнюю плотность тогда и только тогда, когда $L < \infty$, где

$$L = \lim_{\xi\to1-0} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r) - n(r\xi)}{r}$$

— индекс насыщенности [7], $n(r) = \sum\limits_{\mu_n \le r} 1$. Отметим, что внешний предел всегда существует, так как функция

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r) - n(r\xi)}{r}$$

является возрастающей по $\xi$. Если последовательность $M$ имеет плотность, то $L = 0$. Если конечная максимальная плотность

$$\tau^* = \lim_{\xi\to1-0} \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r) - n(r\xi)}{r(1-\xi)}$$

конечна, то опять $L = 0$. В [8] показано, что для любого $\epsilon > 0$ при $0 < |\varphi| < \varphi_0(\epsilon)$

$$(L-\varepsilon)\ln\frac{1}{|\varphi|} < h^*(\varphi) < (L+\varepsilon)\ln\frac{1}{|\varphi|},$$

где $L$ — индекс насыщенности. Но в некоторых случаях удается найти более точную зависимость функции $|W(re^{i\varphi})|^{-1}$ от переменных $r$ и $\varphi$.

**Теорема 3.** *Пусть последовательность $M = \{\mu_n\}$ имеет плотность $\sigma$, причем*

$$|n(t) - \sigma(t)| \le H(t) \quad (t \ge 0), \ H \in K. \tag{30}$$

*Тогда существует $\rho \ge 0$ такое, что при $r \ge \rho$ для всех $0 < |\varphi| \le \frac{\pi}{4}$, $0 < |\pi - \varphi| \le \frac{\pi}{4}$*

$$|\ln|W(re^{i\varphi})| - \pi\sigma|\sin\varphi|r| \le 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} + \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r} + 3\mu_1\sigma. \tag{31}$$

Доказательство. Оценку (31) достаточно установить лишь для $z = re^{i\varphi}$ из угла $0 < \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Имеем

$$\ln W(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) = \int_0^{\infty} \ln\left(1 - \frac{z^2}{t^2}\right) dn(t).$$

Интегрируя по частям, получаем, что

$$\ln Q(z) = -2z^2 \int\limits_0^\infty \frac{n(t)}{t(t^2 - z^2)}\, dt.$$

Положим $m(t) = n(t) - \sigma t$. Тогда $n(t) = m(t) + \sigma t$ и

$$\ln W(z) = -2z^2\sigma \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^2 - z^2} - 2z^2 \int\limits_0^\infty \frac{m(t)dt}{t(t^2 - z^2)} = I + J.$$

Первый интеграл равен

$$I = -z^2\sigma \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dt}{t^2 - z^2} = -\pi\sigma i z \quad (0 < \varphi \le \pi/4).$$

Рассматривая и остальные значения $\varphi$, заключаем, что $\operatorname{Re} I = \pi\sigma|\sin\varphi|r$. Следовательно,

$$|\ln|W(re^{i\varphi})| - \pi\sigma|\sin\varphi|r| \le \left|2z^2 \int\limits_0^\infty \frac{m(t)dt}{t(t^2 - z^2)}\right| = |J|.$$

Пусть $r_0$ — решение уравнения

$$\frac{H(r)}{r} = \frac{1}{2}.$$

Так как $H \in K$, то $2H(r) \le r$ при всех $r \ge r_0$. При любом $r \ge r_1 = \max(r_0, 2\mu_1)$ интеграл $J$ запишем в виде

$$J = 2z^2 \left( \int\limits_0^{\mu_1} + \int\limits_{\mu_1}^{H} + \int\limits_{H}^{r-H} + \int\limits_{r-H}^{r+H} + \int\limits_{r+H}^{\infty} \right) \frac{m(t)dt}{t(t^2 - z^2)} = \sum_{i=0}^{4} J_i, \tag{32}$$

где $H = H(r)$. С учетом (30), т. е. оценки $|m(t)| \le H(t)$ $(H \in K)$, как в теореме 1, показывается, что при $r \ge r_2 > r_1$

$$|J_1| + |J_2| + |J_4| \le 6H(r) \ln \frac{r}{H(r)}, \quad |J_0| \le \sigma r \ln\left|\frac{r + \mu_1}{r - \mu_1}\right| \le 3\mu_1\sigma. \tag{33}$$

Оценим теперь интеграл

$$J_3 = 2z^2 \int\limits_{r-H}^{r+H} \frac{m(t)}{t(t^2 - z^2)}\, dt \quad (z = re^{i\varphi}).$$

Имеем $|t^2 - z^2| = |t - z||t + z|$. Если $z$ лежит в угле $0 < \varphi \le \frac{\pi}{4}$, то $|t + z| \ge t, |t - z| \ge t\sin\varphi$. Значит,

$$|J_3| \le 2r^2 \int\limits_{r-H}^{r+H} \frac{H(t)}{t|t^2 - z^2|}\, dt \le 2r^2 \frac{H(r - H)}{r - H} \int\limits_{r-H}^{r+H} \frac{dt}{t^2|\sin\varphi|}.$$

Так как в рассматриваемом случае $|\sin\varphi| \geq \frac{2}{\pi}|\varphi|$, $2H(r) \leq r$, то при $r \geq r_0$

$$|J_3| \leq \frac{4}{|\sin\varphi|}\frac{H^2(r)}{r}\left(\frac{r}{r-H}\right)^2 \leq \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r}.$$

Учитывая это, из (32), (33) получаем, что при $r \geq \rho = r_2$ для всех $\varphi$, $0 < |\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$,

$$|\ln|W(re^{i\varphi})| - \pi\sigma|\sin\varphi|r| \leq 6H(r)\ln\frac{r}{H(r)} + \frac{8\pi}{|\varphi|}\frac{H^2(r)}{r} + 3\mu_1\sigma.$$

Оценка (31) доказана. Функция $W$ четная. Поэтому данная оценка верна и для $z = re^{i\varphi}$ из угла $0 < |\pi - \varphi| \leq \frac{\pi}{4}$.

Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
2. *Redheffer R. M.* Completeness of sets of complex exponentials // Adv. Math. 1977. V. 24, N 1. P. 1–62.
3. *Кацнельсон В. Э.* Целые функции класса Картрайт с нерегулярным поведением // Функциональный анализ и его приложения. 1976. Т. 10, № 4. С. 35–44.
4. *Мацаев В. И.* История отечественной математики. Киев: Наук. думка, 1970. Т. 4. Книга 1.
5. *Koosis P.* The logarithmic integral. I. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
6. *Леонтьев А. Ф.* О сходимости полиномов Дирихле // Докл. АН СССР. 1956. Т. 108, № 1. С. 23–26.
7. *Baillette A.* Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles // C. R. Acad. Sci. Ser. 1 Math. 1959. V. 249, N 23. P. 2470–2471.
8. *Леонтьев А. Ф.* Последовательность полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.


*Статья поступила 30 мая 2005 г., окончательный вариант — 14 ноября 2006 г.*

*Гайсин Ахтяр Магазович,* *Сергеева Дина Ильдаровна*
*Институт математики с вычислительным центром*
*Уфимского научного центра РАН,*
*ул. Чернышевского, 112, Уфа 450077*
`Gaisin@imat.rb.ru`, `SergeevaDI@yandex.ru`