Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 517.518.1+517.518.17

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КРИВЫХ ВАН КОХА

С. П. Пономарев

Аннотация. Изучаются свойства интегрального оператора T с ядром Коши, действующего из $L^\infty(\Gamma, \mu)$, где Γ — кривая Ван Коха, в пространство функций $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Доказано, что образ T нетривиален и содержится в пространстве $AC(\Gamma)$ непрерывных на $\mathbb{C}$ функций, исчезающих на ∞ и аналитических вне Γ. Показано также, что T инъективен, компактен и удовлетворяет некоторому функциональному уравнению. Полученные результаты представляют собой естественное продолжение наших исследований по задаче AC-устранимости квазиконформных кривых, решение которой впервые анонсировано в [1] и дополнено позже некоторыми свойствами кривых Ван Коха [2, 3]. В данной статье эта задача обсуждается в более общей постановке, в частности, присутствуют важные детали, отсутствующие в [1]. Сформулированы нерешенные задачи.

Ключевые слова: интеграл типа Коши, кривая Ван Коха, квазиконформное отображение, AC-устранимость, псевдоаналитическое отображение, компактный оператор.

Введение. Предварительные сведения и основные понятия

Наши исследования восходят к так называемой задаче AC-устранимости квазиконформных кривых (определения см. ниже). Решение этой задачи было дано с использованием кривых Ван Коха, которые оказываются квазиконформными, но не AC-устранимыми [1]. Это основная причина рассмотрения таких кривых, тем более что они определяют некоторые другие интересные (с нашей точки зрения) функции. Кроме того, кривые Ван Коха представляются наиболее «простыми» фрактальными самоподобными кривыми с указанными свойствами.

Под *кривой* мы понимаем гомеоморфный (или, что то же самое, инъективный и непрерывный) образ замкнутого промежутка.

Наша цель — исследовать свойства функций, представимых в виде интегралов

$$T(f)(z) = \int_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

а также сами интегралы как линейные операторы.

Всюду ниже $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — кривая Ван Коха, μ — мера на Γ, $\mu\Gamma < \infty$, и $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ — существенно ограниченная μ-измеримая функция.

Мы называем (1) *интегралом типа Коши*, хотя такой термин обычно используется для интегралов вида

$$\int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \tag{2}$$

но они нам не подходят.

Определение 1. Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Множество $E \subset \Omega$, замкнутое в Ω, называют АС-*устранимым* в Ω, если каждая непрерывная функция $f : \Omega \to \mathbb{C}$, аналитическая в $\Omega \setminus E$, будет аналитической в Ω. В противном случае говорят, что E *не* АС-*устранимо* (в Ω).

Определение 2. Кривую $C \subset \mathbb{C}$ называют *квазиконформной*, если существуют область $G \subset \mathbb{C}$, квазиконформное отображение $\Phi : G \to \mathbb{C}$ и замкнутый промежуток $I \subset G$ такие, что $C = \Phi(I)$ (общие определения и свойства см. в [4]).

Термин «квазиконформный» всегда будет пониматься как «K-квазиконформный» [5]. Не ограничивая общности, будем считать, что I лежит в вещественной прямой.

Наше исследование восходит к следующей задаче. Пусть $C \subset \Omega$ — квазиконформная кривая. Верно ли, что C АС-устранима? Как упомянуто выше, в [1] на этот вопрос дан отрицательный ответ. Этот вопрос тесно связан с задачей псевдоаналитического продолжения (см. [6]).

Определение 3 [6]. Под *псевдоаналитическим отображением* мы понимаем любое отображение $F : \Omega \to \mathbb{C}$, представимое в виде $F = w \circ q$, где w — аналитическая функция, а q локально квазиконформно.

Заменяя в определении 1 аналитичность псевдоаналитичностью, получим

Определение 4. Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Множество $E \subset \Omega$, замкнутое в Ω, будем называть РАС-*устранимым* в Ω, если каждая непрерывная функция $f : \Omega \to \mathbb{C}$, псевдоаналитическая в $\Omega \setminus E$, будет псевдоаналитической в Ω. В ином случае будем говорить, что E *не* РАС-*устранима* (в Ω).

Сформулируем следующий вопрос, аналогичный поставленному для АС-устранимости квазиконформных кривых.

Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{C}$ и $E \subset \Omega$ замкнуто в Ω. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{C}$ непрерывна в Ω и псевдоаналитична в $\Omega \setminus E$. Будет ли f псевдоаналитической в Ω? В [1], по существу, показано, что без дополнительных условий на E ответ, вообще говоря, отрицательный. Это мы обсудим в разд. 4.

1. Специальное семейство кривых Ван Коха

Кривые Ван Коха, иногда называемые «снежинками», можно описать разными способами. Мы рассмотрим специальное семейство кривых Ван Коха и для удобства читателя повторим конструкцию и понятия из [1–3].

Следует подчеркнуть, что наши рассуждения будут существенно опираться на геометрическую структуру таких кривых.

Следуя [1–3], рассмотрим семейство кривых Ван Коха

$$\{\Gamma_\theta : \theta \in (0, \pi/4)\}, \tag{3}$$

полученных из треугольника Δ_1^0 (замкнутого двумерного симплекса) с вершинами $0, 1, (1 + i \operatorname{tg} \theta)/2$, последовательным удалением открытых равнобедренных треугольников, подобных исходному треугольнику Δ_1^0. На первом шаге удалим из Δ_1^0 (треугольника нулевого ранга) открытый треугольник с вершинами λ^2, $1 - \lambda^2$, $(1 + i \operatorname{tg} \theta)/2$, где $\lambda = (2 \cos \theta)^{-1}$. Получим два замкнутых треугольника

Δ_1^1, Δ_2^1 ранга один, подобных Δ_1^0. На n-м шаге построения получим 2^n равных треугольников Δ_k^n ранга n, подобных Δ_1^0, $\operatorname{diam}\Delta_k^n = \lambda^n$. По определению

$$\Gamma_\theta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} \Delta_k^n. \tag{4}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ треугольники ранга n снабжаются индексом k в естественном порядке. Это означает, что Δ_k^n предшествует Δ_{k+1}^n, треугольники Δ_k^n, Δ_{k+1}^n имеют общую вершину угла θ и $0 \in \Delta_1^n$, $1 \in \Delta_{2^n}^n$. Этот порядок очевиден из построения.

В дальнейшем мы часто будем опускать для простоты индекс θ (т. е. писать Γ вместо Γ_θ, и т. п.), если нет опасности недоразумений.

2. Натуральная параметризация кривых Ван Коха

Перечислим некоторые свойства кривых Ван Коха, а также другие важные определения и обозначения.

Для каждого фиксированного $\theta \in (0, \pi/4)$ существуют две последовательности $\{L^n\}$, $\{\varphi_n\}$, соответствующие представлению (4). Элементы первой из них суть ломаные

$$L^n = \bigcup_{k=1}^{2^n} s_k^n, \tag{5}$$

где $s_k^n = \left[z_{k-1}^n, z_k^n\right]$ — отрезок с концами z_{k-1}^n, z_k^n $(z_0^n = 0,\ z_{2^n}^n = 1)$, являющийся стороной треугольника Δ_k^n, лежащей против угла $\pi - 2\theta$. Отметим, что «n» в z_k^n означает верхний индекс. Каждый s_k^n ориентирован от z_{k-1}^n до z_k^n. Обозначим через L^0 отрезок $[0,1]$, так что $L^0 = s_1^0 = [0,1]$.

Вторая последовательность состоит из гомеоморфизмов $\varphi_n : [0,1] \to L^n$, обладающих свойствами:

(i) $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n(1) = 1$;

(ii) для каждого k, $1 \le k \le 2^n$, ограничение $\varphi_n | I_k^n$, где $I_k^n = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$, является аффинным отображением отрезка I_k^n на s_k^n и $\varphi_n(k2^{-n}) = z_k^n$ для $k \in \{0, 1, \dots, 2^n\}$, тем самым φ_n — параметризация ориентированной дуги L^n.

Теорема 1. (i) *Для любого $\theta \in (0, \pi/4)$ существует равномерный предел*

$$\varphi = \lim \varphi_n, \tag{6}$$

представляющий собой гомеоморфизм отрезка $[0,1]$ на Γ_θ, где Γ_θ снабжено обычной метрикой $|z_1 - z_2|$.

(ii) *Гомеоморфизм $\varphi : [0,1] \to \Gamma_\theta$ удовлетворяет двустороннему неравенству Гёльдера*

$$A(\theta)|t_1 - t_2|^{\log_2 2\cos\theta} \le |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le 4|t_1 - t_2|^{\log_2 2\cos\theta}, \tag{7}$$

где $A(\theta) = \frac{\sin 3\theta}{8\cos^3\theta}$ (в [2] ошибочно записано $\sin 4\theta$ вместо $\sin 3\theta$).

Очевидно, φ зависит от θ. Мы называем φ *натуральной параметризацией* $\Gamma = \Gamma_\theta$.

Опустим доказательство утверждения (i), которое, не будучи кратким, не требует особой изобретательности и должно быть известно давно, однако автор не сумел найти подходящий источник для указания ссылки. Утверждение (ii) доказано в [2].

Теорема 2 [1–3]. (a) *Любая* $\Gamma = \Gamma_\theta$, $0 < \theta < \pi/4$, *является квазиконформной кривой.*

(b) *Хаусдорфова размерность* Γ_θ *равна* $1/\log_2 2\cos\theta$ (*ср. с показателем в* (7)).

(c) *Ни одна из* Γ_θ, $0 < \theta < \pi/4$, *не является* AC-*устранимой.*

Из двустороннего неравенства (ii) в теореме 1 вытекает, что Γ удовлетворяет так называемому условию Альфорса, откуда следует утверждение (a) (см. [1, 2, 4]). Утверждение (b) доказано в [2]. Утверждение (c) выводится из (b) (см. [2]) применением общих результатов из [7]. В [1] дано другое прямое доказательство (c) (без обращения к мере Хаусдорфа) для всех достаточно малых θ. В разд. 3 мы рассмотрим этот подход в более общей постановке.

В завершение данного раздела опишем углы, образованные s_k^n.

Для каждого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ обозначим через A^n множество углов $\theta_{n,k}$, $1 \le k \le 2^n$, образованных ориентированными отрезками $s_k^n = \left[z_{k-1}^n, z_k^n\right]$ с осью Ox. Ясно, что $A^0 = \{0\}$ и $A^1 = \{\theta, -\theta\}$. Снабдим каждый A^n естественным порядком согласно естественному порядку отрезков s_k^n или, равносильно, естественному порядку множества $\{1, \dots, 2^n\}$.

Элементарное геометрическое изучение построения L^n показывает, что выполнено следующее рекуррентное равенство:

$$\forall n \ge 0 \quad A^{n+2} = A^n \cup (A^n + 2\theta) \cup (A^n - 2\theta) \cup A^n, \tag{8}$$

где использовано стандартное обозначение $E + r = \{x + r : x \in E\}$ для $E \subset \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$.

Соотношение (8) позволяет явно находить все вершины каждого из L^n:

$$z_k^n = z_{k-1}^n + \lambda^n e^{i\theta_{n,k}}, \quad k \in \{1, \dots, 2^n\},\ n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

где $z_0^n = 0$. Между прочим, соотношения (8), (9) можно легко использовать для изображения L^n.

3. Непрерывный интеграл типа Коши

В этом разделе докажем существование интеграла (1), где μ — образ лебеговой меры на $[0, 1]$. Далее мы докажем, что (1) как функция от параметра z непрерывна на $\mathbb{C}$ и аналитична вне Γ.

Пусть $\varphi : [0, 1] \to \Gamma$ — натуральная параметризация $\Gamma = \Gamma_\theta$. Так как φ — биекция, можно рассматривать пространство с мерой $(\Gamma, \mathscr{M}, \mu)$, где σ-алгебра $\mathscr{M}$ состоит из всех множеств $E \subset \Gamma$ таких, что $\varphi^{-1}(E)$ измеримы по Лебегу. Мера μ на $\mathscr{M}$ определяется равенством $\mu(E) = |\varphi^{-1}(E)|$, где $|\cdot|$ — мера Лебега на $[0, 1]$. Поскольку φ — гомеоморфизм, $\mathscr{M}$ содержит все борелевские подмножества метрического пространства Γ.

Заметим, что в силу построения φ и μ, в частности, будет $\mu\Gamma_k^n = 2^{-n}$ для любых $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $k = 1, \dots, 2^n$, где $\Gamma_k^n = \Gamma \cap \Delta_k^n$. Для $n = 0$ имеем $\Gamma_1^0 = \Gamma \cap \Delta_1^0 = \Gamma$ и $\mu\Gamma = 1$.

Далее мы рассмотрим пространство $L^\infty(\Gamma) = L^\infty(\Gamma, \mu)$ μ-измеримых существенно ограниченных функций $f : \Gamma \to \overline{\mathbb{C}}$. Снабдим $L^\infty(\Gamma)$ естественной нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_\Gamma |f|.$$

Ясно, что $L^\infty(\Gamma)$ — банахово пространство над $\mathbb{C}$.

Для $f \in L^\infty(\Gamma)$ при любом $z \in \mathbb{C}$ положим

$$T_\theta(f)(z) = \int\limits_{\Gamma_\theta} \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z}. \tag{10}$$

Напоминаем, что мы обычно опускаем индекс θ.

Докажем прежде всего, что интегралы (10) существуют в обычном лебеговом смысле. Поскольку мы рассматриваем только существенно ограниченные функции, достаточно доказать, что

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} < \infty \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Это очевидно для $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Остается доказать (11) только для $z \in \Gamma$. Доказательство будет основано на ряде лемм.

Важное предположение. Всюду в дальнейшем будем считать, что $0 < \theta \le \pi/8$. Это значительно упростит вычисления в формулах, не затронув наших целей.

Лемма 1. *Пусть z — вершина угла θ в Δ_k^n, где $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \dots, 2^n\}$. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le \frac{\cos^{n+1}\theta}{1 - \cos\theta}. \tag{12}$$

Доказательство. Имеем $\Gamma_k^n = \Gamma_{2k-1}^{n+1} \cup \Gamma_{2k}^{n+1}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $z \in \Gamma_{2k-1}^{n+1}$, поэтому $z \notin \Gamma_{2(k-1)+2}^{n+1}$. Аналогично получаем $z \in \Gamma_{2^2(k-1)+1}^{n+2}$ и тем самым $z \notin \Gamma_{2^2(k-1)+2}^{n+2}$. Продолжая эти рассуждения, придем к тому, что для каждого натурального p будет $z \notin \Gamma_{2^p(k-1)+2}^{n+p}$, в то время как $z \in \Gamma_{2^p(k-1)+1}^{n+p}$. Следовательно,

$$\Gamma_k^n = \left(\bigcup_{s=1}^{p} \Gamma_{2^s(k-1)+2}^{n+s} \right) \cup \Gamma_{2^p(k-1)+1}^{n+p} \quad \text{для всех } p \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Так как $\operatorname{diam} \Gamma_{2^p(k-1)+1}^{n+p} = \lambda^{n+p} \to 0$ при $p \to \infty$, имеем

$$\{z\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} \Gamma_{2^p(k-1)+1}^{n+p}.$$

Легко видеть, что это ввиду (13) влечет

$$\Gamma_k^n = \{z\} \cup \bigcup_{p=1}^{\infty} \Gamma_{2^p(k-1)+2}^{n+p}. \tag{14}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le \sum_{p=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_{2^p(k-1)+2}^{n+p}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|}. \tag{15}$$

Для доказательства сходимости ряда в (15) оценим $|z-\zeta|$ снизу для $\zeta \in \Gamma^{n+p}_{2^p(k-1)+2}$. Поскольку $0 < \theta \le \pi/8$, имеем $\pi - 4\theta \ge \pi/2$, откуда простыми геометрическими рассуждениями приходим к тому, что для любых $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ и $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ будет

$$\inf_{\zeta \in \Gamma^{n+p}_{2^p(k-1)+2}} |z-\zeta| \ge \lambda^{n+p}. \tag{16}$$

Оценим теперь (15), помня, что $\lambda = (2\cos\theta)^{-1}$ и $\mu\Gamma^{n+p}_{2^p(k-1)+2} = 2^{-n-p}$:

$$\int\limits_{\Gamma^n_k} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le \sum_{p=1}^{\infty} \cos^{n+p}\theta = \frac{\cos^{n+1}\theta}{1-\cos\theta}, \tag{17}$$

т. е. (12) доказано. $\square$

Следствие 1. *Если $z \in \Delta^n_k$ — вершина угла $\pi - 2\theta$, то*

$$\int\limits_{\Gamma^n_k} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le \frac{2\cos^{n+2}\theta}{1-\cos\theta}. \tag{18}$$

Результат следствия вытекает непосредственно из (17), ибо $\Gamma^n_k = \Gamma^{n+1}_{2k-1} \cup \Gamma^{n+1}_{2k}$ и z — общая вершина угла θ в треугольниках Δ^{n+1}_{2k-1}, Δ^{n+1}_{2k}.

Лемма 2. *Пусть w — вершина угла $\pi - 2\theta$ в Δ^n_k и $z \in \Gamma^{n+1}_{2k-1}$, $\zeta \in \Gamma^{n+1}_{2k}$. Тогда*

$$|z-\zeta| \ge |w-\zeta|. \tag{19}$$

Доказательство. Очевидно, $z \in \Delta^{n+1}_{2k-1}$ и $\zeta \in \Delta^{n+1}_{2k}$. Так как $\pi - 4\theta \ge \pi/2$, легко увидеть, что угол с вершиной w в треугольнике с вершинами z, w, ζ не меньше чем $\pi/2$, откуда вытекает требуемое. $\square$

Лемма 3. *Пусть $z \in \Gamma^n_k$ не является вершиной никакого треугольника Δ^m_s. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma^n_k} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le \frac{cos^{n+2}\theta}{(1-\cos\theta)^2}. \tag{20}$$

Доказательство. Запишем

$$\Delta^n_k \supset \Delta^{n+1}_{k_1} \cup \Delta^{n+1}_{k'_1}$$

и допустим, что $z \in \Delta^{n+1}_{k_1}$. Тогда $z \notin \Delta^{n+1}_{k'_1}$, потому что z не является вершиной какого-либо треугольника. Аналогично имеем

$$\Delta^{n+1}_{k_1} \supset \Delta^{n+2}_{k_2} \cup \Delta^{n+2}_{k'_2},$$

где $z \in \Delta^{n+2}_{k_2}$, но $z \notin \Delta^{n+2}_{k'_2}$. Ясно теперь, что, продолжая этот процесс, мы найдем (единственную) последовательность $\left\{\Delta^{n+p}_{k_p},\ p \in \mathbb{N}\right\}$ такую, что $z \in \Delta^{n+p}_{k_p} \subset \Delta^{n+p-1}_{k_{p-1}}$ для всех $p > 1$. Пусть $\Delta^{n+p}_{k'_p}$ — треугольник, имеющий с $\Delta^{n+p}_{k_p}$ общую вершину w_p, такой, что $z \notin \Delta^{n+p}_{k'_p}$ и $\Delta^{n+p}_{k_p} \cup \Delta^{n+p}_{k'_p} \subset \Delta^{n+p-1}_{k_{p-1}}$. Очевидно,

$$\Gamma^n_k = \{z\} \cup \bigcup_{p=1}^{\infty} \Gamma^{n+p}_{k'_p}. \tag{21}$$

По лемме 2, примененной к треугольникам $\Delta_{k_p}^{n+p}$, $\Delta_{k'_p}^{n+p}$, $\Delta_{k_{p-1}}^{n+p-1}$, получим

$$\forall \zeta \in \Delta_{k'_p}^{n+p} \quad |\zeta - z| \geq |w_p - \zeta|. \tag{22}$$

Поэтому ввиду (21) и леммы 1 (заметив, что w_p — вершина в $\Delta_{k'_p}^{n+p}$ угла θ) приходим к тому, что

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \leq \sum_{p=1}^{\infty} \int\limits_{\Gamma_{k'_p}^{n+p}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - w_p|} \leq (1-\cos\theta)^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \cos^{n+p+1}(\theta) = \frac{\cos^{n+2}\theta}{(1-\cos\theta)^2}. \tag{23}$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть $z \in \Gamma_k^n$ не вершина Δ_k^n, но вершина некоторого треугольника $\Delta_{k_p}^{n+p}$ с наименьшим p. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \leq \frac{\cos^{n+2}\theta}{(1-\cos\theta)^2}. \tag{24}$$

Иными словами, мы получим такую же оценку, как и (20).

Доказательство. Очевидно, $\Delta_{k_p}^{n+p} \subset \Delta_k^n$. Действуя, как в предыдущей лемме, получим разложение

$$\Gamma_k^n = \Gamma_{k_1}^{n+1} \cup \Gamma_{k'_1}^{n+1} = \Gamma_{k'_1}^{n+1} \cup \Gamma_{k'_2}^{n+2} \cup \Gamma_{k_2}^{n+2} = \dots = \left(\bigcup_{s=1}^{p} \Gamma_{k'_s}^{n+s}\right) \cup \Gamma_{k_p}^{n+p} \tag{25}$$

такое, что $\Delta_{k_{s+1}}^{n+s+1} \cup \Delta_{k'_{s+1}}^{n+s+1} \subset \Delta_{k_s}^{n+s}$, $s = 1, \dots, p-1$; $\Delta_{k'_s}^{n+s}$ не включает z, но имеет общую вершину w_s с $\Delta_{k_s}^{n+s}$, в то время как z включается в $\Delta_{k_p}^{n+p}$. Напомним, что $\Gamma_{k'_s}^{n+s} = \Delta_{k'_s}^{n+s} \cap \Gamma$ и аналогично $\Gamma_{k_s}^{n+s} = \Delta_{k_s}^{n+s} \cap \Gamma$. Заметим, что w_s — вершина угла θ каждого из треугольников $\Delta_{k'_s}^{n+s}$. Далее, легко видеть, что точка z является вершиной угла $\pi - 2\theta$ последнего треугольника $\Delta_{k_p}^{n+p}$ ввиду минимальности p. Тогда по лемме 1 и следствию из нее получим, что

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} &\leq \sum_{s=1}^{p} \int\limits_{\Gamma_{k'_s}^{n+s}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - w_s|} + \int\limits_{\Gamma_{k_p}^{n+p}} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \\
&\leq (1-\cos\theta)^{-1} \left(\sum_{s=1}^{p} \cos^{n+s+1}\theta + 2\cos^{n+p+2}\theta\right) \\
&= \frac{\cos^{n+2}\theta}{1-\cos\theta}(1 + \cos\theta + \dots + \cos^{p-1}\theta + 2\cos^{p}\theta) \\
&= \frac{\cos^{n+2}\theta(1+\cos^{p}\theta(1-2\cos\theta))}{(1-\cos\theta)^2} \leq \frac{\cos^{n+2}\theta}{(1-\cos\theta)^2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Следствие 2. *Для любого Γ_k^n и любой $z \in \Gamma_k^n$*

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \leq \frac{2\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2}. \tag{26}$$

Следствие легко получить, взяв максимум оценок в леммах 1–3 и следствии 1.

В завершение раздела дадим общую оценку, имеющую место для любой точки $z \in \mathbb{C}$.

Лемма 5. *Для любых* Γ_k^n, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^n\}$, *и* $z \in \mathbb{C}$ *имеет место оценка*

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le \frac{4\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2}. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $\zeta^* \in \Gamma_k^n$ таковы, что $|z - \zeta^*| = \operatorname{dist}(z, \Gamma_k^n)$. Для любой $\zeta \in \Gamma_k^n$ имеем

$$|\zeta - \zeta^*| \le |\zeta - z| + |z - \zeta^*| \le 2|\zeta - z|,$$

откуда ввиду (26)

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le 2 \int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta - \zeta^*|} \le \frac{4\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2},$$

что и требовалось. □

Лемма 5 может быть обобщена следующим образом.

Лемма 6. *При любых* Γ_k^n, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^n\}$, *и* $z \in \mathbb{C}$ *для каждой* $f \in L^\infty(\Gamma)$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{|f(\zeta)|\, d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le \frac{4\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2} \|f|_{\Gamma_k^n}\|_\infty. \tag{28}$$

В частности, для любых $z \in \mathbb{C}$ *и* $f \in L^\infty(\Gamma)$

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{|f(\zeta)|\, d\mu(\zeta)}{|\zeta - z|} \le \frac{4\cos\theta}{(1-\cos\theta)^2} \|f\|_\infty. \tag{29}$$

Лемма вытекает непосредственно из леммы 5.

Сформулируем наш первый результат, касающийся интегралов типа Коши (1), определенных на кривых Ван Коха.

Теорема 3. (i) *Для любой* $f \in L^\infty(\Gamma)$ *функция*

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto T(f)(z) = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \tag{30}$$

аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ *и непрерывна в* $\mathbb{C}$.

(ii) $\lim\limits_{z \to \infty} T(f)(z) = 0$.

Доказательство. (i) Функция $T(f)$ аналитична вне Γ. Действительно, легко видеть, что для доказательства можно применить те же рассуждения, что и в аналогичной ситуации для классического интеграла типа Коши (2), так что детали мы опустим. Остается доказать непрерывность $T(f)$ в точках из Γ. Пусть V — множество всех вершин всех треугольников Δ_k^n, $n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le 2^n$. Очевидно, что $V \subset \Gamma$. Возьмем $z_0 \in \Gamma$ и допустим, что $z_0 \notin V$. Фиксируем $\Gamma_k^n \ni z_0$ (отметим, что существует последовательность $\{\Gamma_{k_n}^n\}$ такая, что $\Gamma_{k_{n+1}}^{n+1} \subset \Gamma_{k_n}^n$ и $z_0 \in \Gamma_{k_n}^n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$).

Пусть $\varphi : [0,1] \to \Gamma$ — натуральная параметризация Γ. Так как $z_0 \notin V$ и $z_0 \in \Gamma_k^n$, найдется (единственное) t_0, расположенное в открытом интервале

$\operatorname{Int} I_k^n = ((k-1)2^{-n}, k2^{-n})$, такое, что $z_0 = \varphi(t_0)$. Обозначим $\widehat{\Gamma}_k^n = \varphi(\operatorname{Int} I_k^n)$. Ясно, что $\varphi(\operatorname{Int} I_k^n) = \operatorname{Int} \Gamma_k^n$ (в метрическом пространстве Γ) и что $\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_k^n$ — замкнутое подмножество в $\mathbb{C}$. Тем самым множество $\mathbb{C} \setminus (\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_k^n)$ открыто и включает z_0.

Для каждой точки $z \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_k^n)$ запишем

$$T(f)(z) - T(f)(z_0) = \int\limits_{\widehat{\Gamma}_k^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta - z} - \int\limits_{\widehat{\Gamma}_k^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta - z_0} + (z - z_0) \int\limits_{\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_k^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}. \tag{31}$$

Поскольку $z_0 \in \widehat{\Gamma}_k^n$, ясно, что существует конечный предел

$$\lim_{z \to z_0} \int\limits_{\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_k^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} = \int\limits_{\Gamma \setminus \widehat{\Gamma}_k^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2}.$$

Поэтому последний член в (31) стремится к нулю при $z \to z_0$.

«Неклассическим» и решающим моментом в наших рассуждениях является то, что абсолютное значение первых двух интегралов в (31) может быть оценено с помощью (27). Тогда из (31) получим

$$\limsup_{z \to z_0} |T(f)(z) - T(f)(z_0)| \le \frac{8 \cos^{n+1} \theta}{(1 - \cos\theta)^2} \|f\|_\infty.$$

Поскольку это неравенство выполняется для произвольно большого n, заключаем, что $\lim\limits_{z \to z_0} T(f)(z) = T(f)(z_0)$. Случай $z_0 \in V$ рассматривается так же, как и выше, поэтому детали опускаем. Разница состоит в том, что в этом случае вместо одной кривой $\Gamma_k^n \ni z_0$ надо взять при $z_0 \ne 0, 1$ две смежные кривые Γ_k^n, Γ_{k+1}^n, имеющие z_0 их единственной общей точкой. В случае $z_0 = 0$ или $z_0 = 1$ берем лишь одну кривую Γ_1^n или $\Gamma_{2^n}^n$ соответственно. Этих замечаний достаточно для завершения доказательства (i).

Утверждение (ii) вытекает непосредственно из структуры (30). $\square$

Замечание 1. Если заменить в теореме 3 кривую $\Gamma = \Gamma_1^0$ кривой Γ_k^n, то очевидно, что верны соответствующие аналоги утверждений (i), (ii), т. е. для любой $f \in L^\infty(\Gamma_k^n)$ функция

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \tag{32}$$

аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Gamma_k^n$, непрерывна в $\mathbb{C}$ и исчезает на ∞.

Теорема 4 [1]. *Кривая* $\Gamma = \Gamma_\theta$ *не является* AC*-устранимой для* $0 < \theta \le \pi/8$[1]*.*

Доказательство. Рассмотрим постоянную функцию $f = 1$. По теореме 3 функция $T(1)$ непрерывна, аналитична в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и $\lim\limits_{z \to \infty} T(1)(z) = 0$. Поэтому если

[1] По теореме 2 Γ не AC-устранима ни для какого $\theta \in (0, \pi/4)$, однако представленные рассуждения формально применимы только при рассмотрении случая $\theta \in (0, \pi/8]$ и не зависят от теоремы 2.

$T(1)$ аналитична в $\mathbb{C}$, она должна быть тождественно нулевой в $\mathbb{C}$. Однако это невозможно, ибо

$$\lim_{z\to\infty} z \int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = -\int\limits_{\Gamma} d\mu(\zeta) = -\mu(\Gamma) = -1. \tag{33}$$

Тем самым $T(1)$ непрерывна, аналитична вне Γ, однако не аналитична в $\mathbb{C}$. Следовательно, квазиконформная кривая Γ не АС-устранима. $\square$

Замечание 2. Теорема 4 также следует непосредственно из теоремы 7(ii).

Замечание 3. Ясно, что теорема 4 останется верной, если заменить Γ какой-либо кривой Γ_k^n, $n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le 2^n$. Функция (32) для $f = 1$ нетривиальна, непрерывна в $\mathbb{C}$ и аналитическая вне Γ_k^n. Следовательно, ни одна из Γ_k^n не АС-устранима. Итак, никакая порция Γ не АС-устранима.

Следствие 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ семейство функций $\{F_{nk},\ 1 \le k \le 2^n\}$, определенное следующим образом:*

$$F_{nk}(z) = \int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{34}$$

линейно независимо.

Следствие очевидно ввиду замечания 3.

4. АС-устранимость и псевдоаналитическое продолжение

Для описания еще одного интересного свойства Γ сформулируем важный результат, восходящий к Мори [6].

Теорема 5 [6, теорема 11]. *Пусть односвязная область $G \subset \mathbb{C}$ разделена на две области G_1, G_2 спрямляемой жордановой дугой L, соединяющей две граничные точки G. Пусть $F : G \to \mathbb{C}$ непрерывная в G и псевдоаналитическая в каждой из областей G_1, G_2.*

Если

$$\operatorname{Int} F(L) = \varnothing, \tag{$*$}$$

то F псевдоаналитическая в G.

Более того, Мори в сноске заметил: «Мне неизвестно, может ли условие $(*)$ быть убрано».

Используя теорему 4, покажем, что условие $(*)$ не может быть убрано без нарушения теоремы 5.

Для этого вновь рассмотрим кривую Γ. Так как Γ квазиконформна, существуют область $G \subset \mathbb{C}$ и квазиконформное отображение $q : G \to \mathbb{C}$ такие, что $q(I) = \Gamma$, где $I \subset G$ — замкнутый промежуток. Не уменьшая общности, можно считать, что $I = [0, 1]$. Отображение $F = T(1) \circ q$, очевидно, непрерывно в G и псевдоаналитическое в $G \setminus [0, 1]$. Покажем, что F не псевдоаналитическая в G. Предположим противное. Тогда существуют локально квазиконформное отображение $q_1 : G \to \mathbb{C}$ и аналитическая функция $F_1 : q_1(G) \to \mathbb{C}$ такие, что

$$T(1) \circ q = F_1 \circ q_1.$$

Используя элементарные свойства квазиконформных отображений, из последнего равенства легко получить, что $q_1 \circ q^{-1}$ аналитическая в $q(G)$. Поэтому

$T(1)|_{q(G)} = F_1 \circ q_1 \circ q^{-1} : q(G) \to \mathbb{C}$ аналитическая, что невозможно ввиду теоремы 4. Тем самым F не может быть распространена до отображения, псевдоаналитического в G.

Итак, условие $(*)$ существенно.

Теорема 6. *Функция $F \in \mathrm{AC}(\Gamma)$ аналитическая в $\mathbb{C}$ (и поэтому $F = 0$) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Int} F(\Gamma) = \varnothing$.*

Доказательство. Условие, очевидно, необходимо. Достаточность может быть доказана следующим образом.

Пусть $F \in \mathrm{AC}(\Gamma)$ и $\operatorname{Int} F(\Gamma) = \varnothing$. Рассмотрим такое же квазиконформное отображение $q : G \to \mathbb{C}$, $q([0,1]) = \Gamma$, что и выше. Фиксируем $t_0 \in (0,1)$ и открытый круг $D = D(t_0, r) \subset G$, $r < \min(t_0, 1 - t_0)$. Функция $F \circ q|_D$ непрерывна в D и псевдоаналитическая в каждом из двух открытых полукругов D^-, D^+, получаемых из D удалением горизонтального диаметра. Так как $\operatorname{Int} F(\Gamma) = \varnothing$, по теореме 5 имеем, что $F \circ q|_D$ псевдоаналитическая в D. Поэтому существуют локально квазиконформное отображение $q_1 : D \to \mathbb{C}$ и аналитическая функция $F_1 : q_1(D) \to \mathbb{C}$ такие, что $F \circ q|_D = F_1 \circ q_1$. Следовательно, $q_1 \circ q|_D^{-1}$ аналитическая в $q(D)$. Тем самым $F|_{q(D)} = F_1 \circ q_1 \circ q|_D^{-1} : q(D) \to \mathbb{C}$ аналитическая. Так как эти рассуждения верны для каждого $t_0 \in (0,1)$, получаем, что F аналитическая в каждой точке из $\Gamma \setminus \{0,1\}$. Наконец, поскольку F аналитическая в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и непрерывна в $\mathbb{C}$, заключаем, что F аналитическая в $\mathbb{C}$. $\square$

Следствие 4. *Для любой $f \in L^\infty(\Gamma)$ если $f \neq 0$, то $\operatorname{Int} T(f)(\Gamma) \neq \varnothing$.*

5. Линейный оператор $T_\theta : L^\infty(\Gamma) \to \mathrm{AC}(\Gamma)$

Обозначим через $\mathrm{AC}(\Gamma)$ пространство функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, непрерывных в $\mathbb{C}$, аналитических в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ и исчезающих на ∞. Легко видеть, что $\mathrm{AC}(\Gamma)$, снабженное равномерной нормой $\|f\| = \sup\limits_{\mathbb{C}} |f|$, является банаховой алгеброй.

По теореме 3 отображение $T_\theta : L^\infty(\Gamma) \to \mathrm{AC}(\Gamma)$, определенное равенством (30), представляет собой корректно определенный линейный оператор в $\mathbb{C}$, и согласно теореме 4 пространство $\mathrm{AC}(\Gamma)$ нетривиально.

В этом разделе изучим свойства оператора $T = T_\theta$, а также свойства функций $T(f)$ для $f \in L^\infty(\Gamma)$. Напомним, что для простоты вычислений мы рассматриваем случай $\theta \in (0, \pi/8]$.

Теорема 7. (i) *Норма оператора $T = T_\theta$ допускает оценку*

$$\|T\| \leq \frac{4\cos\theta}{(1-\cos\theta)^2}. \tag{35}$$

(ii) $\ker T = \{0\}$, *так что T инъективен.*

(iii) *T компактен.*

Доказательство. Утверждение (i) вытекает непосредственно из леммы 6 (см. (29)).

(ii) Пусть $T(f) = 0$. Рассмотрим разложение Лорана функции $T(f)$ в окрестности ∞. Для любого z, $|z| > 2$, имеем

$$T(f)(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-1-n} \int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\zeta^n \, d\mu(\zeta) = 0, \tag{36}$$

откуда для любого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$
$$\int_{\Gamma} f(\zeta)\zeta^n \, d\mu(\zeta) = 0.$$
Поэтому для любого полинома P будет
$$\int_{\Gamma} f(\zeta)P(\zeta) \, d\mu(\zeta) = 0. \tag{37}$$
Зададим $\varepsilon > 0$ и положим $A = \{z \in \Gamma : |f(z)| > \|f\|_\infty\}$. По теореме Лузина о C-свойстве существует множество $G \subset \Gamma$, открытое в Γ, такое, что $\mu G < \varepsilon$ и ограничение $f|_{\Gamma \setminus G}$ непрерывно. Так как $\mu A = 0$, можно считать, что $A \subset G$. По теореме Титце о продолжении найдутся непрерывные функции $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ и $v : \Gamma \to \mathbb{R}$ такие, что
$$u|_{\Gamma \setminus G} = \operatorname{Re} f|_{\Gamma \setminus G}, \quad v|_{\Gamma \setminus G} = -\operatorname{Im} f|_{\Gamma \setminus G}; \tag{38}$$
$$\|u\| \le \sup |f|_{\Gamma \setminus G}|, \quad \|v\| \le \sup |f|_{\Gamma \setminus G}|, \tag{39}$$
где $\|u\|$, $\|v\|$ — равномерные нормы u, v на Γ. Поскольку $A \subset G$, правая часть в (39) допускает оценку
$$\sup |f|_{\Gamma \setminus G}| \le \|f\|_\infty. \tag{40}$$
Далее нам потребуется следующая теорема Мергеляна (см., например, [8]).

Теорема 8. *Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компактное множество с пустой внутренностью такое, что $\mathbb{C} \setminus K$ связно. Тогда каждая непрерывная функция $F : K \to \mathbb{C}$ может быть равномерно аппроксимирована многочленами.*

Из (37) и теоремы Мергеляна, примененной к $K = \Gamma$, выводим, что для любой непрерывной функции $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ будет
$$\int_{\Gamma} fg \, d\mu = 0. \tag{41}$$
Положим $g = u + iv$. Согласно (39), (40) имеем
$$\|g\| \le \|u\| + \|v\| \le 2\|f\|_\infty. \tag{42}$$
Так как $g|_{\Gamma \setminus G} = \bar{f}|_{\Gamma \setminus G}$, можем записать
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |f|^2 \, d\mu = \int_{\Gamma \setminus G} |f|^2 \, d\mu + \int_{G} |f|^2 \, d\mu = \int_{\Gamma \setminus G} fg \, d\mu + \int_{G} |f|^2 \, d\mu \\ = \int_{\Gamma} fg \, d\mu - \int_{G} fg \, d\mu + \int_{G} |f|^2 \, d\mu. \end{aligned} \tag{43}$$
Поэтому в силу (41) получим
$$\int_{\Gamma} |f|^2 \, d\mu = -\int_{G} fg \, d\mu + \int_{G} |f|^2 \, d\mu, \tag{44}$$
откуда ввиду (39), (40), (42) и неравенства $\mu G < \varepsilon$
$$\int_{\Gamma} |f|^2 \, d\mu \le 3\varepsilon \|f\|_\infty^2.$$

Поскольку ε может быть выбрано произвольным, имеем

$$\int\limits_{\Gamma} |f|^2\,d\mu = 0,$$

значит, $f = 0$, что доказывает (ii).

(iii) Покажем, что оператор $T = T_\theta$ компактен. Для этого сначала оценим $|T(f)(z_1) - T(f)(z_2)|$, где $f \in L^\infty(\Gamma)$ и $z_1, z_2 \in \Gamma$. Мы увидим, что наша оценка, по существу, будет зависеть только от $n \in \mathbb{N}$, $\|f\|_\infty$ и $|z_1 - z_2|$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Пусть $\varphi : [0,1] \to \Gamma$ — натуральная параметризация кривой Γ (см. разд. 2). Фиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n > 10$, такое, что (см. (27))

$$\frac{4\cos^{n+1}\theta}{(1-\cos\theta)^2} < \frac{\varepsilon}{10}. \tag{45}$$

Будем использовать обозначение $I_k^n = [(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$ из начала разд. 2. Положим $\widetilde{I}_1^n = [0, 3\cdot 2^{-n-1})$, $\widetilde{I}_k^n = ((2k-3)2^{-n-1}, (2k+1)2^{-n-1})$ для $1 < k < 2^n$, $\widetilde{I}_{2^n}^n = (1 - 3\cdot 2^{-n-1}, 1]$. Отметим, что длина каждого из промежутков $\widetilde{I}_1^n$, $\widetilde{I}_{2^n}^n$ в полтора раза больше длины промежутков I_1^n и $I_{2^n}^n$ соответственно, тогда как $\widetilde{I}_k^n$, $1 < k < 2^n$, концентричен I_k^n и его длина вдвое больше, чем длина I_k^n. Эти промежутки открыты в $[0,1]$, значит, их образы при отображении φ будут открытыми в метрическом пространстве Γ. Следовательно, семейство $\{\varphi(\widetilde{I}_k^n) : 1 \le k \le 2^n\}$ образует открытое покрытие Γ. Пусть $q(n)$ — число Лебега этого покрытия. Это означает, что

$$\forall E \subset \Gamma,\ \operatorname{diam} E < q(n),\ \exists \widetilde{I}_k^n \quad E \subset \varphi(\widetilde{I}_k^n). \tag{46}$$

Так как φ — гомеоморфизм, каждое из расстояний

$$d(n,1) = \operatorname{dist}\bigl(\varphi(\widetilde{I}_1^n), \varphi([0,1] \setminus (I_1^n \cup I_2^n))\bigr); \tag{47}$$

$$d(n,k) = \operatorname{dist}\bigl(\varphi(\widetilde{I}_k^n), \varphi([0,1] \setminus (I_{k-1}^n \cup I_k^n \cup I_{k+1}^n))\bigr) \quad \text{для} \ \ 1 < k < 2^n; \tag{48}$$

$$d(n,2^n) = \operatorname{dist}\bigl(\varphi(\widetilde{I}_{2^n}^n), \varphi([0,1] \setminus (I_{2^n-1}^n \cup I_{2^n}^n))\bigr) \tag{49}$$

положительно. Поэтому

$$d(n) = \min_{1 \le k \le 2^n} d(n,k) > 0. \tag{50}$$

Фиксируем пару точек $z_1, z_2 \in \Gamma$ таких, что $|z_1 - z_2| < q(n)$. Согласно (46) найдется $\widetilde{I}_k^n$ такой, что $z_1, z_2 \in \varphi(\widetilde{I}_k^n)$.

Рассмотрим три случая.

(a) Предположим, что $1 < k < 2^n$. Тогда $z_1, z_2 \in \varphi(\widetilde{I}_k^n) \subset \varphi(I_{k-1}^n \cup I_k^n \cup I_{k+1}^n)$ и, имея в виду, что $\Gamma_k^n = \varphi(I_k^n)$, можем записать

$$T(f)(z_2) - T(f)(z_1) = \int\limits_{\Gamma_{k-1}^n \cup \Gamma_k^n \cup \Gamma_{k+1}^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta - z_2}$$

$$- \int\limits_{\Gamma_{k-1}^n \cup \Gamma_k^n \cup \Gamma_{k+1}^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta - z_1} + (z_2 - z_1) \int\limits_{\Gamma \setminus (\Gamma_{k-1}^n \cup \Gamma_k^n \cup \Gamma_{k+1}^n)} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)}. \tag{51}$$

Отсюда ввиду (45) и (28) абсолютное значение каждого из первых двух интегралов в (51) не превосходит $\frac{3\varepsilon\|f\|_\infty}{10}$.

Поскольку $z_1, z_2 \in \varphi\big(\widetilde{I}_k^n\big)$, из (48), (50) получаем, что

$$\forall \zeta \in \Gamma \setminus \big(\Gamma_{k-1}^n \cup \Gamma_k^n \cup \Gamma_{k+1}^n\big) \quad |\zeta - z_1| \geq d(n), \ |\zeta - z_2| \geq d(n).$$

Это приводит нас к оценке абсолютного значения последнего интеграла в (51):

$$\left| \int\limits_{\Gamma \setminus (\Gamma_{k-1}^n \cup \Gamma_k^n \cup \Gamma_{k+1}^n)} \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)} \right|$$

$$\leq \|f\|_\infty \int\limits_{\Gamma \setminus (\Gamma_{k-1}^n \cup \Gamma_k^n \cup \Gamma_{k+1}^n)} \frac{d\mu(\zeta)}{d^2(n)} \leq \|f\|_\infty d^{-2}(n) \int\limits_\Gamma d\mu = \|f\|_\infty d^{-2}(n). \quad (52)$$

Итак, для любых $z_1, z_2 \in \varphi\big(\widetilde{\Gamma}_k^n\big)$, $1 < k < 2^n$, таких, что $|z_1 - z_2| < q(n)$, получаем

$$|T(f)(z_2) - T(f)(z_1)| \leq (3\varepsilon/5 + |z_2 - z_1| d^{-2}(n)) \|f\|_\infty. \quad (53)$$

(b) Остались случаи $k = 1$ и $k = 2^n$. Мы рассмотрим один из них, второй ему аналогичен. Пусть $k = 1$. Рассуждая, как в п. (a), отметим только отличия технического характера.

Пусть $z_1, z_2 \in \varphi\big(\widetilde{I}_1^n\big)$. Тогда $z_1, z_2 \in \Gamma_1^n \cup \Gamma_2^n$ и вместо (51) мы получаем более простое выражение

$$T(f)(z_2) - T(f)(z_1) = \int\limits_{\Gamma_1^n \cup \Gamma_2^n} \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z_2}$$

$$- \int\limits_{\Gamma_1^n \cup \Gamma_2^n} \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{\zeta - z_1} + (z_2 - z_1) \int\limits_{\Gamma \setminus (\Gamma_1^n \cup \Gamma_2^n)} \frac{f(\zeta)\, d\mu(\zeta)}{(\zeta - z_2)(\zeta - z_1)}. \quad (54)$$

Соображения, аналогичные использованным при получении (51), с учетом (47) приводят к тому, что для $z_1, z_2 \in \varphi\big(\widetilde{I}_1^n\big)$, $|z_1 - z_2| < q(n)$, будет

$$|T(f)(z_2) - T(f)(z_1)| \leq (2\varepsilon/5 + |z_2 - z_1| d^{-2}(n)) \|f\|_\infty. \quad (55)$$

Такая же оценка может быть получена с использованием (49) при $k = 2^n$. Сравнивая (53), (55), заключаем, что оценка (53) имеется во всех случаях, т. е. справедлива для $1 \leq k \leq 2^n$.

Из приведенных рассуждений легко следует, что число n, а значит, и числа $q(n)$, $d(n)$ зависят только от ε и не зависят от выбора $z_1, z_2 \in \Gamma$. Тем самым можно записать, что $n = n_\varepsilon$.

Завершим теперь доказательство компактности T.

Пусть $\{f_m\}$ — ограниченная последовательность из $L^\infty(\Gamma)$, т. е. $\sup\limits_m \|f_m\|_\infty = M < \infty$. Тогда $\{T(f_m)\}$ — ограниченная последовательность в $\mathrm{AC}(\Gamma)$, ибо $\sup\limits_m \|T(f_m)\| \leq M\|T\|$. Следовательно, последовательность $\{T(f_m)|_\Gamma\}$ также ограничена.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Согласно (53) существует натуральное $n = n_\varepsilon$ такое, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $z_1,\ z_2 \in \Gamma$ таких, что $|z_1 - z_2| < q(n_\varepsilon)$, имеем

$$|T(f_m)(z_2) - T(f_m)(z_1)| \leq M(3\varepsilon/5 + |z_2 - z_1| d^{-2}(n_\varepsilon)). \quad (56)$$

Это позволяет показать, что последовательность $\{T(f_m)|_\Gamma\}$ равностепенно непрерывна. Действительно, ясно, что если мы возьмем $\delta_\varepsilon = \min\{2\varepsilon d^2(n_\varepsilon)/5,\ q(n_\varepsilon)\}$, то по (56) получим

$$\forall m \in \mathbb{N}\ \forall z_1, z_2 \in \Gamma \quad |z_1 - z_2| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |T(f_m)(z_2) - T(f_m)(z_1)| < \varepsilon M, \quad (57)$$

что и означает равностепенную непрерывность последовательности $\{T(f_m)|_\Gamma\}$.

По теореме Арцела — Асколи существует равномерно сходящаяся подпоследовательность $\{T(f_{m_s})|_\Gamma\}$. Так как $T(f_{m_s}) \in \mathrm{AC}(\Gamma)$, ввиду принципа максимума для аналитических функций очевидно, что для любых $s, p \in \mathbb{N}$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} |T(f_{m_{s+p}})(z) - T(f_{m_s})(z)| = \|T(f_{m_{s+p}})|_\Gamma - T(f_{m_s})|_\Gamma\|.$$

Следовательно, $\{T(f_{m_s})\}$ — последовательность Коши, сходимость которой обеспечивается банаховостью пространства $\mathrm{AC}(\Gamma)$.

Утверждение (iii) доказано, так что оператор T компактен. $\square$

Заметим, что все утверждения теоремы 7 остаются справедливыми (с соответствующими изменениями в обозначениях) при замене Γ какой-либо кривой Γ_k^n, т. е. при замене T каким-либо оператором $T_{nk} : L^\infty(\Gamma_k^n) \to \mathrm{AC}(\Gamma_k^n) \subset \mathrm{AC}(\Gamma)$, определенным равенством

$$T_{nk}(f)(z) = \int\limits_{\Gamma_k^n} \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Сравним образ $\mathrm{R}(T) = T(L^\infty(\Gamma))$ с $\mathrm{AC}(\Gamma)$.

Теорема 9. *Множество* $\mathrm{AC}(\Gamma) \setminus T(L^\infty(\Gamma))$ *непусто. Другими словами, существует* $F \in \mathrm{AC}(\Gamma)$, *не представимое в виде интеграла типа Коши* (10).

Доказательство. По теореме 7(ii) $T : L^\infty(\Gamma) \to \mathrm{AC}(\Gamma)$ инъективно. Если T сюръективно, то по теореме Банаха об обратном операторе T^{-1} ограничен; противоречие, так как T компактен и $\mathrm{AC}(\Gamma)$ бесконечномерно (см., например, следствие 3). $\square$

Замечание 4. Почти так же можно доказать, что $\mathrm{AC}(\Gamma) \setminus T(\mathrm{AC}(\Gamma)) \neq \varnothing$, где $T(\mathrm{AC}(\Gamma))$ — образ при отображении T множества функций из $\mathrm{AC}(\Gamma)$, ограниченных на Γ.

6. Функциональное уравнение для T

Покажем, что оператор $T = T_\theta : L^\infty(\Gamma) \to \mathrm{AC}(\Gamma)$, определенный равенством (30), обладает следующим свойством.

Теорема 10. *Для любых* $f, g \in L^\infty(\Gamma)$ *и* $w \in \mathbb{C}$ *имеет место равенство*

$$T(f)(w)T(g)(w) = T(gT(f))(w) + T(fT(g))(w). \tag{58}$$

Доказательство. Пусть фиксированы $f, g \in L^\infty(\Gamma)$. По теореме 3 интеграл

$$T(gT(f))(w) = \int\limits_\Gamma \frac{g(z)T(f)(z)\,d\mu(z)}{z - w} = \int\limits_\Gamma \frac{g(z)}{z - w}\left(\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta - z}\right) d\mu(z) \tag{59}$$

существует для каждого $w \in \mathbb{C}$. Наша задача — поменять местами f и g в повторном интеграле. Для этого предположим сначала, что фиксировано $w \notin \Gamma$.

Тогда $\delta(w,\Gamma)=\inf\limits_{z\in\Gamma}|z-w|>0$ и, применяя (29), получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Gamma}|f(\zeta)|\left(\int\limits_{\Gamma}\frac{|g(z)|\,d\mu(z)}{|z-w||\zeta-z|}\right)d\mu(\zeta)\\
&\qquad\le\frac{1}{\delta(w,\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}|f(\zeta)|\left(\int\limits_{\Gamma}\frac{|g(z)|\,d\mu(z)}{|\zeta-z|}\right)d\mu(\zeta)\\
&\qquad\qquad\le\frac{4\|g\|_\infty\cos\theta}{\delta(w,\Gamma)(1-\cos\theta)^2}\int\limits_{\Gamma}|f(\zeta)|\,d\mu(\zeta)<\infty.
\end{aligned}$$

Поэтому по теореме Фубини мы можем (59) переписать для каждого $w\notin\Gamma$ так:

$$\begin{aligned}
T(gT(f))(w)&=\int\limits_{\Gamma}\frac{g(z)}{z-w}\left(\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta-z}\right)d\mu(z)\\
&=\int\limits_{\Gamma}f(\zeta)\left(\int\limits_{\Gamma}\frac{g(z)\,d\mu(z)}{(\zeta-z)(z-w)}\right)d\mu(\zeta)\\
&=-\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-w}\left(\int\limits_{\Gamma}g(z)\left(\frac{1}{z-\zeta}-\frac{1}{z-w}\right)d\mu(z)\right)d\mu(\zeta)\\
&=-\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)T(g)(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta-w}+T(g)(w)\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)\,d\mu(\zeta)}{\zeta-w}\\
&=-T(fT(g))(w)+T(g)(w)T(f)(w).
\end{aligned}$$

Тем самым (58) имеет место для любого $w\notin\Gamma$. С другой стороны, по теореме 3 каждый член в (58) непрерывен в $\mathbb{C}$. Поэтому (58) справедливо для всех $w\in\mathbb{C}$. $\square$

Мы получили, что линейный оператор $T: L^\infty(\Gamma)\to \mathrm{AC}(\Gamma)$ удовлетворяет функциональному уравнению $T(f)T(g)=T(gT(f))+T(fT(g))$ или, короче,

$$TfTg=T(gTf)+T(fTg). \tag{60}$$

Любопытен следующий пример. Обозначим через T^n n-ю итерацию T. Тогда из (60) по индукции легко получить, что для любого $n\in\mathbb{N}$

$$(T^n)(1)=\frac{(T(1))^n}{n!}.$$

Наконец, сформулируем несколько открытых вопросов.

P1. *Охарактеризовать образ оператора T.*

P2. *Описать алгебры A, допускающие линейные операторы $F: A\to A$, удовлетворяющие функциональному уравнению* (60), *т. е.*

$$\forall x,y\in A\quad FxFy=F(xFy)+F(yFx).$$

P3. *Описать меры на Γ, для которых имеют место аналоги теорем* 3, 4, 7.

P4. *Описать спектр оператора T.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пономарев С. П.* К вопросу об AC-устранимости квазиконформных кривых // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, № 3. С. 566–568.
2. *Пономарев С. П.* О хаусдорфовой размерности квазиконформных кривых // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 4. С. 142–148.
3. *Пономарев С. П.* AC-устранимость, хаусдорфова размерность и N-свойство // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 6. С. 1325–1334.
4. *Rickman S.* Characterization of quasi-conformal arcs // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1966. V. 395. P. 7–30.
5. *Ahlfors L. V.* Lectures on quasiconformal mappings. Princeton NJ: Van Nostrand, 1966.
6. *Mori A.* On quasi-conformality and pseudo-analyticity // Trans. Amer. Math. Soc. 1957. V. 84, N 1, 2. P. 56–77.
7. *Долженко Е. П.* О стирании особенностей аналитических функций // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 4. С. 135–141.
8. *Rudin W.* Real and complex analysis. New York; London: Mc Graw-Hill, 1966.

Статья поступила 1 августа 2006 г.

Пономарев Станислав Петрович (Stanislav Ponomarev)
Pomeranian Academy in Słupsk, Institute of Mathematics,
Arciszewskiego 22 b, 76-200 Słupsk, Poland
stapon@pap.edu.pl