Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 517.518.13+517.518.14+512.81+517.518.475

О ПРОБЛЕМЕ МИХЛИНА НА ГРУППАХ КАРНО

Н. Н. Романовский

Аннотация. Рассмотрен один класс сингулярных интегральных операторов, действующих на функции, заданные в областях групп Карно. Доказана ограниченность в L_p, $1 < p < \infty$, операторов этого класса. Подобные операторы, действующие на функции, заданные в областях евклидова пространства, были рассмотрены С. Г. Михлиным.

Ключевые слова: группа Карно, сингулярный интегральный оператор, теорема Зигмунда — Кальдерона, теорема Михлина, многомерный ряд Фурье.

В работе мы обобщаем результат С. Г. Михлина об ограниченности в L_p, $1 < p < \infty$, одного класса сингулярных интегральных операторов (см. [1–3]) на случай функций, заданных в областях групп Карно. Доказанное нами утверждение обобщает также результат работы Кнаппа и Стейна [4]. Мы используем некоторые идеи работы А. П. Кальдерона и А. Зигмунда [5]. Доказанная нами ограниченность рассмотренного в настоящей работе класса сингулярных интегральных операторов может быть использована в теории пространств Соболева функций, заданных в областях групп Карно (см. [6, 7]), а также в связи с некоторыми вопросами дифференциальной геометрии (см. [8, 9]) и теории уравнений в частных производных (см., например, [1]).

Пусть G — группа Карно, A — ее n-мерная алгебра Ли. Напомним, что экспоненциальное отображение (exp) осуществляет диффеоморфизм алгебры Ли на ее группу.

Однородная норма и расстояние определяются на G следующим образом. Допустим на нильпотентной алгебре Ли A задана стандартная градуировка $A = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ $(V_{i+1} = [V_i, V_1])$ (см. [10]). Выберем в V_1 базис гладких векторных полей $X_1, \dots, X_{n_1}$, в V_2 — $X_{n_1+1}, \dots, X_{n_2}$ и т. д., в V_k — $X_{n_{k-1}+1}, \dots, X_n$. Для n-мерных векторов определим анизотропную норму

$$\|v\|_{n_1,\dots,n_k} = \left(v_1^2 + \dots + v_{n_1}^2 + |v_{n_1+1}| + \dots + |v_{n_2}| + \dots + |v_{n_{k-1}+1}|^{\frac{2}{k}} + \dots + |v_n|^{\frac{2}{k}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Однородной нормой элемента $g \in G$ является описанная анизотропная норма координатной записи относительно базиса $X_1, \dots, X_n$ прообраза g при экспоненциальном отображении

$$|g| = \|\exp^{-1} g\|_{n_1,\dots,n_k}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00735-а), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ 8526.2006.1), а также Лаврентьевского гранта (№ 5) для молодых ученых СО РАН.

Расстояние на группе определяется формулой

$$\rho(g,h) = |h^{-1} \cdot g|.$$

Таким образом, шар с центром в 0 радиуса r в анизотропной норме при экспоненциальном отображении переходит в шар с центром в e (единице группы) радиуса r на группе. Функция $\rho(g,h)$ определяет квазиметрику, т. е. она удовлетворяет всем аксиомам метрики, кроме неравенства треугольника, вместо него выполняется обобщенное неравенство треугольника

$$\rho(g,h) \le C(\rho(g,p) + \rho(p,h)).$$

Расстояние на группе инвариантно относительно левых сдвигов, т. е.

$$\rho(g,h) = \rho(p \cdot g, p \cdot h), \quad g,h,p \in G.$$

Мера множества $M \subset A$ определяется как мера Лебега множества из $\mathbb{R}^n$, состоящего из координатных записей векторных полей из M в базисе $X_1, \dots, X_n$. Мера на алгебре переносится с помощью экспоненциального отображения на группу и дает меру Хаара μ (см. [10]). Мера μ инвариантна как относительно левых, так и относительно правых сдвигов.

На алгебре определяются стандартные растяжения

$$\delta_t(v) = (tv_1, \dots, tv_{n_1}, t^2 v_{n_1+1}, \dots, t^2 v_{n_2}, \dots, t^k v_{n_{k-1}+1}, \dots, t^k v_n), \quad t > 0.$$

Посредством экспоненциального отображения определяется стандартное семейство растяжений на группе

$$\delta_t(g) = \exp(\delta_t(\exp^{-1} g)), \quad t > 0.$$

Легко видеть, что $|\delta_t(g)| = t|g|$, $\delta_t(g \cdot h) = \delta_t(g) \cdot \delta_t(h)$. Отметим, что анизотропную норму можно задать также более общим способом, определяя норму векторов единичной евклидовой сферы с помощью произвольной гладкой выпуклой положительной функции и перенося анизотропную норму на остальные векторы с помощью семейства растяжений по формуле $\|\delta_t(v)\| = t\|v\|$, где через $\|\cdot\|$ в данном месте обозначена определяемая анизотропная норма (см. [11]).

Нетрудно видеть, что $\mu(\delta_t(E)) = t^\nu \mu(E)$ для произвольного измеримого множества $E \subset G$, где $\nu = n_1 + 2(n_2 - n_1) + \dots + k(n_k - n_{k-1})$ — однородная размерность группы G. Отсюда следует, что $\mu(B(x,r)) = Cr^\nu$, постоянная C не зависит от x и r. Подробнее по поводу вышеприведенных определений см. [10].

Пусть Ω — ограниченная область в G. Определим интегральный оператор

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{G \setminus B(x,\varepsilon)} K(x, y \cdot x^{-1}) \bar{f}(y)\, d\mu(y), \quad x \in \Omega,$$

где $\bar{f}(x) = f(x)$ для $x \in \Omega$ и $\bar{f}(x) = 0$ для $x \in G \setminus \Omega$.

В дальнейшем будем предполагать, что ядро $K(x,z)$ удовлетворяет следующим условиям:

(i) $K(x,z) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (G \setminus \{e\}))$;

(ii) функция $K(x,z)$ положительно однородна порядка $-\nu$ относительно z, т. е. $K(x, \delta_t(z)) = t^{-\nu} K(x,z)$ для $t > 0$;

(iii) для всех x интеграл $K(x,z)$ относительно переменной z по некоторому кольцу с центром в e равен нулю, что в силу положительной однородности

$K(x,z)$ эквивалентно равенству нулю интеграла $K(x,z)$ относительно переменной z по всякому кольцу с центром в e:

$$\int\limits_{0<a<|z|<b<\infty} K(x,z)\,d\mu(z)=0.$$

Последнее условие называют *условием сокращения*. Мера μ индуцирует меру на единичной сфере с центром в e на группе по правилу

$$\sigma(E)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu\bigl(\bigcup\limits_{1\le t\le 1+\varepsilon}\delta_t(E)\bigr)}{\varepsilon}. \tag{1}$$

Сформулированное условие сокращения эквивалентно тому, что для любого x интеграл $K(x,z)$ по второй переменной по единичной сфере по мере (1) равен нулю:

$$\int\limits_{S(e,1)} K(x,z)\,d\sigma(z)=0.$$

Теорема. *Пусть ядро $K(x,z)$ удовлетворяет условиям* (i)–(iii). *Предположим, что функция f принадлежит $L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$. Тогда существует предел Tf, также принадлежащий $L_p(\Omega)$, причем линейный оператор T ограничен, т. е. выполняется неравенство $\|Tf\|_{L_p(\Omega)}\le A_p\|f\|_{L_p(\Omega)}$, где постоянная A_p не зависит от f.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $p=2$.

Перепишем интегральный оператор T в виде

$$Tf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{G\setminus B(e,\varepsilon)} K(x,z)\bar f(z\cdot x)\,d\mu(z).$$

Рассмотрим функцию $K(x,z)$. Фиксируем точку x. Выберем некоторое покрытие единичной сферы $S(e,1)$ открытыми (в смысле этой сферы) множествами, лежащими на $S(e,1)$, достаточно малого диаметра $\{U_i\}$, $i=1,\dots,N$, такими, что $U_i\cap U_{i+1}\ne\varnothing$, $i=1,\dots,N-1$. Возможность построения таких покрытий обеспечивается связностью и компактностью единичной сферы $S(e,1)$. Пусть φ_i — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Для того чтобы построить φ_i, достаточно рассмотреть некоторый набор неотрицательных гладких финитных функций ψ_i, не равных одновременно нулю, с носителями, содержащимися в U_i, и положить

$$\varphi_i=\frac{\psi_i}{\sum\limits_{j=1}^{N}\psi_j}.$$

Разбиение единицы позволяет представить ядро $K(x,z)$ в виде суммы ядер, определенных формулами

$$K_i(x,z)=|z|^{-\nu}\varphi_i(\delta_{1/|z|}(z))K(x,\delta_{1/|z|}(z)).$$

Легко видеть, что ядра $K_i(x,z)$ принадлежат классу $C^\infty(\overline{\Omega}\times(G\setminus\{e\}))$ и положительно однородны порядка $-\nu$ относительно переменной z. Однако условие сокращения может для них не выполняться. Для того чтобы удовлетворить условию сокращения, вычтем из $K_i(x,z)$ однородное порядка $-\nu$ относительно z ядро $K_i'(x,z) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (G \setminus \{e\}))$ такое, что

$$\int\limits_{S(e,1)} K_i'(x,z)\, d\sigma(z) = \int\limits_{S(e,1)} K_i(x,z)\, d\sigma(z),$$

причем пересечение носителя $K_i'(x,z)$ как функции z с единичной сферой содержится в $U_i \cap U_{i+1}$. Одновременно мы прибавим $K_i'(x,z)$ к $K_{i+1}(x,z)$. Продолжим этот процесс. Получаем последовательность ядер $\widetilde{K}_i(x,z)$, каждое из которых удовлетворяет условию сокращения, причем

$$\sum_{i=1}^{m} \widetilde{K}_i(x,z) + K_m'(x,z) + \sum_{i=m+1}^{N} K_i(x,z) = K(x,z).$$

Для каждого m имеем

$$\int\limits_{S(e,1)} \left(K_m'(x,z) + \sum_{i=m+1}^{N} K_i(x,z) \right) d\sigma(z) = 0.$$

На последнем шаге положим $\widetilde{K}_N(x,z) = K_{N-1}'(x,z) + K_N(x,z)$. Очевидно, что это ядро также удовлетворяет условию сокращения. Окончательно получаем разложение ядра $K(x,z)$ в сумму ядер $\widetilde{K}_i(x,z) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times (G \setminus \{e\}))$, $i = 1, \dots, N$, однородных порядка $-\nu$ относительно z и удовлетворяющих условию сокращения, причем пересечение носителя ядра $\widetilde{K}_i(x,z)$ с единичной сферой содержится в U_i.

Отсюда следует, что для доказательства теоремы, не ограничивая общности, можно считать, что носитель $K(x;z)$ как функции от z содержится в криволинейном конусе $\kappa = \bigcup\limits_{0<t<\infty} \delta_t(U)$, где U — множество на единичной сфере $S(e,1)$, открытое в смысле этой сферы и имеющее достаточно малый диаметр и гладкую границу.

Введем теперь подходящую систему координат на некотором открытом множестве V на единичной сфере, содержащем множество U. Для этого построим гладкое отображение φ параллелепипеда $P = [0,\tau_1] \times \dots \times [0,\tau_{n-1}] \subset \mathbb{R}^{n-1}$ в единичную сферу $S(e,1) \subset G$ такое, что $\varphi(P) \Supset U$, причем для любого измеримого множества $E \subset P$ выполняется $\sigma(\varphi(E)) = |E|$, где через $|\cdot|$ обозначен $(n-1)$-мерный объем, а через σ — мера на единичной сфере, определенная формулой (1).

Сначала отметим, что поскольку единичная сфера $S(e,1)$ есть гладкая поверхность, мы можем перевести достаточно малое открытое множество, содержащее U, в открытое множество подходящим диффеоморфизмом w. При этом нетрудно видеть, что мера σ элемента поверхности на сфере будет равна $(n-1)$-мерному объему образа, домноженному на гладкую весовую функцию. Остается показать, что для любой гладкой, неотрицательной, заданной на параллелепипеде и не обращающейся в нуль функции $g(y)$ можно подобрать гладкое отображение $u(y)$ этого параллелепипеда в $\mathbb{R}^{n-1}$ такое, что $\det(\nabla u(y)) = g(y)$. Для того чтобы построить пример такого отображения, положим $u_i(y_1, \dots, y_{n-1}) = y_i$ для $i = 1, \dots, n-2$, а в качестве $u_{n-1}(y)$ возьмем функцию, удовлетворяющую соотношению $\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y_{n-1}}(y) = g(y)$. Такую функцию легко построить, проинтегрировав функцию $g(y)$ вдоль линий $y_1 = \mathrm{const}, \dots, y_{n-2} = \mathrm{const}$, очевидно, что в результате получается гладкая функция. Из равенства $\det(\nabla u(y)) \neq 0$ следует, что отображение u локально обратимо и обратное отображение принадлежит классу C^1.

Положим $\psi = u \circ w$. Поскольку по нашему предположению множество U имеет достаточно малый диаметр, отсюда вытекает, что можно считать отображение $\psi(x)$ обратимым для всех x таких, что $\varphi(x) \in U$, а обратное отображение φ принадлежащим классу C^1 и удовлетворяющим условию $\sigma(\varphi(E)) = |E|$ для любого измеримого $E \subset P$.

С помощью отображения

$$(v_1, \dots, v_{n-1}) \mapsto \left(\frac{\pi}{\tau_1} v_1, \dots, \frac{\pi}{\tau_{n-1}} v_{n-1}\right)$$

переведем P в куб $\Pi = [0, \pi]^{n-1}$. Обозначим полученное координатное отображение через $\bar{\theta}$, соответственно координатные функции — через $\theta_i : V \subset S(e, 1) \to [0, \pi]$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$.

Введем систему координат на криволинейном конусе

$$\kappa = \bigcup_{0<t<\infty} \delta_t(V),$$

полагая первую координату точки g из этого конуса равной однородной норме этой точки $|g|$ и остальные $n-1$ координат равными координатам θ_i «проекции» $\delta_{1/|g|} g$ точки g на единичную сферу $S(e, 1)$.

По поводу определения обобщенных сферических координат в смысле анизотропного расстояния см. также, например, [11, с. 55].

В силу выбора системы координат $\bar{\theta}$ при интегрировании некоторой функции, носитель которой содержится в описанном конусе, по единичной сфере $S(e, 1) \subset G$ по мере σ имеем

$$\int\limits_{S(e,1)} F(z)\, d\sigma(z) = C \int\limits_{\Pi} F(\bar{\theta})\, d\bar{\theta}, \tag{2}$$

где $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ суть координаты точки z, C не зависит от F (см. также [10]).

Фиксируем x. Для избежания двусмысленности обозначим запись $K(x; z)|_\kappa$ в определенной выше системе координат через $\widetilde{K}(x; r, \bar{\theta})$. Положим $r = 1$. Имеем $\widetilde{K}(x; 1, \cdot) \in C_0^\infty(\Pi)$. Продолжим эту функцию четным образом по каждому аргументу θ_i на $[-\pi, \pi]$ и далее периодическим образом на все $\mathbb{R}^{n-1}$. Получаем гладкую четную и периодическую по каждому аргументу функцию, определенную на всем пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$. Разложим ее в многомерный ряд Фурье. Получим

$$\widetilde{K}(x; 1, \bar{\theta}) = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \lambda_{i_1, \dots, i_{n-1}}(x) \cos(i_1 \theta_1) \dots \cos(i_{n-1} \theta_{n-1})$$
$$= \sum_I \lambda_I(x) \widetilde{H}_I(\bar{\theta}),$$

где I для краткости обозначает $(n-1)$-мерный мультииндекс $(i_1, \dots, i_{n-1})$, т. е. $(n-1)$-мерный вектор с неотрицательными целыми компонентами,

$$\widetilde{H}_I(\bar{\theta}) = \frac{1}{\pi^{\frac{n-1}{2}}} \cos(i_1 \theta_1) \cos(i_2 \theta_2) \dots \cos(i_{n-1} \theta_{n-1}).$$

Через $\sum\limits_{I}$ мы обозначаем и в дальнейшем будем обозначать сумму по всем $(n-1)$-мерным мультииндексам. В силу гладкости функции $\widetilde{K}(x;1,\cdot)$ частичные суммы выписанного ряда Фурье равномерно как по $\bar{\theta}$, так и по x сходятся к этой функции. Действительно, имеем равенство Парсеваля, т. е. для всех x

$$\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}=0}^{\infty} |\lambda_{i_1,i_2,\dots,i_{n-1}}(x)|^2 = \|\widetilde{K}(x;1,\cdot)\|^2_{L_2(\Pi)}.$$

Легко видеть, что квадрат L_2-нормы производной $D^J_{\bar{\theta}}\widetilde{K}(x;1,\cdot)$ для всех x равен сумме $\sum\limits_{I} I^{2J}|\lambda_I(x)|^2$, где $I^{2J} = i_1^{2j_1} i_2^{2j_2} \dots i_{n-1}^{2j_{n-1}}$. Следовательно, если $\widetilde{K}(x;1,\cdot) \in W_2^k(\Pi)$, причем $\|\widetilde{K}(x;1,\cdot)\|_{W_2^k(\Pi)} \le C$, где C не зависит от x, то имеем равномерную по x сходимость ряда $\sum\limits_{I} |I|^{2k}|\lambda_I(x)|^2$. Запишем формулу

$$\left(|\lambda_I| - \frac{1}{|I|^{2k}}\right)^2 = |\lambda_I|^2 - \frac{2}{|I|^{2k}}|\lambda_I| + \frac{1}{|I|^{4k}},$$

откуда

$$|\lambda_I| \le |I|^{2k}|\lambda_I|^2 + \frac{1}{|I|^{2k}}.$$

Выясним, при каких k сходится многомерный ряд $\sum\limits_{I} \frac{1}{|I|^{2k}}$. Нетрудно видеть, что сходимость этого ряда вытекает из сходимости $(n-1)$-мерного интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus B(0,1)} \frac{1}{|x|^{2k}}\,dx$, сходящегося для $2k > n-1$. Действительно, сопоставим произвольному мультииндексу I куб в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ с ребрами единичной длины, направленными вдоль координатных осей, с вершиной, ближайшей к началу координат и расположенной в точке $(i_1,\dots,i_{n-1})$. Остается отметить, что каждое слагаемое в рассматриваемой сумме оценивается через интеграл функции $\frac{1}{|x|^{2k}}$ по соответствующему кубу, а кубы могут пересекаться только по границе.

Очевидно, что из предположения $\widetilde{K}(\cdot;1,\cdot) \in C^\infty(\Omega\times\Pi)$, а также из ограниченности области Ω следует, что $\widetilde{K}(x;1,\cdot) \in W_2^{[\frac{n-1}{2}]+1}(\Pi)$ для всех x, причем $\|\widetilde{K}(x;1,\cdot)\|_{W_2^{[\frac{n-1}{2}]+1}(\Pi)}$ не превосходит константы, не зависящей от x. Таким образом, в наших предположениях мы имеем равномерную по x и $\bar{\theta}$ сходимость ряда Фурье $\sum \lambda_I(x)\widetilde{H}_I(\bar{\theta})$.

Перепишем условие сокращения для ядра $K(x,z)$ в новых координатах. В силу (2) имеем

$$\int\limits_{\Pi} \widetilde{K}(x;1,\bar{\theta})\,d\bar{\theta} = 0.$$

Легко видеть, что интеграл $\widetilde{H}_I$ по Π равен нулю для всех ненулевых $(n-1)$-мерных мультииндексов I, а для нулевого мультииндекса отличен от нуля. Следовательно, из условия сокращения вытекает, что $\lambda_0(x) = 0$ для всех x, где 0 в нижнем индексе обозначает вектор с нулевыми координатами.

Кроме того, легко видеть, что функции $\widetilde{H}_{i_1,i_2,\dots,i_{n-1}}(\bar{\theta})$, $\bar{\theta} \subset \Pi \subset \mathbb{R}^{n-1}$, удовлетворяют условию Липшица и постоянная Липшица функции $\widetilde{H}_{i_1,i_2,\dots,i_{n-1}}(\bar{\theta})$ не превосходит $\mathrm{const}\cdot\max(i_1,\dots,i_{n-1})$.

Воспользуемся положительной однородностью $K(x,z)$ и запишем

$$\widetilde{K}(x;r,\bar{\theta}) = \sum_I \lambda_I(x) r^{-\nu} \widetilde{H}_I(\bar{\theta}).$$

Как отмечено выше, $\lambda_0(x) \equiv 0$, а остальные слагаемые в правой части последнего равенства по отдельности удовлетворяют условию сокращения. Обозначим

$$H_I(z) = \begin{cases} r^{-\nu}\widetilde{H}_I(\bar{\theta}), & z \in \kappa, \\ 0, & z \notin \kappa. \end{cases}$$

Имеем

$$K(x,z) = \sum_I \lambda_I(x) H_I(z).$$

Обозначим

$$J_I f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{G \setminus B(e,\varepsilon)} H_I(z) \bar{f}(z \cdot x)\, d\mu(z).$$

Нетрудно видеть, что ядра $H_I(z)$ удовлетворяют условию сокращения, кроме того, они зависят только от z. Следовательно, мы сводим вопрос к классическим операторам свертки на группе Карно и можем адаптировать метод работы Кнаппа и Стейна [4]. Ввиду того, что $H_I(z)$ не являются непрерывно дифференцируемыми (гладкость может нарушаться при продолжении этих гладких внутри криволинейного конуса κ функций нулем во вне κ), операторы J_I не удовлетворяют всем условиям из статьи [4]. Однако тот факт, что разрывы могут иметь место только в точках границы κ, и ограниченность функций $H_I(z)$ позволяют использовать подход из [4] и получить следующие оценки на нормы J_I как операторов из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$:

$$\|J_I\| \le C\sqrt{1+|I|}, \tag{3}$$

где $|I| = i_1 + \cdots + i_{n-1}$.

Сформулируем сначала одну вспомогательную лемму (см. [4]).

Лемма 1 [4]. *Пусть неотрицательная функция $\varphi(n)$ определена для всех целых $-\infty < n < \infty$, причем*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi(n)^{\frac{1}{2}} < \Phi < \infty.$$

Предположим, что последовательность линейных операторов $T_1, \dots, T_N$ на гильбертовом пространстве удовлетворяет неравенствам

$$\|T_i (T_j)^*\| \le \varphi(i-j), \quad \|(T_i)^* T_j\| \le \varphi(i-j)$$

для всех $i,\ j \in \mathbb{Z}$. Тогда $\|T_1 + \cdots + T_N\| \le \Phi$ для любого большого N.

В нашем случае определим последовательность операторов, удовлетворяющую условиям леммы 1, по формулам

$$T_k^I f(x) = \int\limits_{B(e,2^{k+1}) \setminus B(e,2^k)} H_I(z) \bar{f}(z \cdot x)\, d\mu(z),$$

где $B(e,r)$ — шар с центром в единице группы радиуса r.

Оценим норму $T_j^I\big(T_k^I\big)^*$ как оператора из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Оценка нормы оператора $\big(T_j^I\big)^* T_k^I$ выводится аналогично. Нетрудно видеть (см. также [4]), что оператор $T_j^I\big(T_k^I\big)^*$ имеет вид

$$T_j^I(T_k^I)^* f(x) = \int\limits_G K_{jk}^I(y)\bar{f}(y\cdot x)\,d\mu(y),$$

где

$$K_{jk}^I(y) = \int\limits_{z\cdot y\in R_j, z\in R_k} H_I(z\cdot y)H_I(z)\,d\mu(z), \quad R_i = B(e,2^{i+1})\setminus B(e,2^i).$$

Действительно, для оператора, сопряженного к оператору $Tf(x) = \int K(y)f(y\cdot x)\,d\mu(y)$, имеем

$$T^* f(x) = \int K(y^{-1})f(y\cdot x)\,d\mu(y)$$

(см. ниже более общую формулу (4)). Запишем

$$T_j^I\big(T_k^I\big)^* f(x) = \int\limits_{R_j} H_I(z)\int\limits_{R_k} H_I(y^{-1})f(y\cdot z\cdot x)\,d\mu(y)d\mu(z).$$

После замены $z_1 = y\cdot z$, $y_1 = y^{-1}$, учитывая $d\mu(z_1) = d\mu(z)$, $d\mu(y_1) = d\mu(y)$, получаем

$$T_j^I\big(T_k^I\big)^* f(x) = \int\limits_{R_j}\int\limits_{R_k} H_I(y_1)H_I(y_1\cdot z_1)\,d\mu(y_1)f(z_1\cdot x)\,d\mu(z_1).$$

Наконец, переобозначив $y = z_1$, $z = y_1$, выводим требуемую формулу.

С помощью аналога (см. [12]) классического неравенства Юнга

$$\Big\|\int\limits_E K(y-x)f(y)\,dy\Big\|_{L_2(E)} \le \|K\|_{L_1(E)}\|f\|_{L_2(E)}, \quad E\subset\mathbb{R}^n,$$

на группах Карно (см., например, [11]) получаем

$$\big\|T_j^I\big(T_k^I\big)^*\big\|_{L_2\to L_2} \le \big\|K_{jk}^I\big\|_{L_1}.$$

Кроме того, $K_{jk}^I(y^{-1}) = K_{kj}^I(y)$. Следовательно, L_1-нормы этих функций совпадают ($d\mu(y^{-1}) = d\mu(y)$). Таким образом, нам требуются оценки $\big\|K_{jk}^I\big\|_{L_1}$ только для положительных $j-k$.

В силу выполнения условия сокращения имеем

$$K_{jk}^I(x) = \int\limits_{y\cdot x\in R_j, y\in R_k} (H_I(y\cdot x) - H_I(x))H_I(y)\,d\mu(y).$$

Соответственно

$$\big\|K_{jk}^I\big\|_{L_1} = \iint\limits_{y\cdot x\in R_j, y\in R_k} |H_I(y\cdot x) - H_I(x)||H_I(y)|\,d\mu(y)d\mu(x).$$

В силу определения функции H_I, а также формулы $\mu(\delta_t(E)) = t^\nu \mu(E)$ для любого измеримого множества E получаем

$$\left\|K_{jk}^I\right\|_{L_1} = \iint\limits_{y\cdot x\in R_1, y\in R_{k-j}} |H_I(y\cdot x) - H_I(x)||H_I(y)|\, d\mu(y)d\mu(x).$$

Легко видеть, что функция $H_I(y)$ ограничена на R_1, более того, $|H_I(y)| \le 1$ для $y \in R_1$. Из определения функции H_I выводим $|H_I(y)| \le 2^{(j-k)\nu}$ на R_{k-j}. Следовательно,

$$\left\|K_{jk}^I\right\|_{L_1} \le 2^{(j-k)\nu} \iint\limits_{y\cdot x\in R_1, y\in R_{k-j}} |H_I(y\cdot x) - H_I(x)|\, d\mu(y)d\mu(x).$$

Рассмотрим функцию $y \mapsto H_I(y{\cdot}x)$ и ее запись в системе координат $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \exp(v_1X_1 + \dots + v_nX_n)$, иначе говоря, функцию

$$h_{x,I}(v_1, \dots, v_n) = H_I(\exp(v_1X_1 + \dots + v_nX_n)\cdot x).$$

В силу того, что умножение справа на фиксированный элемент является гладкой операцией на группе, эта функция непрерывно дифференцируема для всех $(v_1, \dots, v_n)$, для которых $\exp(v_1X_1 + \dots + v_nX_n)\cdot x \notin \partial\kappa$. Более того, поскольку мы везде предполагаем, что x принадлежит ограниченной области, можно оценить норму градиента этой функции через норму градиента функции $h_{e,I}$. Далее,

$$h_{e,I}(v_1, \dots, v_n) = H_I(\exp(v_1X_1 + \dots + v_nX_n)).$$

Учитывая способ определения $H_I(z)$ и то, что переход от координат $(r, \bar\theta)$ к координатам $(v_1, \dots, v_n)$ для $r \ne 0$ задается гладким отображением, получаем оценку

$$\|\nabla h_{x,I}(v_1, \dots, v_n)\| \le C|I|, \quad \exp(v_1X_1 + \dots + v_nX_n)\cdot x \in R_1 \cup R_{1/2}.$$

Принимая во внимание определение однородной нормы $|\cdot|$, имеем

$$\frac{|H_I(y\cdot x) - H_I(x)|}{|y|} = \frac{|h_{x,I}(v) - h_{x,I}(0)|}{\|v\|_{n_1,\dots,n_k}}, \quad y = \exp(v).$$

Отсюда получаем, что для $y\cdot x \in R_1 \setminus U_{k-j}(\kappa)$, где $U_{k-j}(\kappa) = \{x \in G \mid \rho(x, \partial\kappa) < 2^{k-j}\}$, $y \in R_{k-j}$ $(k < j)$, $v = \exp^{-1}(y)$, выполняется неравенство

$$\frac{|H_I(y\cdot x) - H_I(x)|}{|y|} \le \frac{|h_{x,I}(v) - h_{x,I}(0)|}{\|v\|} \le C|I|.$$

Далее, мера множества $U_{k-j}(\kappa) \cap R_1$ не превосходит $C\cdot 2^{k-j}$. Действительно, мера μ множества на группе равна мере Лебега координатной записи прообраза этого множества при экспоненциальном отображении. Соответственно $\mu(U_{k-j}(\kappa) \cap R_1)$ не превосходит константы, умноженной на $(n-1)$-мерную меру множества, расположенного на единичной сфере $\mathbb{R}^n$ и содержащего точки, удаленные от гладкой поверхности $\exp^{-1}(\partial U)$ (ранее, не ограничивая общности, мы предполагали гладкость ∂U) на расстояние, не большее чем $\mathrm{const}\cdot 2^{k-j}$. Из конечности $(n-2)$-мерной меры поверхности $\exp^{-1}(\partial U)$ выводим требуемую оценку. Далее, $|H_I(y\cdot x) - H_I(x)| \le 2 \max\limits_{x\in R_1\cup R_{1/2}} |H_I(x)| \le C$ для $y\cdot x \in R_1$, $y \in R_{k-j}$ $(j > k)$.

Кроме того,
$$\left\|K_{jk}^I\right\|_{L_1(\Omega)} \le I_1 + I_2,$$
где
$$I_1 = 2^{(j-k)\nu} \iint\limits_{y\cdot x\in R_1\setminus U_{k-j}(\kappa),\, y\in R_{k-j}} |H_I(y\cdot x) - H_I(x)|\, d\mu(y) d\mu(x)$$
$$\le C2^{(j-k)\nu}|R_1||R_{k-j}|2^{k-j}|I| \le \widetilde{C}2^{k-j}|I|,$$

$$I_2 = 2^{(j-k)\nu} \iint\limits_{y\cdot x\in R_1\cap U_{k-j}(\kappa),\, y\in R_{k-j}} |H_I(y\cdot x) - H_I(x)|\, d\mu(y) d\mu(x)$$
$$\le C2^{(j-k)\nu}|R_1 \cap U_{k-j}(\kappa)||R_{k-j}| \le \widetilde{C}2^{k-j}.$$

В итоге получаем оценку
$$\left\|T_j^I\left(T_k^I\right)^*\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \le \left\|K_{jk}^I\right\|_{L_1(\Omega)} \le C2^{k-j}(1+|I|).$$

Для завершения доказательства неравенства (3) остается только применить лемму 1. Действительно, обозначим
$$J_{I,\delta} f = \int\limits_{G\setminus B(e,\delta)} H_I(z)\bar{f}(z\cdot x)\, d\mu(z).$$

Напомним, что $J_I f = \lim\limits_{\delta\to 0} J_{I,\delta} f$. Применив лемму 1 для последовательности операторов T_k^I, получим равномерную по δ оценку $\|J_{I,\delta}\| \le C\sqrt{1+|I|}$. Отсюда приходим к неравенству (3) при условии, что оператор J_I определен корректно, т. е. для всякой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует предел $J_{I,\delta} f$ в $L_2(\Omega)$ при $\delta \to 0$. Покажем, что из леммы 1 вытекает стремление к нулю L_2-нормы функции $J_{I,\delta_1} f - J_{I,\delta_2} f$ при $\delta_1 \to 0$, $\delta_2 \to 0$ и соответственно существование предела $J_{I,\delta} f$ при $\delta \to 0$. Фиксируем $f \in L_2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$. Покажем, что найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta$ норма в пространстве $L_2(\Omega)$ функции $(J_{I,\delta_1} - J_{I,\delta_2}) f$ будет меньше ε. Приблизим f по норме пространства $L_2(\Omega)$, например, с помощью усреднения гладкой функцией $\tilde{f}$. Воспользовавшись леммой 1, как и выше, получаем равномерную ограниченность по δ норм операторов $J_{I,\delta}$, откуда вытекает, что если L_2-норма разности $f - \tilde{f}$ достаточно мала, то L_2-норма функции $(J_{I,\delta_1} - J_{I,\delta_2})(f - \tilde{f})$ не превосходит $\varepsilon/2$ для всех положительных δ_1, δ_2. Запишем
$$(J_{I,\delta_1} - J_{I,\delta_2})\tilde{f} = \int\limits_{B(e,\delta_2)\setminus B(e,\delta_1)} H_I(z)\bar{\tilde{f}}(z\cdot x)\, d\mu(z).$$

Воспользовавшись условием сокращения, имеем
$$(J_{I,\delta_1} - J_{I,\delta_2})\tilde{f}(x) = \int\limits_{B(e,\delta_2)\setminus B(e,\delta_1)} H_I(z)(\bar{\tilde{f}}(z\cdot x) - \bar{\tilde{f}}(x))\, d\mu(z).$$

В силу гладкости функции $\tilde{f}$ и операции группового умножения мы можем оценить $|\tilde{f}(z\cdot x) - \tilde{f}(x)|$ сверху через произведение евклидовой нормы координатной записи $\exp^{-1}(z)$ на максимум нормы градиента функции $\tilde{f}\circ\exp$. В свою очередь, норму координатной записи $\exp^{-1}(z)$ можно оценить через $|z|$. В результате получаем оценку максимума по области Ω модуля функции $(J_{I,\delta_1} - J_{I,\delta_2})\tilde{f}(x)$ через произведение максимума нормы градиента функции $\tilde{f} \circ \exp$ на интеграл функции $|z|H(z)$ по кольцу $B(e,\delta_2) \setminus B(e,\delta_1)$. Ясно, что выбором достаточно малого δ мы можем добиться того, что при всех $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta$ для зафиксированной функции $\tilde{f}$ L_2-норма функции $(J_{I,\delta_1} - J_{I,\delta_2})\tilde{f}$ будет меньше $\varepsilon/2$. Таким образом, для фиксированной функции f существует предел $J_{I,\delta}f$ при $\delta \to 0$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Доказательство неравенства (3) завершает вытекающая из леммы 1 равномерная по $\varepsilon > 0$ оценка $\frac{\|J_{I,\varepsilon}f\|_{L_2(\Omega)}}{\|f\|_{L_2(\Omega)}} \leq C\sqrt{1+|I|}$.

Перейдем теперь к выводу оценки для нормы оператора T.

Для каждого $\varepsilon > 0$ последовательность частичных сумм $\sum\limits_{|I| \leq N} \lambda_I(x)H_I(z)$ сходится к $K(x,z)$ при $N \to \infty$ равномерно по $x \in \Omega$, $z \in G \setminus B(e,\varepsilon)$. Вспоминая, что

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{G \setminus B(x,\varepsilon)} K(x,z)\bar{f}(z \cdot x)\,dz,$$

получаем

$$\|Tf\|_{L_2} \leq C \sum_I \|\lambda_I\|_{L_2}\|J_I f\|_{L_2} = C \sum_I \sqrt{\int\limits_\Omega \lambda_I^2(x)\,d\mu(x)}\sqrt{1+|I|}\,\|f\|_{L_2}.$$

Отсюда

$$\|T\| \leq C \sum_I \sqrt{1+|I|}\sqrt{\int\limits_\Omega \lambda_I^2(x)\,d\mu(x)}.$$

Как показано выше при доказательстве равномерной сходимости многомерного ряда Фурье, сходимость ряда $\sum\limits_I |a_I|$ следует из сходимости ряда $\sum\limits_I |I|^{2k}|a_I|^2$, где суммирование ведется по всем $(n-1)$-мерным мультииндексам, а число k таково, что $2k > n-1$. В качестве числа k возьмем $n/2$, оно не обязательно должно быть целым. Как было показано, ограниченность T как оператора из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ следует из сходимости ряда

$$\sum_I \sqrt{1+|I|}\sqrt{\int\limits_\Omega \lambda_I^2(x)\,d\mu(x)}.$$

Таким образом, достаточно исследовать сходимость ряда

$$\sum_I (1+|I|)|I|^n \int\limits_\Omega \lambda_I^2(x)\,d\mu(x),$$

которая следует из сходимости ряда

$$\sum_I |I|^{n+1} \int\limits_\Omega \lambda_I^2(x)\,d\mu(x).$$

Для коэффициентов μ_I многомерного ряда Фурье производных $D^J_{\bar{\theta}}\widetilde{K}(x;1,\cdot)$ как функции $\bar{\theta}$ имеем формулу $\mu_I(x) = I^J\lambda_I(x)$. Из равенства Парсеваля вытекает, что для фиксированного x частичные суммы ряда $\sum\limits_I |I|^{n+1}\lambda_I^2(x)$ не превосходят $\big\|\nabla_{\bar\theta}^{[\frac{n}{2}]+1}\widetilde{K}(x;1,\cdot)\big\|^2_{L_2(\Pi)}$. Следовательно,

$$\sum_I |I|^{n+1}\int\limits_\Omega \lambda_I^2(x)\,d\mu(x) \le \int\limits_\Omega \big\|\nabla_{\bar\theta}^{[\frac{n}{2}]+1}\widetilde{K}(x;1,\cdot)\big\|^2_{L_2(\Pi)}\,d\mu(x).$$

Поскольку в наших предположениях $\widetilde{K}(x;1,\cdot) \in C^\infty(\Omega\times\Pi)$ и область $\Omega\times\Pi$ ограничена, имеем оценку

$$\int\limits_\Omega \big\|\nabla_{\bar\theta}^{[\frac{n}{2}]+1}\widetilde{K}(x;1,\cdot)\big\|^2_{L_2(\Pi)}\,d\mu(x) < \infty.$$

Таким образом, ограниченность T как оператора из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ доказана.

Для того чтобы доказать ограниченность T как оператора из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ при $1 < p < 2$, достаточно применить стандартные рассуждения, основанные на интерполяционной теореме Марцинкевича. Ограниченность слабого $(1,1)$ типа этого оператора можно получить, буквально перенося схему рассуждений из работы Стейна [12] на рассматриваемый нами случай.

Фиксируем конечное $q > 2$. Рассмотрим оператор T^*, сопряженный к оператору T. Легко видеть, что ограниченность T как оператора из $L_q(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ будет следовать из ограниченности T^* как оператора из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1<p<2$.

Нетрудно видеть, что если оператор T определен формулой

$$Tf(x) = \int K(x,y)f(y\cdot x)\,d\mu(y),$$

то сопряженный к нему оператор имеет вид

$$T^*f(x) = \int K(y\cdot x, y^{-1})f(y\cdot x)\,d\mu(y). \tag{4}$$

Действительно, выполним в интеграле

$$\int Tf(x)\varphi(x)\,d\mu(x) = \iint K(x,y)f(y\cdot x)\varphi(x)\,d\mu(y)\,d\mu(x)$$

замену переменных $x' = y\cdot x$, $y' = y$, а также переставим порядок интегрирования. В силу инвариантности меры μ относительно левых и правых сдвигов получим выражение

$$\iint K(y'^{-1}\cdot x', y')\varphi(y'^{-1}\cdot x')f(x')\,d\mu(x')\,d\mu(y').$$

Выполним еще одну замену переменных $x = x'$, $y = y'^{-1}$, учитывая, что из формулы Кэмпбэлла — Хаусдорфа следуют равенство $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$ и способ определения меры μ. Напомним, что $\mu(E)$ равна мере Лебега множества $\{v\in\mathbb{R}^n \mid \exp(v_1X_1+v_2X_2+\dots+v_nX_n)\in E\}$, где $X_1,\dots,X_n$ — фиксированный базис алгебры Ли A (см. определения в начале статьи). Имеем

$$\int Tf(x)\varphi(x)\,d\mu(x) = \iint K(y\cdot x, y^{-1})\varphi(y\cdot x)f(x)\,d\mu(x)d\mu(y).$$

Изменив в последнем неравенстве порядок интегрирования, из определения сопряженного оператора выводим (4).

Определим оператор

$$\widetilde{T}f(x) = \int K(x, y^{-1}) f(y \cdot x)\, d\mu(y).$$

Легко видеть, что ядро $\widetilde{K}(x, y) = K(x, y^{-1})$ удовлетворяет условиям (i)–(iii), сформулированным перед теоремой, т. е. T' ограничен как оператор из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ $(1 < p < 2)$. Рассмотрим оператор $T'f = T^*f - \widetilde{T}f$. Имеем

$$T'f(x) = \int (K(y \cdot x, y^{-1}) - K(x, y^{-1})) f(y \cdot x)\, d\mu(y).$$

Обозначим $K'(x, y) = K(y \cdot x, y^{-1}) - K(x, y^{-1})$. Пусть $x \in \Omega$, $y \in S(e, 1)$. Тогда

$$K'(x, \delta_t(y)) = t^{-\nu}(K(\delta_t(y) \cdot x, y^{-1}) - K(x, y^{-1})).$$

Из гладкости функции K на $\Omega \times S(e, 1)$, ограниченности $\Omega \times S(e, 1)$, а также гладкости групповой операции выводим, что

$$|K(\delta_t(y) \cdot x, y^{-1}) - K(x, y^{-1})| \leq C \| \exp^{-1}(\delta_t(y)) \| \leq C |\delta_t(y)| = Ct,$$

где $\|v\|$ — евклидова норма координатной записи $v \in A$ в базисе $X_1, \dots, X_n$, $y \in S(e, 1)$. Отсюда следует, что

$$|K'(x, \delta_t(y))| \leq C t^{-\nu+1}.$$

Таким образом, мы имеем ядро с интегрируемой особенностью, и в силу ограниченности области Ω оператор T' ограничен. Отсюда выводим ограниченность T^* как оператора из $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ для любого $1 < p < 2$ и соответственно T как оператора из $L_q(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ для всех $2 < q < \infty$.

Замечание. Ограниченность области Ω не использовалась существенно при доказательстве ограниченности T как оператора из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Более того, ограниченность и гладкость $K(x, y)$ по переменной x в этом случае могут быть заменены неравенством

$$\int\limits_{\Omega} \|\widetilde{K}(x; 1, \cdot)\|^2_{W^{[\frac{n}{2}]+1,2}(\Pi)}\, d\mu(x) < \infty.$$

Автор выражает благодарность С. К. Водопьянову и Д. В. Исангуловой за многочисленные замечания по работе, а также рецензенту за ряд полезных замечаний и предложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
2. *Михлин С. Г.* Сингулярные интегральные уравнения // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 3. С. 29–112.
3. *Михлин С. Г.* По поводу теоремы об ограниченности оператора сингулярного интегрирования // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 1. С. 213–217.
4. *Knapp A. W., Stein E. M.* Intertwining operators for semi-simple groups // Ann. of Math. 1971. V. 93, N 3. P. 489–578.
5. *Calderon A. P., Zygmund A.* On a problem of Mihlin // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 78, N 1. P. 209–224.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

7. *Романовский Н. Н.* Интегральные представления и теоремы вложения для функций, заданных на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16, № 2. С. 82–120.
8. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1996.
9. *Исангулова Д. В.* Устойчивость в теореме Лиувилля на группах Гейзенберга // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 4. С. 448–454.
10. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; 28).
11. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
12. *Stein E. M.* Harmonic analysis: Real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

Статья поступила 10 июля 2006 г., окончательный вариант — 17 апреля 2007 г.

Романовский Николай Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
nnrom@math.nsc.ru