Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 512.816.7+512.816.1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

И. В. Широков

Аннотация. Показано, что инвариантные операторы на однородном пространстве порождают дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования. Предложенный в работе бескоординатный метод позволяет значительно упростить вычисления, а именно свести расчеты к операциям линейной алгебры. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: группа Ли, однородное пространство, дифференциальный инвариант, инвариантный оператор.

Введение

В групповом анализе дифференциальных уравнений центральным объектом является группа точечных преобразований, действующая в пространстве независимых $(x) \in X$ и зависимых $(u) \in U$ переменных. Действие этой группы преобразований естественным образом продолжается на расширенное пространство, содержащее производные

$$\underset{1}{u} = \{u_1, \dots, u_m\} \in \underset{1}{U}, \quad \underset{2}{u} = \{u_{11}, u_{12}, \dots, u_{mm}\} \in \underset{2}{U}, \dots$$

(используется стандартные обозначения $u_i = \partial u/\partial x^i$, $u_{ij} = \partial^2 u/\partial x^i \partial x^j, \dots$). Инварианты группы преобразований, действующей в расширенном пространстве $X \times U \times \underset{1}{U} \times \dots$, называются *дифференциальными инвариантами*. Линейный дифференциальный оператор, действие которого на произвольный дифференциальный инвариант снова дает дифференциальный инвариант, называется *оператором инвариантного дифференцирования*. Дифференциальные инварианты начал изучать Тресс [1], и законченный вид теория дифференциальных инвариантов и инвариантного дифференцирования приобрела в работах Л. В. Овсянникова [2]. Далее было получено много важных и интересных результатов, касающихся конкретных моделей (см., например, [3]).

Пусть группа G действует в пространстве $X \times U$ и $\{J_\mu(x,u)\}$ — базис инвариантов этой группы. Тогда поверхность уровня инвариантов $M = \{(x,u) \in X \times U \mid J(x,u) = J(x_0,u_0)\}$ представляет собой однородное пространство (по крайней мере локально) $M = G/H$, где H — подгруппа изотропии отмеченной

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–07–89051).

точки (x_0, u_0). В настоящей работе мы рассматриваем частный случай, когда выполняется условие

$$\operatorname{rank} \frac{\partial J_\mu(x,u)}{\partial u^\nu} = \dim U.$$

Это означает, что все зависимые переменные $v_\mu = J_\mu(x,u)$ являются инвариантами и группа преобразований после исключения инвариантных независимых переменных транзитивно действует в пространстве M неинвариантных независимых переменных. Для простоты изложения мы предполагаем наличие лишь одной зависимой переменной, так как обобщение на случай нескольких зависимых инвариантных переменных тривиально.

Таким образом, мы будем рассматривать случай, когда существует одна зависимая инвариантная переменная u и группа преобразований транзитивно и эффективно действует в пространстве M независимых переменных (x). Мы исследуем частный случай группы точечных симметрий, не меняющих зависимые переменные u, хотя класс уравнений с группой симметрии, являющейся группой преобразований однородного пространства, достаточно широк. В частности, к этому классу относятся все нелинейные дифференциальные уравнения квантовой теории поля в римановых пространствах с транзитивной группой движения, например, уравнения вида

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^a} \sqrt{g} g^{ab} \frac{\partial}{\partial x^b}\; u = F(u), \quad g \equiv |\det g_{ab}|, \tag{1}$$

где группа G является транзитивной группой движения риманова пространства с метрическим тензором $g_{ab}(x)$.

В § 1 рассматривается случай, когда размерность группы преобразований совпадает с размерностью пространства независимых переменных: $\dim G = \dim M$. В этом случае локально можно отождествить группу Ли G и однородное пространство M. Генераторы действия группы образуют алгебру Ли левоинвариантных векторных полей (мы для определенности считаем, что действие группы правое). Там же доказывается теорема, утверждающая, что все операторы инвариантного дифференцирования образуют алгебру правоинвариантных векторных полей и все дифференциальные инварианты порождаются одним инвариантом u, т. е. задача нахождения дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования в этом случае решается тривиально.

Во § 2 устанавливается связь между дифференциальными инвариантами (изучаемыми в теории группового анализа дифференциальных уравнений [2]) и инвариантными линейными операторами на однородных пространствах (изучаемыми в геометрии однородных пространств [4]). Доказана теорема, утверждающая, что каждый инвариантный дифференциальный оператор порождает серию операторов инвариантного дифференцирования. Следует отметить, что в отличие от классических работ [1, 2] наряду с операторами инвариантного дифференцирования первого порядка мы рассматриваем также и операторы высших порядков.

В § 3 приводится алгоритм получения в бескоординатной форме дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования. Отметим два момента, почему, на наш взгляд, этот алгоритм полезен. Во-первых, в классическом подходе для получения дифференциальных инвариантов приходится решать $\dim G$ дифференциальных уравнений. В предлагаемом подходе необходимо решить $\dim H = \dim G - \dim M$ уравнений (случай $\dim G = \dim M$

в бескоординатном подходе тривиален). Во-вторых, генераторы группы преобразований в координатах могут иметь сложный вид, что осложняет решение дифференциальных уравнений. В бескоординатном подходе все встречающиеся уравнения являются дифференциальными уравнениями первого порядка, у которых коэффициенты при производных — однородные линейные функции. Такие уравнения решаются путем приведения матриц к жордановой нормальной форме [5], т. е. методами линейной алгебры. Получив ответ в бескоординатной форме, мы легко можем его привести в исходных координатах.

§ 1. Дифференциальные инварианты на группе Ли

Пусть G — вещественная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Для произвольного элемента $X \in \mathfrak{g}$ будем обозначать через $\xi_X(g) \equiv L_g^* X$, $\eta_X(g) \equiv R_g^* X$ — лево- и правоинвариантные векторные поля (генераторы правых и левых сдвигов соответственно) в направлении $X \in T_e G = \mathfrak{g}$; если $\{e_i\}$ — базис алгебры $\mathfrak{g}$, то ξ_i, η_i — лево- и правоинвариантные векторные поля в направлении базисного вектора e_i:

$$\xi_i = \xi_i^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a},\ \xi_i^a(x) = \frac{\partial \varphi^a(x,y)}{\partial y^i}\bigg|_{y=0}; \quad \eta_i = \eta_i^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a},\ \eta_i^a(x) = \frac{\partial \varphi^a(y,x)}{\partial y^i}\bigg|_{y=0};$$

$$[\xi_i, \xi_j] = C_{ij}^k \xi_k, \quad [\eta_i, \eta_j] = -C_{ij}^k \eta_k, \quad [\xi_i, \eta_j] = 0.$$

Здесь x — локальные координаты на группе G, $x \circ y = \varphi(x, y)$ — функция композиции.

Пусть левоинвариантные векторные поля ξ_i являются генераторами группы симметрии G некоторого уравнения на многообразии G. Рассмотрим бесконечное продолжение векторного поля ξ:

$$\underset{\infty}{\xi} = \xi + \theta_i(x, u, \underset{1}{u})\frac{\partial}{\partial u_i} + \theta_{ij}(x, u, \underset{1}{u}, \underset{2}{u})\frac{\partial}{\partial u_{ij}} + \dots.$$

Величины $\theta_i, \theta_{ij}, \dots$ определяют закон преобразования соответствующих переменных $u_i, u_{ij}, \dots$ и могут быть найдены из условия равенства нулю производной Ли форм $(du - u_i dx^i), (du_i - u_{ij} dx^j), \dots$ вдоль векторного поля ξ (в общем случае на интегральной поверхности распределения этих форм). Так, для первого продолжения имеем

$$\mathscr{L}_\xi (du - u_i dx^i)|_{du - u_i dx^i = 0} = 0, \quad \theta_i \equiv \mathscr{L}_\xi u_i. \tag{2}$$

В нашем случае величина u является инвариантом и формула (2) дает

$$\mathscr{L}_\xi (du - u_i dx^i) = -\mathscr{L}_\xi (u_i dx^i) = -\theta_i dx^i - u_i d\xi^i = 0 \Rightarrow \theta_i = -u_j \partial_i \xi^j.$$

Таким образом, для нашего случая мы получили известную формулу первого продолжения [2].

Модифицируем для рассматриваемого здесь случая изложенный выше алгоритм построения продолжений. По определению $\det \eta_i^j \neq 0$ в каждой точке $g \in G$. Это позволяет вместо переменных u_i ввести переменные $u_{(i)} = \eta_i u \equiv \eta_i^j u_j$, $u_i = \sigma_i^j u_{(j)}$. Здесь $\sigma_i^j = (\eta^{-1})_i^j$ — коэффициенты правоинвариантных 1-форм $\sigma^j = \sigma_i^j dx^i$. Аналогично вместо переменных $u_{ij}, \dots, u_{i_1 \dots i_k}, \dots$ введем переменные $u_{(ij)} = (\eta_i \eta_j) u, \dots, u_{(i_1 \dots i_k)} = (\eta_{i_1} \dots \eta_{i_k}) u, \dots$. (Здесь и далее запись операторов в круглых скобках $(\eta_{i_1} \dots \eta_{i_k})$ означает их симметризованное произведение.) Символом $\underset{(1)}{u}$ будем обозначать множество величин $\{u_{(i)}\}$, аналогично

$\underset{(2)}{u} = \{u_{(ij)}\}$ и т. д. Обозначим символом $\underset{(s)}{\xi}$ s-е продолжение оператора ξ, которое действует в пространстве переменных $(x, u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(s)}{u})$. Для коммутативной группы $\xi_i = \eta_i = \partial/\partial x^i$, $u_{(i)} = u_i$ и т. д.

Теорема 1. *Пусть G — группа симметрии дифференциального уравнения на многообразии G, не преобразующая зависимую переменную u, ξ — генераторы этой группы, которые без ограничения общности можно считать левоинвариантными векторными полями. Тогда для любого натурального числа s справедливы утверждения:*

1) *базис алгебры $\mathfrak{g}$, реализованной правоинвариантными векторными полями $\{\eta_i\}$, образует полный набор операторов инвариантного дифференцирования;*

2) *все дифференциальные инварианты порождаются одним инвариантом u и множество $\{u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(s)}{u}\}$ является базисом дифференциальных инвариантов s-го порядка;*

3) *s-е продолжение тривиально: $\underset{(s)}{\xi} = \xi$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор первого продолжения:

$$\underset{(1)}{\xi} = \xi + \theta_{(i)}(x, u, \underset{(1)}{u})\frac{\partial}{\partial u_{(i)}}, \quad \mathscr{L}_\xi u_{(i)} \equiv \theta_{(i)}.$$

Вычислим величины $\theta_{(i)}$:

$$\mathscr{L}_\xi(du - u_i dx^i) = \mathscr{L}_\xi(du - u_{(i)}\sigma^i) = -\mathscr{L}_\xi(u_{(i)}\sigma^i) = -\theta_{(i)}\sigma^i - u_{(i)}\mathscr{L}_\xi(\sigma^i) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что производная Ли $\mathscr{L}_\xi(\sigma^i)$ вдоль левоинвариантного векторного поля ξ правоинвариантной формы σ^i равна нулю (это есть следствие коммутативности лево- и правоинвариантных полей). Учитывая, что формы σ^i в каждой точке $g \in G$ образуют базис кокасательного пространства $T^*_g G$, получим $\theta_{(i)} = 0$. Отсюда следует, что $\underset{(1)}{\xi} = \xi$ и множество $\{u, \underset{(1)}{u}\}$ является базисом дифференциальных инвариантов первого порядка.

Напомним некоторые положения теории Овсянникова [2]. Для генераторов группы точечных симметрий общего вида ζ_μ и их s-х продолжений ($s \geq 1$)

$$\underset{s}{\zeta_\mu} = \zeta^a_\mu \frac{\partial}{\partial x^a} + \zeta^A_\mu \frac{\partial}{\partial u^A} + \theta^A_{\mu i}\frac{\partial}{\partial u^A_i} + \dots + \theta^A_{\mu i_1 \dots i_s}\frac{\partial}{\partial u^A_{i_1 \dots i_s}}$$

вводятся натуральные числа r_s и κ:

$$r_s = \operatorname{rank}\bigl(\zeta^a_\mu, \zeta^A_{\mu i}, \theta^A_{\mu i}, \dots, \theta^A_{\mu i_1 \dots i_s}\bigr) \leq n = \dim G; \quad \kappa = \{\min s \in \mathbb{N} \mid r_s = \dim G\}. \tag{3}$$

Согласно [2] полный набор операторов инвариантного дифференцирования есть множество независимых дифференциальных операторов $\delta = \delta^i D_i$ первого порядка (D_i — операторы полного дифференцирования), коммутирующих с операторами $\underset{\kappa}{\zeta_\mu}$. При этом произвольный дифференциальный инвариант порядка $s > \kappa + 1$ находится путем применения функциональных операций и операций инвариантного дифференцирования к базисным дифференциальным инвариантам порядка $\kappa + 1$ (в некоторых случаях и ниже).

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что в нашем случае $\kappa = 1$, т. е. операторы инвариантного дифференцирования составляют n-мерный набор независимых операторов первого порядка, коммутирующих с операторами $\underset{(1)}{\xi} = \xi$. Рассмотрим правоинвариантное векторное поле, у которого оператор частной производной заменен оператором полной производной: $\hat{\eta}_j = \eta_j^i D_i$. В координатах $(x, u, \underset{(1)}{u}, \dots)$ оно имеет вид

$$\hat{\eta}_j = \eta_j + u_{(j)}\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{(jj_1\dots j_k)} + \sum_{m=1}^{k} A_{j(j_1\dots j_k)}^{(i_1\dots i_m)} u_{(i_1\dots i_m)}\right)\frac{\partial}{\partial u_{(j_1\dots j_k)}},$$

$A_{j(j_1\dots j_k)}^{(i_1\dots i_m)}$ — const. Таким образом, множество векторных полей $\{\hat{\eta}_j\}$ коммутирует со всеми полями $\underset{(1)}{\xi} = \xi$ и, следовательно, является полным набором операторов инвариантного дифференцирования. П. 1 теоремы доказан.

Теперь очевидно, что величины $u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(s)}{u}$ — дифференциальные инварианты s-го порядка. То, что других дифференциальных инвариантов s-го порядка нет, легко доказывается прямым подсчетом независимых инвариантов: число инвариантов равно $\dim(G \times U \times \underset{(1)}{U} \dots \underset{(s)}{U}) - \dim G = C_{n+s}^{n}$ и числу величин $u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(s)}{u}$. П. 2 теоремы доказан.

Справедливость п. 3 теоремы с очевидностью следует из п. 2. $\square$

Пример 1. Рассмотрим уравнение вида (1), где Δ — лапласиан, порожденный правоинвариантной метрикой на группе $SO(3)$:

$$\begin{aligned}\Delta_{SO(3)} = (B\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}& \\ + \frac{1}{\cos^2\beta}(B\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha)\left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} - \sin\beta\cos\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \sin^2\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right)& \\ + \frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\beta}(B-C)\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial\gamma} + \cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\gamma} + \left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha} + \sin\beta\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\right)& \\ + (B + C + \cos 2\alpha(B-C))\frac{\sin\beta}{\cos^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial\gamma\partial\alpha} + A\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}&\end{aligned}$$

(внутренними автоморфизмами правоинвариантную метрику в единице группы можно привести к диагональному виду: $g^{ij}(e) = \mathrm{diag}(A, B, C)$). Левоинвариантные поля ξ порождают группу точечных симметрий этого уравнения и имеют вид

$$\xi_{12} = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\gamma\frac{\partial}{\partial\beta} + \operatorname{tg}\beta\cos\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma},$$
$$\xi_{13} = \frac{\sin\gamma}{\cos\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial\beta} + \sin\gamma\operatorname{tg}\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}, \quad \xi_{23} = \frac{\partial}{\partial\gamma}.$$

Нетрудно найти явный координатный вид правоинвариантных векторных полей, которые согласно теореме 1 являются операторами инвариантного дифференцирования (после замены $\partial/\partial x^i \to D_i$):

$$\eta_{12} = \frac{\partial}{\partial\alpha}, \quad \eta_{13} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\gamma}\right),$$
$$\eta_{23} = -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\gamma}\right).$$

Как утверждает теорема, базис дифференциальных инвариантов получается путем действия операторов инвариантного дифференцирования $\hat{\eta}$ на единственный инвариант u.

§ 2. Связь алгебры инвариантных операторов с дифференциальными инвариантами и операторами инвариантного дифференцирования

Пусть G — n-мерная вещественная группа Ли преобразований m-мерного однородного правого G-пространства $M = G/H$; $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ — соответствующая алгебра Ли группы G и подалгебра замкнутой подгруппы H; $x = (x^1, \dots, x^m)$ — локальные координаты на многообразии M.

Бесконечное продолжение генератора ζ группы преобразований G:

$$\underset{\infty}{\zeta} = \zeta^a \frac{\partial}{\partial x^a} + \theta_a \frac{\partial}{\partial u_a} + \dots + \theta_{a_1 \dots a_s} \frac{\partial}{\partial u_{a_1 \dots a_s}} + \dots,$$

может быть представлено в виде

$$\underset{\infty}{\zeta} = \zeta^a D_a - \zeta^{LB}, \tag{4}$$

где ζ^{LB} — каноническая форма оператора Ли — Бэклунда [6], соответствующего группе преобразований G:

$$\zeta^{LB} = (\zeta u)\frac{\partial}{\partial u} + D_a(\zeta u)\frac{\partial}{\partial u_a} + D_a D_b(\zeta u)\frac{\partial}{\partial u_{ab}} + \dots; \quad \zeta u \equiv \zeta^a u_a. \tag{5}$$

Пусть $J[u]$ — произвольный гладкий нелинейный дифференциальный оператор порядка s от функции $u = u(x)$, тогда он представляется в виде гладкой функции $J[u] = J(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{s}{u})$. Действие оператора Ли — Бэклунда (5) на $J[u]$ может быть записано в виде

$$\zeta^{LB} J[u] = (\nabla_u J[u])(\zeta u). \tag{6}$$

Здесь $\nabla_u J[u]$ — линейный дифференциальный оператор, зависящий от функции u, который называется *производной Фреше* и определяется равенством [7]

$$(\nabla_u J[u])v \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{J[u + \epsilon v] - J[u]}{\epsilon} \quad \forall v \in C^\infty(M). \tag{7}$$

Замечание 1. Для корректного определения предела в формуле (7) необходимо задать норму на функциональном пространстве (производная Фреше), либо топологию (производная Гато).

Далее символ u будет означать гладкую функцию на многообразии M и, таким образом, все операторы дифференцирования по координатам x^a суть операторы полных производных. В этом смысле запись $\zeta u = \zeta^a u_a$ не определение символа ζu, а результат действия оператора ζ на функцию u.

Лемма 1. *Всякий дифференциальный инвариант $J[u]$ группы G преобразований однородного пространства с генераторами группы ζ удовлетворяет равенству*

$$(\nabla_u J[u])(\zeta u) = \zeta J[u]. \tag{8}$$

Доказательство. Произвольный дифференциальный инвариант $J[u]$ удовлетворяет уравнению $\underset{(\infty)}{\zeta} J[u] = 0$. Используя формулу (4) и равенство (6), получим (8). $\square$

Лемма 2. *Оператор инвариантного дифференцирования $\delta[u]$ группы преобразований G однородного пространства M удовлетворяет уравнению*

$$[\zeta, \delta[u]] = (\nabla_u \delta[u])(\zeta u), \tag{9}$$

где ζ — произвольный генератор группы G.

В уравнении (9) $[A, B] \equiv AB - BA$ — коммутатор линейных операторов A, B; произвольный линейный дифференциальный оператор $\delta[u]$ имеет вид $\delta[u] = \sum_J a_J[u] D_x^J$, где J — мультииндекс, D_x — операторы дифференцирования, $a_J[u]$ — коэффициенты, зависящие от функции u. Тогда

$$(\nabla_u \delta[u])v \equiv \sum_J ((\nabla_u a_J[u])v) D_x^J$$

— линейный дифференциальный оператор.

Доказательство. По определению $\delta[u]$ для любого дифференциального инварианта $J[u]$ величина $\widetilde{J}[u] = \delta[u]J[u]$ тоже инвариант. Подставив $\widetilde{J}[u]$ в левую часть равенства (8), имеем

$$(\nabla_u \widetilde{J}[u])(\zeta u) = ((\nabla_u \delta[u])(\zeta u))J[u] + \delta[u](\nabla_u J[u])(\zeta u) = \{(\nabla_u \delta[u])(\zeta u) + \delta[u]\zeta\}J[u].$$

Правая часть равенства (8) равна $\zeta \widetilde{J}[u] = (\zeta \delta[u])J[u]$. Приравнивая правую и левую части этих выражений и учитывая произвольность $J[u]$, получаем формулу (9). $\square$

В качестве простейшего приложения леммы 2 рассмотрим случай, когда однородное пространство M совпадает с группой G. Тогда $\zeta = \xi$ — левоинвариантные поля. Нетрудно проверить, что $\delta = \eta$ удовлетворяет уравнению (9). Действительно, коэффициенты при производных в операторах η не зависят от u, поэтому правая часть равенства (9) нулевая. Левая часть этого равенства равна нулю вследствие взаимной коммутативности лево- и правоинвариантных полей: $[\xi, \eta] = 0$. Таким образом, мы еще раз доказали п. 1.

Обозначим через $\mathbf{D}(M)$ ассоциативную алгебру инвариантных дифференциальных (и псевдодифференциальных) линейных операторов на однородном пространстве M. Считаем, что однородное пространство является правым, тогда генераторы группы преобразований суть проекции левоинвариантных полей $\zeta = \pi_* \xi$. Инвариантными операторами на правом G-пространстве являются элементы обертывающей алгебры правоинвариантных векторных полей η, инвариантные относительно левого сдвига на элементы подгруппы изотропии H. Алгебра $\mathbf{D}(M)$ имеет конечное число образующих $\{\chi_\mu\}$ ($[\chi_\mu, \zeta] = 0$), которые относительно коммутатора линейных операторов образуют так называемую функциональную алгебру ($\mathscr{F}$-алгебру): $[\chi_\mu, \chi_\nu] = C_{\mu\nu}(\chi)$ (здесь $C_{\mu\nu}(\chi)$ — симметризованные функции от операторов χ). Если $C_{\mu\nu}(\chi)$ — квадратичные функции, то говорят о квадратичной алгебре, если они кубические — о кубичной алгебре и т. д. Размерность $\mathscr{F}$-алгебры, т. е. количество образующих алгебры $\mathbf{D}(M)$, можно посчитать по формуле [8]

$$\dim \mathscr{F} = \dim M - \dim \mathfrak{h}/\mathfrak{h}^\lambda, \tag{10}$$

где $\lambda \in \mathfrak{h}^\perp \equiv \{f \in \mathfrak{g}^* \mid \langle f, \mathfrak{h} \rangle = 0\}$; $\mathfrak{h}^\lambda \equiv \{X \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}_X^* \lambda = 0\}$.

Число операторов, порождающих центр алгебры $\mathbf{D}(M)$, называется *индексом* $\mathscr{F}$-алгебры и рассчитывается по формуле

$$\mathrm{ind}\, \mathscr{F} = \dim \mathfrak{g}^\lambda / \mathfrak{h}^\lambda; \quad \lambda \in \mathfrak{h}^\perp; \quad \mathfrak{g}^\lambda \equiv \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_X^* \lambda = 0\}.$$

Если $\dim \mathscr{F} = \operatorname{ind} \mathscr{F}$, то пространство M называется *коммутативным* (например, симметрические или слабосимметрические пространства [4]).

В следующем параграфе мы покажем, что алгоритм нахождения алгебры $\mathbf{D}(M)$ совпадает с алгоритмом построения дифференциальных инвариантов первого порядка. Сейчас сформулируем и докажем теорему, устанавливающую связь между инвариантными операторами и операторами инвариантного дифференцирования.

Теорема 2. *Пусть $\chi \in \mathbf{D}(M)$ — инвариантный дифференциальный оператор порядка s, $\{J_1[u], \dots, J_s[u]\}$ — произвольный набор дифференциальных инвариантов. Тогда $\delta^{(0)} = \chi$, $\delta^{(k)}[u] = [\delta^{(k-1)}[u], J_k[u]]$ $(k = 1, \dots, s)$ — оператор инвариантного дифференцирования порядка $s - k$ и $\delta^{(s)}[u]$ — дифференциальный инвариант.*

Доказательство. По определению $[\zeta, \chi] = 0$ и χ не зависит от u, откуда $\delta^{(0)} = \chi$ удовлетворяет уравнению (9), т. е. $\delta^{(0)}$ — оператор инвариантного дифференцирования порядка s. Далее проводим доказательство по индукции. Пусть для некоторого натурального числа $k < s$ оператор $\delta^{(k-1)}$ — оператор инвариантного дифференцирования порядка $s - k + 1$, т. е. удовлетворяет уравнению (9). Покажем, что $\delta^{(k)}$ тоже оператор инвариантного дифференцирования порядка $s - k$.

Подстановка оператора $\delta^{(k)}$ в правую часть равенства (9) дает

$$\begin{aligned}(\nabla_u \delta^{(k)}[u])(\zeta u) &= (\nabla_u [\delta^{(k-1)}[u], J_k[u]])(\zeta u) \\ &= [(\nabla_u \delta^{(k-1)})(\zeta u), J_k] + [\delta^{(k-1)}, (\nabla_u J_k)(\zeta u)] \\ &= [[\zeta, \delta^{(k-1)}], J_k] + [\delta^{(k-1)}, \zeta J_k] = [[\zeta, \delta^{(k-1)}], J_k] + [\delta^{(k-1)}, [\zeta, J_k]].\end{aligned}$$

Выпишем левую часть равенства (9): $[\zeta, \delta^{(k)}[u]] = [\zeta, [\delta^{(k-1)}, J_k]]$. Применяя тождество Якоби, убеждаемся, что оператор $\delta^{(k)}$ удовлетворяет уравнению (9), т. е. является оператором инвариантного дифференцирования. Так как $\delta^{(k)}$ получен коммутированием дифференциального оператора $\delta^{(k-1)}$ порядка $s - k + 1$ с функцией J_k, его порядок равен $s - k$. $\square$

Пусть $\chi = \chi^{a_1 \dots a_s}(x) \partial^s / \partial x^{a_1} \dots \partial x^{a_s}$ плюс производные меньшего порядка — инвариантный дифференциальный оператор порядка s. Тогда, выбирая $J_k[u] = u$, $k = 1, \dots, s$, получим дифференциальный инвариант первого порядка

$$J_\chi[u] = \underbrace{[[\dots[\chi, u] \dots u], u]}_{s \text{ раз}} = s!\, \chi^{a_1 \dots a_s}(x) u_{a_1} \dots u_{a_s}.$$

(Можно показать, что если χ — псевдодифференциальный инвариантный оператор, то ему также соответствует дифференциальный инвариант первого порядка.) Таким образом, из теоремы 2 следует, что каждому инвариантному линейному оператору на однородном пространстве соответствует дифференциальный инвариант первого порядка. В следующем параграфе мы увидим, что это соответствие взаимно однозначное.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида (1), описывающее самодействующее скалярное незаряженное поле в римановом пространстве с метрикой

$$\begin{aligned}ds^2 = &-C_2 e^{2x_4} dx_1^2 + C_3 e^{3x_4} dx_1 dx_3 + 2e^{x_4} dx_2 dx_3 - C_1 e^{4x_4} dx_3^2 - 2e^{x_4} dx_1 dx_4 \\ &+ 2C_2 x_3 e^{2x_4} dx_1 dx_2 - -C_3 x_3 e^{3x_4} dx_2 dx_3 + 2x_3 e^{x_4} dx_2 dx_4 - C_2 x_3^2 e^{2x_4} dx_2^2, \quad (11)\end{aligned}$$

C_1–C_3 — const. Это риманово пространство допускает пятимерную транзитивную группу Ли изометрий с соответствующей алгеброй $\mathfrak{g}_5$ векторов Киллинга ($\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$):

$$\zeta_1 = \partial_1, \quad \zeta_2 = \partial_2, \quad \zeta_3 = x_2\partial_1 + \partial_3,$$

$$\zeta_4 = -x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - 2x_3\partial_3 + \partial_4, \quad \zeta_5 = x_1\partial_2 - x_3^2\partial_3 + x_3\partial_4.$$

Алгебра $\mathfrak{g}_5$ является также алгеброй точечных симметрий рассматриваемого дифференциального уравнения и имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_4] = -e_1, \quad [e_1, e_5] = e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2,$$

$$[e_3, e_4] = -2e_3, \quad [e_3, e_5] = e_4, \quad [e_4, e_5] = -2e_5.$$

Подалгеброй изотропии точки $x = 0$ является одномерная алгебра $\mathfrak{h} = \{e_5\}$. Нетрудно восстановить координатный вид левоинвариантных векторных полей ξ таких, что $\xi_i = \pi_*\zeta_i$, и соответствующих правоинвариантных векторных полей:

$$\xi_i = \zeta_i,\ i = 1, 2, 3, 4; \quad \xi_5 = \zeta_5 + e^{-2x_4}\partial_5; \quad \eta_1 = (e^{-x_4} + x_3x_5e^{x_4})\partial_1 + x_5e^{x_4}\partial_2,$$

$$\eta_2 = x_3e^{x_4}\partial_1 + e^{x_4}\partial_2, \quad \eta_3 = e^{-2x_4}\partial_3 + x_5\partial_4 - x_5^2\partial_5, \quad \eta_4 = \partial_4 - 2x_5\partial_5, \quad \eta_5 = \partial_5.$$

Алгебра инвариантных операторов в данном случае порождается тремя элементами:

$$\chi_1 = \pi_*\eta_2, \quad \chi_2 = \pi_*\eta_4, \quad \chi_3 = \pi_*(\eta_2\eta_3 - \eta_1\eta_4).$$

Согласно теореме 2 мы можем построить четыре оператора инвариантного дифференцирования:

$$\delta_1 = \chi_1, \quad \delta_2 = \chi_2, \quad \delta_3 = \chi_3, \quad \delta_4 = [\chi_3, u] - \chi_3 u = u_{(3)}\eta_2 + u_{(2)}\eta_3 - u_{(1)}\eta_4 - u_{(4)}\eta_1.$$

Мы считаем, что функции u на многообразии M — это функции на группе G, постоянные на каждом правом классе смежности Hg, т. е. $\eta_X u = 0$, $X \in \mathfrak{h}$. Выпишем операторы δ в координатах:

$$\delta_1 = \chi_1 = x_3e^{x_4}D_1 + e^{x_4}D_2, \quad \delta_2 = \chi_2 = D_4, \quad \delta_3 = \chi_3 = e^{-x_4}(D_{14} - x_3D_{13} - D_{23}),$$

$$\delta_4 = [\chi_3, u] - \chi_3 u = e^{-x_4}(x_3u_3D_1 + x_3u_1D_3 + u_2D_3 + u_3D_2 - u_1D_4 - u_4D_1).$$

Выпишем также дифференциальные инварианты первого порядка, соответствующие алгебре инвариантных операторов:

$$J_1 = e^{x_4}(x_3u_1 + u_2), \quad J_2 = u_4, \quad J_3 = e^{-x_3}(x_3u_1u_3 + u_2u_3 - u_1u_4). \qquad (12)$$

Обсуждение свойств полноты найденных операторов инвариантного дифференцирования и набора дифференциальных инвариантов мы продолжим ниже.

Замечание 2. Если у нас задана в координатах алгебра Ли $\mathfrak{g}$ векторных полей ζ транзитивной группы преобразований многообразия M, то не представляет никакого труда найти подалгебру изотропии $\mathfrak{h}$, построить левоинвариантные векторные поля ξ такие, что $\zeta = \pi_*\xi$, а также найти правоинвариантные векторные поля η.

Возникает вопрос: является ли набор операторов инвариантного дифференцирования, порожденный инвариантными операторами, полным в том смысле, что все дифференциальные инварианты могут быть получены из конечного множества дифференциальных инвариантов применением функциональных операций и операторов инвариантного дифференцирования из этого набора? Как показано выше, в случае, когда однородное пространство является группой Ли, все дифференциальные инварианты порождаются одним инвариантом (u) и инвариантными операторами (η). Однако в общем случае ответ отрицательный. Чтобы убедится в этом, достаточно рассмотреть случай, когда на однородном пространстве нет вообще инвариантных операторов.

Пример 3. Пусть задана алгебра Ли векторных полей на двумерном многообразии:

$$\zeta_1 = \partial_1, \quad \zeta_2 = \partial_2, \quad \zeta_3 = x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad \zeta_4 = x_2\partial_1 - x_1\partial_2.$$

Эта алгебра имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_4] = e_1.$$

Группа действует транзитивно, подалгебра изотропии $\mathfrak{h}$ точки $x = 0$ имеет базис $\mathfrak{h} = \{e_3, e_4\}$, $\mathfrak{h}^\perp = \{f \in \mathfrak{g}^* \mid f = f_1 e^1 + f_2 e^2\}$ (здесь и ниже e^i — дуальный базис в $\mathfrak{g}^*$: $\langle e^i, e_j\rangle = \delta^i_j$). Легко проверить, что $\mathfrak{h}^\lambda = 0$. Тогда формула (10) дает $\dim \mathscr{F} = 0$, т. е. инвариантных операторов нет.

Предложим следующую гипотезу.

Гипотеза. *Пусть $\chi_1, \dots, \chi_s$ — независимые инвариантные дифференциальные операторы порядка $k_1, \dots, k_s$ соответственно. Тогда набор операторов инвариантного дифференцирования, порожденный этим множеством инвариантных операторов, при выполнении условии $K = k_1 + \dots + k_s \geq \dim M$ полон в том смысле, что все операторы инвариантного дифференцирования δ формально выражаются из функциональных соотношений $F(\chi, \delta) = 0$ над полем дифференциальных инвариантов.*

§ 3. Построение дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования

Введем некоторые конструкции и обозначения. Обертывающая алгебра $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ имеет естественную фильтрацию:

$$\mathscr{U}_0 = \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g} = \mathscr{U}_1 \subset \mathscr{U}_2 \subset \dots \subset \mathscr{U}_\infty = \mathscr{U}(\mathfrak{g}), \quad \mathscr{U}_k\mathscr{U}_l \subset \mathscr{U}_{k+l},$$

$$\mathscr{U}_k = \sum_{j\leq k} \mathbb{R} \otimes \underbrace{\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \dots \otimes \mathfrak{g}}_{j \text{ раз}} / I,$$

где I — двусторонний идеал, порожденный соотношениями вида $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$. На пространстве $\mathscr{U}^*(\mathfrak{g})$ определена скобка Пуассона — Ли:

$$\{G(f), F(f)\} \equiv \langle f, [\nabla G(f), \nabla F(f)]\rangle, \quad f \in \mathscr{U}^*(\mathfrak{g}).$$

Каждая функция $G(f)$ порождает векторное поле $\{G(f), \cdot\}$ на $\mathscr{U}^*(\mathfrak{g})$. Обозначим через $\mathfrak{L}_X$ векторное поле на $\mathscr{U}^*(\mathfrak{g})$, соответствующее частному случаю $G(f) = \langle f, X\rangle$, $X \in \mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{L}_X F(f) = \langle f, [X, \nabla F(f)]\rangle \equiv \langle \mathrm{ad}^*_X f, \nabla F(f)\rangle;$$

$$X \in \mathfrak{g}, \ f \in \mathscr{U}^*(\mathfrak{g}), \ F(f) \in C^\infty(\mathscr{U}^*(\mathfrak{g})).$$

Линейные пространства $\mathscr{U}^*_k$ инвариантны относительно действия оператора $\mathfrak{L}_X$: $\mathfrak{L}_X \mathscr{U}^*_k \subset \mathscr{U}^*_k$. Нетрудно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Имеет место равенство*

$$[\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y] = \mathfrak{L}_{[X,Y]}, \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Таким образом, векторные поля $\mathfrak{L}_X$ образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и порождают действие группы G на каждом пространстве $\mathscr{U}_k^*$.

Введем еще обозначения:

$$\mathfrak{h}^\perp = \{f \in \mathscr{U}^*(\mathfrak{g}) \mid \langle f, \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}\rangle = 0\}; \quad \mathfrak{h}_k^\perp = \mathscr{U}_k^* \cap \mathfrak{h}^\perp;$$

$$\mathfrak{g}_k^\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \mid \operatorname{ad}_X^* \lambda = 0\}, \quad \lambda \in \mathscr{U}_k^*; \quad \mathfrak{h}_k^\lambda = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_k^\lambda.$$

Линейное пространство $\mathfrak{g}$ разложим в прямую сумму подпространств: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{p}$. Легко проверить, что для любого $X \in \mathfrak{h}$ корректно ограничение $\operatorname{ad}_X|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$.

Определим отображение момента $\mu : C^\infty(G) \to \mathfrak{g}^*$ формулой $\langle \mu(u), X\rangle = \eta_X u$, $u \in C^\infty(G)$, $X \in \mathfrak{g}$. Отображение момента может быть продолжено на обертывающую алгебру: $\langle \mu(u), X_1 \otimes \dots \otimes X_k\rangle = \eta_{X_1} \dots \eta_{X_k} u$. Функцию на однородном правом G-пространстве $M = G/H$ можно считать функцией на группе G, постоянной на каждом правом классе смежности по подгруппе H: $u(hg) = u(g) \Leftrightarrow \eta_X u(g) = 0$, $X \in \mathfrak{h}$. Тогда $\langle \mu(u), \mathscr{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{h}\rangle = 0$, т. е. если u — функция на однородном пространстве, то $\mu(u) \in \mathfrak{h}^\perp$.

Приведем основную теорему настоящей работы.

Теорема 3. *Пусть G — группа преобразований однородного пространства $M = G/H$. Тогда*

1) *существует взаимно однозначное соответствие между дифференциальными инвариантами $J[u]$ группы G и H-инвариантными функциями J на $\mathfrak{h}^\perp$:*

$$\mathfrak{L}_X J = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{h},\ J \in C^\infty(\mathfrak{h}^\perp); \tag{13}$$

2) *число независимых дифференциальных инвариантов порядка k равно*

$$C_{m+k}^k - \dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}_k^\lambda, \quad m = \dim M,\ \lambda \in \mathfrak{h}_k^\perp;$$

3) *число r_k, определяемое выражением* (3), *вычисляется по формуле $r_k = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}_k^\lambda$; в частности, $r_\kappa = r_{\kappa+1} = \dim \mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\dim \mathfrak{h}_k^\lambda = 0$;*

4) *операторы инвариантного дифференцирования $\delta[u]$ (первого порядка), зависящие от производных порядка k, находятся во взаимно однозначном соответствии с гладкими функциями Δ на $\mathfrak{h}_k^\perp$, принимающими значения в пространстве $\mathfrak{p}$ и являющимися решениями уравнений*

$$(\mathfrak{L}_X + \operatorname{ad}_X|_{\mathfrak{p}})\Delta = 0, \quad X \in \mathfrak{h}; \tag{14}$$

5) *число независимых операторов инвариантного дифференцирования $\delta[u]$, зависящих от производных порядка k, равно $\dim(\ker \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}_k^\lambda}|_{\mathfrak{p}})$. В частности, полный набор $(= \dim M)$ получается при $k = \kappa$, когда $\dim \mathfrak{h}_k^\lambda = 0$.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть $M = G/H$ — однородное правое G-пространство, $\zeta_X = \pi_*\xi_X$ — генераторы группы преобразований G, T — матричное l-мерное представление алгебры $\mathfrak{g}$, $C^\infty(M, R^l)$ — пространство гладких функций на M со значениями в R^l (пространстве представления T). Тогда пространство решений линейной системы*

$$(\zeta_X + T(X))F = 0 \quad \forall\, X \in \mathfrak{g},\ F \in C^\infty(M, R^l) \tag{15}$$

имеет размерность $\dim\ker(T|_\mathfrak{h})$.

Доказательство. Считая неизвестную функцию F функцией на группе Ли, постоянной на каждом правом классе смежности, перепишем систему (15) в эквивалентном виде:

$$(\xi_X + T(X))F = 0,\ X \in \mathfrak{g}; \quad \eta_Y F = 0,\ Y \in \mathfrak{h}.$$

В единице группы будет $\xi_Y(e) = \eta_Y(e)$, отсюда следует, что $T(Y)F_0 = 0\,\forall\, Y \in \mathfrak{h}$. Нетрудно убедиться, что это условие не только необходимое, но и достаточное. $\square$

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{e_\alpha\}$ — базис подалгебры $\mathfrak{h}$, $\{e_a\}$ — базис дополнительного в $\mathfrak{g}$ подпространства $\mathfrak{p}$. Считаем, что функции u на однородном пространстве M суть функции на группе G, постоянные на каждом правом классе смежности по подгруппе H: для любого $X \in \mathfrak{h}$ имеем $\eta_X u = 0$. На пространстве H-инвариантных функций $\zeta = \xi$. Поэтому согласно теореме 1 произвольная функция $J(u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(k)}{u})$, где $\underset{(1)}{u} = \{u_{(a)} \equiv \eta_a u\}$, $\underset{(2)}{u} = \{u_{(ab)} \equiv (\eta_a\eta_b)u\}$ и т. д., будет дифференциальным инвариантом k-го порядка на группе G. Для того чтобы эта функция J была дифференциальным инвариантом на многообразии M, необходимо выполнение условия инвариантности относительно левого сдвига на элементы подгруппы H:

$$\eta_X J(u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(k)}{u}) = 0 \quad \forall\, X \in \mathfrak{h}. \tag{16}$$

Отметим, что величины $u_{(a_1\dots a_s)}$, $s \le k$, можно интерпретировать как координаты линейного функционала $\mu(u)$ из пространства $\mathfrak{h}_k^\perp$: $u_{(a)} = \langle \mu(u), e_a\rangle$, $u_{(ab)} = \langle \mu(u), (e_a e_b)\rangle$ и т. д. Выпишем подробнее левую часть уравнения (16):

$$\begin{aligned}\eta_X J = \frac{\partial J}{\partial u_{(a)}}\eta_X\eta_a u + \frac{\partial J}{\partial u_{(ab)}}\eta_X(\eta_a\eta_b)u + \dots \\ = \frac{\partial J}{\partial u_{(a)}}[\eta_X, \eta_a]u + \frac{\partial J}{\partial u_{(ab)}}[\eta_X, (\eta_a\eta_b)]u + \dots \\ = \langle \mu(u), [X, e_a]\rangle \frac{\partial J}{\partial u_{(a)}} + \langle \mu(u), [X, (e_a e_b)]\rangle \frac{\partial J}{\partial u_{(ab)}} + \dots \\ = \langle \mu(u), [X, \nabla J]\rangle = \mathfrak{L}_X J(\mu(u)).\end{aligned}$$

П. 1 теоремы 3 доказан.

Для доказательства п. 2 теоремы зафиксируем в уравнении (13) линейный функционал общего положения $\lambda \in \mathfrak{h}_k^\perp$:

$$\mathfrak{L}J(\lambda) = \langle \operatorname{ad}_X^* \lambda, \nabla J(\lambda)\rangle = 0, \quad X \in \mathfrak{h}.$$

Рассмотрим линейный оператор $\operatorname{ad}^* \lambda : \mathfrak{h} \to \mathscr{U}_k^*$, тогда

$$\operatorname{rank}\operatorname{ad}^* \lambda = \dim\mathfrak{h} - \dim(\ker\operatorname{ad}^* \lambda) = \dim\mathfrak{h} - \dim\mathfrak{h}_k^\lambda.$$

Число независимых дифференциальных инвариантов порядка k равно числу переменных $u, u_{(a)}, \dots, u_{(a_1 \dots a_k)}$ минус ранг матрицы $\operatorname{ad}^* \lambda$. П. 2 теоремы 3 доказан.

Число r_k в формуле (3) есть количество переменных $x, u, u_{(a)}, \dots, u_{(a_1 \dots a_k)}$ минус число дифференциальных инвариантов k-го порядка. Итого

$$\left(\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h} + C^k_{m+k}\right) - \left(C^k_{m+k} - \dim \mathfrak{h} + \dim \mathfrak{h}^\lambda_k\right) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}^\lambda_k.$$

П. 3 теоремы 3 доказан.

Оператор вида $\delta = \Delta^a(u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(k)}{u})\eta_a + \Delta^\alpha(u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(k)}{u})\eta_\alpha$ является согласно теореме 1 оператором инвариантного дифференцирования на группе Ли общего вида, зависящим от производных k-го порядка. При проекции на многообразие M операторы η_α нулевые, поэтому без ограничения общности можно считать, что $\delta = \Delta^a(u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(k)}{u})\eta_a$. Чтобы процедура проекции оператора δ на M была корректной, необходимо потребовать обращение в нуль производной Ли этого оператора вдоль векторного поля η_X, $X \in \mathfrak{h}$:

$$\mathscr{L}_{\eta_X}\delta = (\eta_X \Delta^a(u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(k)}{u}))\eta_a + \Delta^a(u, \underset{(1)}{u}, \dots, \underset{(k)}{u})[\eta_X, \eta_a] = 0, \quad X \in \mathfrak{h}.$$

Используя равенство $\eta_X \Delta^a = \mathfrak{L}_X \Delta^a(\mu(u))$, получим

$$\mathscr{L}_{\eta_X}\delta = \left(\mathfrak{L}_X \Delta^a(\mu(u)) + (\operatorname{ad}_X)^a_b \Delta^b(\mu(u))\right)\eta_a = 0. \tag{17}$$

Пусть $f \in \mathfrak{h}^\perp_k$, $\Delta = \Delta^a(f)e_a$ удовлетворяет уравнению (14). Тогда после подстановки $f \to \mu(u)$, $e_a \to \eta_a$: $\delta[u] = \Delta^a(\mu(u))\eta_a$ получаем равенство (17). П. 4 теоремы доказан.

Для доказательства п. 5 теоремы используем лемму 4. Группа H действует на пространстве $\mathfrak{h}^\perp_k$, расслаивая последнее на орбиты. Оператор $\mathfrak{L}_X$ действует транзитивно на каждой H-орбите в $\mathfrak{h}^\perp_k$, и $\mathfrak{h}^\lambda_k$ — подалгебра изотропии орбиты общего положения $H\lambda \subset \mathfrak{h}^\perp_k$. Применяя лемму 4 и полагая $G = H$, $M = H\lambda$, $T(X) = \operatorname{ad}_X|_{\mathfrak{p}}$, получим последнее утверждение теоремы 3. $\square$

Замечание 3. Функции J на $\mathfrak{h}^\perp_1$, удовлетворяющие уравнению (13), согласно результатам работы [8] определяют образующие алгебры $\mathbf{D}(M)$ инвариантных операторов (при правильном выборе упорядочивания операторов во время замены $f_a \to \eta_a$). Поэтому, как показано в предыдущем параграфе, каждому инвариантному оператору соответствует дифференциальный инвариант первого порядка и, обратно, каждому дифференциальному инварианту первого порядка соответствует инвариантный оператор. Таким образом, соответствие между дифференциальными инвариантами первого порядка и инвариантными операторами взаимно однозначно.

§ 4. Примеры

В этом параграфе мы разберем несколько примеров и покажем, что все вычисления дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования сводятся к операциям линейной алгебры. Так, вычисление лево- и правоинвариантных полей сводится к взятию матричной экспоненты, построение инвариантов алгебры Ли векторных полей, коэффициенты при производных у которых линейные однородные функции координат, производится приведением матрицы к жордановой форме [5].

Здесь мы будем использовать введенные ранее обозначения: $\{e_\alpha\}$ — базис подалгебры $\mathfrak{h}$, $\{e_a\}$ — базис подпространства $\mathfrak{p}$. Размерность подалгебры $\mathfrak{h}_k^\lambda$ легко находится по формуле

$$\dim \mathfrak{h}_k^\lambda = \dim \mathfrak{h} - \operatorname{rank}(\operatorname{ad}^* \lambda), \quad \lambda \in \mathfrak{h}_k^\perp. \tag{18}$$

Пример 2 (продолжение). Для $\lambda \in \mathfrak{h}_1^\perp$ имеем $(\operatorname{ad}^* \lambda)_{\alpha b} = C^a_{\alpha b}\lambda_a$. В данном случае $\mathfrak{h}_1^\perp = \{f = f_1 e^1 + f_2 e^2 + f_3 e^3 + f_4 e^4\}$, $\dim \mathfrak{h} = \operatorname{rank}(\operatorname{ad}^* \lambda) = 1$. Согласно формуле (18) $\dim \mathfrak{h}_k^\lambda = 0$. Таким образом, $\kappa = 1$, т. е. операторы инвариантного дифференцирования зависят от производных не выше первого порядка.

Векторное поле $\mathfrak{L}_{e_5} = f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + f_4 \frac{\partial}{\partial f_3}$ на $\mathfrak{h}_1^\perp$ имеет инварианты $J_1 = f_2$, $J_2 = f_4$, $J_3 = f_2 f_3 - f_1 f_4$. При замене $f_a \to \eta_a$ получаем образующие алгебры инвариантных операторов на этом однородном пространстве, а при подстановке $f_a = u_{(a)}$ — все независимые дифференциальные инварианты первого порядка $\{u_{(2)}, u_{(4)}, u_{(2)}u_{(3)} - u_{(1)}u_{(4)}\}$, которые соответствуют алгебре инвариантных операторов. В координатах инварианты имеют вид (12).

В базисе $\{e_a\}$ $\mathfrak{p}$-значная функция $\Delta(f)$ является вектором: $\vec{\Delta}(f) = (\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \Delta^4)$. Уравнение (14) принимает вид

$$\left(f_2 \frac{\partial}{\partial f_1} + f_4 \frac{\partial}{\partial f_3} + A\right) \vec{\Delta}(f) = 0, \quad A = \operatorname{ad}_{e_5}|_{\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A нильпотентна: $A^2 = 0$, поэтому общее решение этой системы имеет вид $\vec{\Delta} = (f_2 E - f_1 A)\vec{\Delta}_0$ (здесь E — единичная матрица). Полагая одну компоненту постоянного вектора $\vec{\Delta}_0$ единицей, а остальные нулями, получим полный набор операторов инвариантного дифференцирования (для упрощения мы иногда делили на инвариант $u_{(2)}$):

$$\delta_1 = u_{(2)}\eta_1 - u_{(1)}\eta_2, \quad \delta_2 = \eta_2, \quad \delta_3 = u_{(2)}\eta_3 - u_{(1)}\eta_4, \quad \delta_4 = \eta_4. \tag{19}$$

Итак, мы нашли полный набор операторов инвариантного дифференцирования. Можно проверить, что три оператора инвариантного дифференцирования, порожденные инвариантными операторами и найденные нами ранее, суть линейные комбинации над полем дифференциальных инвариантов операторов δ (19). Фактически к этим трем операторам добавился оператор δ_1, который в выбранных координатах имеет вид $\delta_1 = u_2\partial_1 - u_1\partial_2$. Инвариантный оператор второго порядка χ_3 также выражается через операторы δ и инвариант $u_{(2)}$: $\chi_3 = (1/u_{(2)})(\delta_3\delta_2 + \delta_1)$. Верно и обратное. Операторы δ порождаются инвариантными операторами χ, а именно функционально выражаются над полем инвариантов первого порядка через операторы $\chi_1, \chi_2, \chi_3, [\chi_3, u]$:

$$\delta_1\chi_1 - \frac{J_3}{J_1}\chi_1^2 + [\chi_3, u]\chi_1 - J_1\chi_3 = 0,$$

$$\delta_2 = \chi_1, \quad \delta_1 + \frac{J_2}{J_1}\delta_3 = [\chi_3, u] - \frac{J_3}{J_1}\chi_1 + \frac{J_2}{J_1}\delta_1, \quad \delta_4 = \chi_2,$$

Подсчитаем, используя п. 2 теоремы 3 ($m = 4$, $k = 2$, $\dim \mathfrak{h} = 1$, $\dim \mathfrak{h}_k^\lambda = 0$), количество независимых инвариантов второго порядка: $C_6^2 - 1 = 14$.

Оператор $\mathfrak{L}_{e_5}$ в данном случае имеет вид ($f_a = \langle f, e_a\rangle$, $f_{ab} = \langle f, (e_a e_b)\rangle$)

$$\mathfrak{L}_{e_5} = f_2\partial_1 + f_4\partial_3 + (f_{23} + f_{14})\partial_{13} + 2f_{12}\partial_{11} + 2f_{34}\partial_{33} + f_{22}\partial_{12} + f_{24}\partial_{23} + (f_{24} + f_2)\partial_{14} + (f_{44} + f_4)\partial_{34}; \quad \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial f_a}, \quad \partial_{ab} \equiv \frac{\partial}{\partial f_{ab}}.$$

Мы выбрали симметрический базис в пространстве $\mathscr{U}_2$, поэтому для $f \in \mathfrak{h}_2^\perp$

$$\langle f, (e_3e_5)\rangle = \left\langle f, \frac{1}{2}(e_3e_5 + e_5e_3)\right\rangle = \frac{1}{2}\langle f, e_5e_3\rangle = \frac{1}{2}\langle f, [e_5, e_3]\rangle = \frac{1}{2}\langle f, -e_4\rangle = -\frac{1}{2}f_4.$$

Найдем все инварианты поля $\mathfrak{L}_{e_5}$ и, сделав замену $f = \mu(u)$, выпишем все инварианты второго порядка:

$$J_0 = u,\ J_1 = u_{(2)},\ J_2 = u_{(4)},\ J_3 = u_{(2)}u_{(3)} - u_{(1)}u_{(4)},\ J_4 = u_{(22)},\ J_5 = u_{(24)},$$

$$J_6 = u_{(44)},\quad J_7 = u_{(12)}u_{(2)} - u_{(22)}u_{(1)},\quad J_8 = u_{(11)}u_{(2)}^2 + u_{(22)}u_{(1)}^2 - 2u_{(1)}u_{(12)}u_{(2)},$$

$$J_9 = u_{(14)}u_{(2)} - u_{(24)}u_{(1)} - u_{(1)}u_{(2)},\quad J_{10} = u_{(34)}u_{(2)} - u_{(1)}u_{(44)} - u_{(4)}u_{(1)},$$

$$J_{11} = u_{(13)}u_{(2)}^2 + u_{(24)}u_{(1)}^2 + u_{(1)}^2u_{(2)}/2 - u_{(1)}u_{(14)}u_{(2)} - u_{(1)}u_{(23)}u_{(2)},$$

$$J_{12} = u_{(23)}u_{(2)} - u_{(24)}u_{(1)},\quad J_{13} = u_{(33)}u_{(2)}^2 + u_{(1)}^2u_{(44)} + u_{(4)}u_{(1)}^2 - 2u_{(1)}u_{(34)}u_{(2)}.$$

Дифференциальное уравнение (1) с метрикой (11), как и следовало ожидать, представляется поверхностью в пространстве дифференциальных инвариантов:

$$(J_{12} - J_9)/2J_1 + C_1J_4^2 + C_2J_6^2 + C_3J_5 = F(J_0).$$

Таким образом, вычислив операторы инвариантного дифференцирования, мы для данного примера показали справедливость высказанной ранее гипотезы, т. е. все дифференциальные инварианты порождаются тривиальным инвариантом $J_0 = u$ и инвариантными дифференциальными операторами χ.

Пример 3 (продолжение). В данном примере $\mathfrak{h}_1^\perp = \{f = f_1e^1 + f_2e^2\}$, $\dim\mathfrak{h} = \operatorname{rank}(\operatorname{ad}^*\lambda) = 2$. Согласно формуле (18) $\dim\mathfrak{h}_1^\lambda = 0$, т. е. $\kappa = 1$. Уравнения (14)

$$\left[f_1\partial_1 + f_2\partial_2 + \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\vec{\Delta} = 0,\quad \left[f_2\partial_1 - f_1\partial_2 + \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\vec{\Delta} = 0$$

имеют решения

$$\vec{\Delta}_1 = \frac{1}{f_1^2 + f_2^2}\begin{pmatrix}f_2\\ -f_1\end{pmatrix},\quad \vec{\Delta}_2 = \frac{1}{f_1^2 + f_2^2}\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix}.$$

Таким образом, получаем полный набор операторов инвариантного дифференцирования:

$$\delta_1 = \frac{1}{u_{(1)}^2 + u_{(2)}^2}[u_{(2)}\eta_1 - u_{(1)}\eta_2],\quad \delta_2 = \frac{1}{u_{(1)}^2 + u_{(2)}^2}[u_{(1)}\eta_1 + u_{(2)}\eta_2].$$

Теперь построим базис инвариантов второго порядка. Существует четыре инварианта второго порядка. Функция u — инвариант нулевого порядка, инвариантов первого порядка нет, и, следовательно, нам предстоит найти еще три инварианта. Уравнения (13)

$$\mathfrak{L}_{e_3}J = (f_1\partial_1 + f_2\partial_2 + 2f_{11}\partial_{11} + 2f_{12}\partial_{12} + 2f_{22}\partial_{22})J(f) = 0,$$

$$\mathfrak{L}_{e_4}J = (f_2\partial_1 - f_1\partial_2 + (f_{22} - f_{11})\partial_{12} + 2f_{12}\partial_{11} - 2f_{12}\partial_{22})J(f) = 0$$

имеют три независимых решения. Делая в этих решениях подстановку $f_a = u_{(a)}$, $f_{ab} = u_{(ab)}$, получаем базис дифференциальных инвариантов второго порядка:

$$J_0 = u,\quad J_1 = \frac{u_{(12)}\big(u_{(2)}^2 - u_{(1)}^2\big) + u_{(1)}u_{(2)}(u_{(11)} - u_{(22)})}{\big(u_{(1)}^2 + u_{(2)}^2\big)^2},$$

$$J_2 = \frac{u_{(11)} + u_{(22)}}{u_{(1)}^2 + u_{(2)}^2}, \quad J_3 = \frac{(u_{(11)} - u_{(22)})^2 + 4u_{(12)}^2}{\left(u_{(1)}^2 + u_{(2)}^2\right)^2}. \tag{20}$$

Приведем результаты в координатной форме. Выберем координаты в группе $g = g_4 g_3 g_2 g_1$ $(g_i \equiv \exp(x_i e_i))$. В этих координатах $\pi_* \xi = \zeta$,

$$u_{(1)} = e^{x_3}(u_1 \cos x_4 - u_2 \sin x_4), \quad u_{(2)} = e^{x_3}(u_1 \sin x_4 + u_2 \cos x_4),$$
$$u_{(11)} = e^{2x_3}(u_{22} \sin^2 x_4 - 2u_{12} \sin x_4 \cos x_4 + u_{11} \cos^2 x_4),$$
$$u_{(22)} = e^{2x_3}(u_{11} \sin^2 x_4 + 2u_{12} \sin x_4 \cos x_4 + u_{22} \cos^2 x_4),$$
$$u_{(12)} = e^{2x_3}(u_{11} \sin x_4 \cos x_4 + u_{12}(2\cos^2 x_4 - 1) - u_{22} \sin x_4 \cos x_4).$$

При подстановке величин $u_{(a)}, u_{(ab)}$ в формулу (20) координаты x_3, x_4 подгруппы H сокращаются. Это может служить проверкой правильности вычисления дифференциальных инвариантов. Если мы уверены, что инварианты посчитаны правильно, то можно сразу приравнять координаты в подгруппе H к координатам единичного элемента. В данном случае при $x_3 = x_4 = 0$ будет $u_{(a)} = u_a, u_{(ab)} = u_{ab}$, т. е. для записи инвариантов в координатном виде в формуле (20) следует убрать круглые скобки.

Заключение

Предлагаемые в работе методы позволяют по заданным генераторам группы преобразований с помощью разработанного пакета процедур в системе компьютерной алгебры «Maple» строить базисы дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования.

Что касается дальнейших перспектив, то можно отметить следующее. Генератор точечных симметрий общего вида после исключения инвариантов может рассматриваться как генератор группы преобразований однородного пространства $N \subset M \times U$, где $N = G/H$ — несингулярная орбита, H — подгруппа стационарности точки (x_0, u_0) общего положения. При точечных преобразованиях подгруппа H переходит в сопряженную подгруппу. В то же время само разделение переменных (x, u) на независимые и зависимые носит координатный характер и доставляет пока проблемы построения бескоординатной теории дифференциальных инвариантов. Однако представляется возможным обобщить данный метод на случай, когда зависимая переменная u преобразуется линейным образом, т. е. генератор точечной симметрии имеет вид

$$\zeta = \zeta^a(x)\frac{\partial}{\partial x^a} + u^\alpha a_\alpha^\beta(x)\frac{\partial}{\partial u^\beta}. \tag{21}$$

Этот случай охватывает многие важные приложения, особенно в квантовой теории поля, поскольку все динамические симметрии квантовополевых уравнений имеют вид (21). Изложение этой теории во многом базируется на результатах настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tresse A.* Sur less invariants differentiels des groupes continus de transformations // Acta Math. 1894. V. 18. P. 1–88.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Чупахин А. П.* Базисы дифференциальных инвариантов алгебр Евклида и Галилея // Симметрия и дифференциальные уравнения: Тр. междунар. конф. Красноярск, 2000. С. 254–256.

4. *Винберг Э. Б.* Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 1. С. 3–62.
5. *Трофимов В. В.* Введение в геометрию многообразий с симметриями. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1989.
6. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
7. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
8. *Широков И. В.* Тождества и инвариантные операторы на однородных пространствах // Теоретическая и математическая физика. 2001. Т. 126, № 3. С. 393.

Статья поступила 16 января 2006 г.

Широков Игорь Викторович
Иртышский филиал Новосибирской гос. академии водного транспорта,
пр. Мира, 4, Омск 644024
iv_shirokov@mail.ru