Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 514.763.22+517.518.15+514.752.8

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ КРИВЫХ В КВАЗИПРОСТРАНСТВАХ КАРНО — КАРАТЕОДОРИ

А. В. Грешнов

Аннотация. На квазипространствах Карно — Каратеодори для достаточно широкого класса абсолютно непрерывных горизонтальных кривых доказано, что почти всюду сходимость горизонтальных координат кривой к некоторому направлению в точке (аналог обычной дифференцируемости) влечет дифференцируемость «всей» кривой в смысле Карно — Каратеодори в той же точке.

Ключевые слова: пространство Карно — Каратеодори, нильпотентная группа, касательный конус, квазиметрика, дифференцируемость, кривая.

Введение

Пусть (M, ρ_{cc}) — пространство Карно — Каратеодори с метрикой Карно — Каратеодори ρ_{cc} и горизонтальным распределением H_1 [1]. Кривая $\gamma(s) \subset M$, $s \in [a, b]$, называется *горизонтальной*, если $\dot{\gamma}(s) \in H_1(\gamma(s))$ для почти всех s. Из классического результата Рашевского — Чжоу вытекает, что любые две точки связного пространства Карно — Каратеодори можно соединить абсолютно непрерывной горизонтальной кривой. Расстояние Карно — Каратеодори $\rho_{cc}(u, v)$ для любых двух точек $u, v \in M$ определяется как точная нижняя грань длин $l(\gamma) = \int\limits_0^{s_0} \langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle^{1/2}\, ds$ всех абсолютно непрерывных горизонтальных кривых $\gamma(s) : [0, s_0] \to M$, соединяющих u и v. Если мы запишем горизонтальную кривую в канонической системе координат, то увидим, что «определяющими» для условий горизонтальности кривой будут первые $\dim H_1$ координат (горизонтальные координаты). В качестве примера рассмотрим одномерную группу Гейзенберга $\mathbb{H}_1$ (см. [2]). «Горизонтальность» кривой $(x(s), y(s), t(s)) \subset \mathbb{H}_1$ выражается дифференциальным тождеством $\dot{t} = 2y\dot{x} - 2x\dot{y}$, т. е. производная третьей координаты выражается полиномиальным образом через предыдущие координаты и производные горизонтальных компонент, которые входят в полиномы линейным образом. Этот же эффект имеет место и на общих группах Карно [3]. В настоящей работе на достаточно общих квазипространствах Карно — Каратеодори [4, 5] мы изучаем дифференциальные свойства абсолютно непрерывных горизонтальных кривых (а также кривых, спрямляемых относительно квазиметрики Карно — Каратеодори), а именно устанавливаем, когда (обычная) дифференцируемость горизонтальных координат в некоторой точке

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00482–а).

влечет дифференцируемость «всей» кривой в той же точке в смысле (квазиметрики) Карно — Каратеодори.

Дифференцируемость отображений «в терминах» метрики Карно — Каратеодори (P-дифференцируемость) впервые введена Пансю в работе [3] на группах Карно. Напомним, что *группой Карно* [3] или *стратифицированной однородной группой* [6] называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой разлагается в прямую сумму векторных пространств $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} V_i$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \dim V_i = N$, таких, что $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m-1$, $[V_1, V_m] = \{0\}$. Следуя [3], кривую $\gamma(s) \subset \mathbb{G}$, $s \in [0, s_0]$, будем называть *P-дифференцируемой в точке* 0, если для кривой $\gamma(s) = \exp(\sigma(s))(\gamma(0))$ существуют пределы $L_i = \lim\limits_{s\to 0} \frac{\sigma_i(s)}{s^j}$, где $\sigma(s) = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)(s)$, $\sum\limits_{k=0}^{j-1} \dim V_k < i \leq \sum\limits_{k=0}^{j} \dim V_k$, $\dim V_0 = 0$. В [3] доказано, что если спрямляемая кривая $\gamma(s) \subset (\mathbb{G}, \rho_{cc})$ параметризована длиной дуги, то $\gamma(s)$ дифференцируема почти всюду; если при этом в 0 кривая $\gamma(s)$ дифференцируема, то для кривой $\sigma(s)$ справедливы равенства $L_i = 0$ для $i > \dim V_1$. Эти тождества получены в [3] напрямую путем исследования соответствующих сумм Римана, которые возникают из условия спрямляемости кривой (так называемые многомерные «заметаемые площади»). Понятие дифференцируемости на общих пространствах Карно — Каратеодори (*cc-дифференцируемость*) впервые появилось в работе Маргулиса и Мостова [7]. Спрямляемая кривая $c(t) \subset (M, \rho_{cc})$, параметризованная длиной дуги, *cc-дифференцируема* [7, 9.4.1] в точке t_0, если $\dot c(t_0) \in H_1(c(t_0))$, и

$$\lim_{s\to 0} \frac{\rho_{cc}(c(t_0+s), \exp(s\dot c(t_0)))}{s} = 0.$$

В нашей работе мы используем другое, но эквивалентное вышеприведенному определение 6.2. С учетом результатов Митчелла [8] в [7] доказано, что спрямляемая кривая $c(t) \subset (M, \rho_{cc})$, $t \in [-1, 1]$, параметризованная длиной дуги, для п. в. t удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\rho_{cc}(c(t-\Delta t), c(t+\Delta t))}{2\Delta t} = 1$$

($[G]$-условие) и в таких точках cc-дифференцируема. В настоящей работе мы доказываем дифференцируемость кривой в точках, удовлетворяющих ограничениям, более слабым по сравнению с $[G]$-условием (теорема 6.4). В теореме 6.5 получены некоторые достаточные для доказательства cc-дифференцируемости условия в терминах вариации горизонтальной части кривой, более «широкие», нежели локальная эквивалентность длины кривой и ее текущего параметра. Полученные утверждения усиливают соответствующие результаты из [7]. Методы нашей работы не используют результаты из [8], они основаны на некоторых свойствах спрямляемых и абсолютно непрерывных горизонтальных кривых касательного конуса (см. свойство 3.2 и предложение 4.1), локальной аппроксимационной теореме для квазиметрик Карно — Каратеодори [5] и возможности построения специальной горизонтальной (в смысле касательного конуса) кривой, «приближающей» горизонтальную кривую квазипространства Карно — Каратеодори (см. теорему 6.3; другим способом существование подобных аппроксимаций также доказывалось в [9]). Как следствие, для групп

Карно мы получаем результаты Пансю, не оценивая «напрямую» многомерные заметаемые площади.

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания и внимательное отношение к работе.

§ 1. Предварительные сведения и обозначения

В настоящей работе мы будем использовать некоторые обозначения, определения и результаты из [4, 5]. Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — открытая ограниченная область, снабженная римановой метрикой ρ. Пусть гладкие векторные поля $X_1, \dots, X_N$ таковы, что векторы $X_1(g), \dots, X_N(g)$ образуют базис касательного пространства T_gU в каждой точке $g \in U$. Каждому векторному полю X_i мы ставим в соответствие натуральное число $\deg X_i$ (степень векторного поля) такое, что

$$[X_i, X_j](g) = \sum_{\deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} C_{(ijk)} X_k(g), \quad g \in U,$$

где $C_{(ijk)}(g)$ — некоторые гладкие функции. Пусть H_i — векторное подрасслоение касательного расслоения, образованное векторными полями X_j, $\deg X_j \leq i$; подрасслоение H_1 назовем *горизонтальным*. Обозначим $M = \max\limits_i \deg X_i$ и в дальнейшем полагаем $X_i \in C^{M+2}$. Символом $B_e^m(a, r)$ обозначается открытый евклидов шар с центром в точке $a \in \mathbb{R}^m$ радиуса r. Отображение

$$\theta_g : (x_1, \dots, x_N) \to \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i X_i\right)(g) = u, \quad \theta_g(0) = \theta_g(0, \dots, 0) = g,$$

является C^{M+2}-гладким диффеоморфизмом некоторого шара $B_e^N(0, \kappa_g)$ на область $O_g = \theta_g\big(B_e^N(0, \kappa_g)\big) \subset U$, где $\kappa_g > 0$ — достаточно малое число; набор чисел $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$ называется *координатами* 1*-го рода* точки u. Символом O обозначается далее некоторая область, для которой выполняется следующее условие: $O \subset O'_g = O'_g = \theta_g\big(B_e^N(0, \kappa)\big)$, $\kappa = \inf\{\kappa_g \mid g \in O\}$, для каждой точки $g \in O$. Из определения области O вытекает, что для любых точек $u, v \in O$ найдется единственное векторное поле $Y = \sum\limits_{i=1}^N y_i X_i$, $y_i = \mathrm{const}$, такое, что $u = \exp Y(v)$. На O определим *риманово квазирасстояние* $d_{\mathrm{riem}}(u, v) = \max\{|y_i| \mid i = 1, \dots, N\}$ и *квазирасстояние Карно — Каратеодори* $d_{cc}(u, v) = \max\{|y_i|^{1/\deg X_i} \mid i = 1, \dots, N\}$; обозначим $\mathrm{Box}_{cc}(g, r) = \{x \in O \mid d_{cc}(g, x) < r\}$.

Определение 1.1. Метрическое пространство (O, d_{cc}) называется *локализованным равномерно регулярным квазипространством Карно — Каратеодори.*

Определение 1.1 квазипространства Карно — Каратеодори отличается от того, которое использовалось автором в работах [4, 5]. Действительно, здесь подрасслоения H_i, $i > 1$, не порождаются всевозможными коммутаторами горизонтальных векторных полей до порядка $i - 1$ включительно; следовательно, мы не можем гарантировать существование в области O метрики Карно — Каратеодори ρ_{cc}. Однако доказательства всех основных результатов работ [4, 5] не используют тот факт, что любые две точки квазипространства можно соединить горизонтальной кривой; таким образом, результаты работ [4, 5] верны и для квазипространств из определения 1.1 настоящей работы. В дальнейшем мы, ссылаясь на те или иные результаты из [4, 5], уже подразумеваем, что они имеют место и в нашей ситуации.

Пусть $\delta_t, \delta_t^e : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $t \geq 0$, обозначают следующие однопараметрические группы растяжений: $\delta_t(x) = (t^{\deg X_i} x_i)_{i=1,\dots,N}$, $\delta_t^e(x) = \big(tx_i\big)_{i=1,\dots,N}$. Также пусть $\Delta_t^g = \theta_g \circ \delta_t \circ \theta_g^{-1}$. Введем обозначение $\widetilde{X}_i = \big(\theta_g^{-1}\big)_* X_i$, $i = 1,\dots,N$. Отметим, что $\big(\theta_g^{-1}\big)_* X_i(g) = (0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0) = e_i$.

Символом $\big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$ далее обозначается *нильпотентный касательный конус в отмеченной точке* $g \in O$ квазипространства (O, d_{cc}) (см. [4, 5]). В нашем случае в связи с отсутствием «стратификации» метрическое квазипространство $\big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$ является всего лишь локальной градуированной группой (а не группой Карно), алгебра Ли V которой удовлетворяет соотношениям $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{M} V_i$, $[V_i, V_j] \subset V_{i+j}$ для $i+j \leq M$, $[V_i, V_j] = 0$ для $i+j > M$, $\dim V_i = \dim H_i - \dim H_{i-1}$. Базис левоинвариантных векторных полей алгебры V образуют векторные поля $\widehat{X}_i^g = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} (\Delta_{1/\varepsilon})_* \varepsilon^{\deg X_i} X_i$, где $\varepsilon^{\deg X_i} X_i$ рассматриваются на некоторой ε-окрестности точки g. Векторные поля $\big\{\widehat{X}_i^g\big\}$ в области определения удовлетворяют следующей «таблице коммутаторов»:

$$\big[\widehat{X}_i^g; \widehat{X}_j^g\big] = \sum_{\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} \widehat{C}_{ijk}^g \widehat{X}_k^g, \quad \widehat{C}_{ijk}^g = C_{ijk}(g) = \text{const};$$

«умножение» элементов $x, y \in \big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$ задается как

$$x \cdot y = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i \widehat{X}_i^g\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \widehat{X}_i^g\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^N z_i \widehat{X}_i^g\right)(g), \tag{1.1}$$

где z_i определяются по формулам (2.4) из [5]; при этом $\exp\left(\sum\limits_{i=1}^N x_i X_i\right)(g) = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N x_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$ [4, 5]. Квазиметрика d_c^g на $\mathscr{O}_g$ определяется при помощи соответствующего отображения $\hat{\theta}_g$ так же, как и d_{cc}. Обозначим $\mathrm{Box}_c^g(u,r) = \big\{x \in \mathscr{O}_g \mid d_c^g(u,x) < r\big\}$, $\widehat{\Delta}_t^g = \hat{\theta}_g \circ \delta_t \circ \hat{\theta}_g^{-1}$, $\widehat{X}_i' = \big(\theta_g^{-1}\big)_* \widehat{X}_i^g$.

Для каждого N-мерного вектора α введем обозначения $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_N) = (\alpha_{(1)},\dots,\alpha_{(M)})$, где $\alpha_{(i)} = (\alpha_{\dim H_{i-1}+1},\dots,\alpha_{\dim H_i})$, $\dim H_0 = 0$. Запись $\alpha = 0$ означает, что все компоненты вектора α равны нулю. Также мы будем использовать следующие обозначения: $|\alpha|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,N} |\alpha_i|$, $|\alpha|_h = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i \deg X_i$, $\alpha X = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i X_i$, $\alpha \widehat{X}^g = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i \widehat{X}_i^g$, $\alpha_{(1)} X = \sum\limits_{i=1}^{\dim H_1} \alpha_i X_i$, $\alpha_{(1)} \widehat{X}^g = \sum\limits_{i=1}^{\dim H_1} \alpha_i \widehat{X}_i^g$.

Для всякого N-мерного мультииндекса α полагаем $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N}$, где $x = (x_1,\dots,x_N)$; также $\mathrm{Pr}_{H_i}(x) = (x_{\dim H_{i-1}+1},\dots,x_{\dim H_i})$. Для положительных функций $a(x)$, $b(x)$, $x \in \mathscr{D}$, запись $a \approx b$ означает, что найдутся константы $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от $x \in \mathscr{D}$, такие, что $c_1 a(x) \leq b(x) \leq c_2 a(x)$. Для произвольного множества A символом $N_\varepsilon(A)$ обозначается его ε-окрестность.

§ 2. Сходимость множеств к направлению

Пусть $A \subset (O, d_{cc})$ — некоторое множество, $g \in A$ — некоторая точка,

$$A(g,s) = A \cap \mathrm{Box}_{cc}(g,s), \quad \widehat{A}(u,s) = A \cap \mathrm{Box}_c^g(u,s),$$

$$I_{[0,t]}^{\alpha X}(g) = \bigcup_{s\in[0,t]} \exp\biggl(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i s^{\deg X_i} X_i\biggr)(g),$$

$$I_{[0,t]}^{\alpha \widehat{X}^g}(g) = \bigcup_{s\in[0,t]} \exp\biggl(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i s^{\deg X_i} \widehat{X}_i^g\biggr)(g).$$

Определение 2.1. Множество $A \subset (O, d_{cc})$ *сходится к направлению* $\alpha\widehat{X}^g$ в точке $g \in A$, если для любой последовательности $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ найдется последовательность $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ такая, что $\Delta^g_{1/s_n}(A(g, s_n)) \subset N_{\varepsilon_n}\bigl(I_{[0,1]}^{\alpha\widehat{X}^g}(g)\bigr)$.

Свойство 2.1. *Соотношение*

$$A(g,s) \subset \bigcup_{s'\in[0,s]} \mathrm{Box}_{cc}\bigl(\Delta^g_{s'}(\exp(\alpha X)(g)), o(s)\bigr), \quad s \to 0,$$

эквивалентно сходимости из определения 2.1.

Доказательство. Свойство 2.1 получается (путем рассуждения «от противного») несложным применением предложения 2.2, следствия 3.2 и свойства 2.2 из [5].

Свойство 2.2. *Рассмотрим множество* $A \subset \bigl(\mathscr{O}_g, d_c^g\bigr)$, $g \in A$. *Множество* A *сходится к направлению* $\alpha\widehat{X}^g$ *в точке* g *тогда и только тогда, когда для точек* $u^s \in \hat{\theta}_g^{-1}(\widehat{A}(g,s))$, *где* s *достаточно мало, выполняются оценки* $u_i^s = \alpha_i s^{\deg X_i} + o(s^{\deg X_i})$, *где* $\bigl(u_1^s, \dots, u_N^s\bigr) = u^s$.

Доказательство. Свойство 2.2 вытекает из свойства 2.1 и следствия 4.1 из [5].

Замечание 2.1. Сходимость множества $A \subset \bigl(\mathscr{O}_g, d_c^g\bigr)$ в точке $v \in A$, $v \neq g$, к направлению $\alpha\widehat{X}^g$ означает, что для любой последовательности $s_n \to 0$ найдется последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такая, что

$$\widehat{\Delta}^{g,v}_{1/s_n}(\widehat{A}(v,s_n)) \subset N_{\varepsilon_n}\biggl(\bigcup_{s\in[0,1]} \widehat{\Delta}^{g,v}_s(\exp(\alpha\widehat{X}^g)(v))\biggr),$$

$$\widehat{\Delta}^{g,v}_t = \hat{\theta}_{g,v} \circ \delta_t \circ \hat{\theta}^{-1}_{g,v}, \quad \hat{\theta}_{g,v} : (x_1, \dots, x_N) \to \exp\biggl(\sum_{i=1}^{N} \widehat{X}_i^g x_i\biggr)(v).$$

Из предложения 2.3 из [5] вытекает, что такая сходимость эквивалентна сходимости (в смысле определения 2.1) множества $\bigl\{u' \in \bigl(\mathscr{O}_g, d_c^g\bigr) \mid u' = v^{-1}\cdot u,\ u \in A\bigr\}$ к направлению $\alpha\widehat{X}^g$ в точке g.

Свойство 2.3. *Множество* $A \subset (O, d_{cc})$, $g \in A$, *сходится к направлению* $\alpha\widehat{X}^g$ *в точке* g *тогда и только тогда, когда для точек* $u^s \in \theta_g^{-1}(A(g,s))$, *где* s *достаточно мало, выполняются оценки* $u_i^s = \alpha_i s^{\deg X_i} + o(s^{\deg X_i})$, $\bigl(u_1^s, \dots, u_N^s\bigr) = u^s$.

Доказательство. Свойство 2.3 вытекает из свойств 2.1, 2.2 и [5, предложение 2.2, следствие 3.2].

Свойство 2.4. *Для множества $A \subset (O, d_{cc})$, $g \in A$, рассмотрим вложенные друг в друга ограниченные множества $A \supset A_1 \supset \dots \supset A_k \supset \dots$, $g \in A_k$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = g$. Определение 2.1 эквивалентно тому, что для любой такой последовательности стягивающихся к g множеств $\{A_k\}$ найдется последовательность чисел $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ такая, что $\Delta^g_{1/r_{A_n}}(A_n) \subset N_{\varepsilon_n}\big(I^{\alpha\widehat{X}^g}_{[0,1]}(g)\big)$, $r_{A_n} = \sup\{d_{cc}(g,u) \mid u \in A_n\}$.*

Доказательство. Свойство 2.4 в обе стороны несложно доказывается путем рассуждения «от противного».

§ 3. Горизонтальные и *cc*-спрямляемые кривые

Конечную последовательность чисел $J_n = \{s_1, \dots, s_n\}$ такую, что $0 \le s_1 < \dots < s_n \le s_0$, будем называть *$n$-разбиением на промежутке* $[0, s_0]$. Рассмотрим кривую $\gamma(s) \subset O$, $s \in [0, s_0]$. Каждому n-разбиению сопоставим число

$$v(\gamma, J_n) = \sum_{i=1}^{n} d_{cc}(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})).$$

Точную верхнюю границу сумм $v(\gamma, J_n)$ на совокупности всех разбиений отрезка $[0, s_0]$ назовем *cc-квазивариацией* (*cc-квазидлиной*) кривой $\gamma(s)$ на промежутке $[0, s_0]$ и обозначим символом $l_{d_{cc}}(\gamma)$. Будем говорить, что параметризованная кривая $\gamma(s)$ *cc-спрямляема*, если ее *cc*-квазивариация конечна. Символ $l(\gamma) = \bigvee\limits_{0}^{s_0} \gamma(s)$ будем использовать для обозначения обычной вариации $\gamma(s)$.

Кривая $\gamma(s) : [0, s_0] \to (O, d_{cc})$, $\gamma(s) = \theta_g(x(s)) = \theta_g((x_1, \dots, x_N)(s))$, *горизонтальна*, если для почти всех $s \in [0, s_0]$ выполняется

$$\dot\gamma(s) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \alpha_i(s) X_i(s) \Longleftrightarrow \dot x(s) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \alpha_i(s) \widetilde{X}_i(s). \tag{3.1}$$

Если $\gamma \subset \big(\mathscr{O}_g, d^g_c\big)$, то из тождеств (3.1) и [5, (2.3)] вытекает, что $\alpha(s) = \dot x_i(s)$.

Свойство 3.1. *Пусть кривая $\gamma = \gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, cc-спрямляема. Тогда* 1) *γ спрямляема относительно римановой метрики ρ,* 2) *γ горизонтальна.*

Доказательство. 1. Очевидно, имеем $d_{\mathrm{riem}} \approx \rho$ на O. Следовательно, $c^{-1}\rho(u,v) \le d_{\mathrm{riem}}(u,v) \le d_{cc}(u,v) \le d_{\mathrm{riem}}(u,v)^{1/M}$ для некоторой константы $c > 0$, не зависящей от выбора $u, v \in O$. Отсюда вытекает п. 1 свойства 3.1.

2. Из п. 1 свойства 3.1 следует, что кривая γ дифференцируема п. в. в обычном смысле, т. е. существует производная $\frac{d\gamma(s)}{ds}$ для п. в. $s \in [0, s_0]$. Предположим, что существует множество положительной меры $T \in [0, s_0]$ такое, что производная $\dot\gamma(s)$ существует, но при этом $\dot\gamma(s) \notin H_1(\gamma(s))$, $s \in T$. Пользуясь критерием измеримости, определим измеримое множество $T_\lambda \subset T$, $|T_\lambda| > 0$, такое, что

$$T_\lambda = \big\{ s \in T \mid \big(\theta^{-1}_{\gamma(s)}\big)_* \dot\gamma(s) = (\beta_{1,s}, \dots \beta_{N,s}), |(\beta_{\dim H_1 + 1, s}, \dots, \beta_{N,s})|_\infty > \lambda > 0 \big\}.$$

Не уменьшая общности, можем считать, что множество T_λ компактно. Пусть $\sigma^s(\tau) = \big(\sigma^s_1(\tau), \dots, \sigma^s_N(\tau)\big) = \theta^{-1}_{\gamma(s)}(\gamma(s+\tau))$, $\sigma^s(0) = 0$. Определим измеримое множество

$$K_n = \{ s \in T_\lambda \mid |\sigma^s_i(\tau)/\tau - \beta_{i,s}| < \varepsilon,\ i > \dim H_1,\ \tau \le s_0/2^n \},$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое достаточно малое число. Отметим, что $\bigcup\limits_n K_n = T_\lambda$, $K_n \subseteq K_{n+1}$, поэтому найдется номер n такой, что $|T_\lambda \setminus K_n| < \zeta$ для любого малого $\zeta > 0$. Не уменьшая общности, можем считать, что множество K_n компактно. Пусть разбиение J_n отрезка $[0, s_0]$ удовлетворяет условию: $|s_i - s_{i-1}| = s_0/2^n$ для всех i. Обозначим через $\{I_j^n\}$ совокупность отрезков $\{[s_i, s_{i+1}]\}$ таких, что $[s_i, s_{i+1}] \cap K_n \neq \varnothing$, а через k_n — их количество. Так как K_n имеет положительную меру, то $k_n \frac{s_0}{2^n} \geq |K_n|$, что равносильно $k_n \geq \frac{2^n |K_n|}{s_0}$. Для каждого I_j^n выберем точку $y_j^n \in I_j^n \cap K_n$. Пусть $z_{j,1}^n$, $z_{j,2}^n$ — концевые точки отрезка I_j^n. Тогда

$$\sum_j \max_{l=1,2} d_{cc}\big(\gamma\big(y_j^n\big), \gamma\big(z_{j,l}^n\big)\big) \geq \mathrm{const} \cdot \left(\frac{\lambda + O(\varepsilon)}{2^n}\right)^{1/2} k_n \geq \mathrm{const} \cdot 2^{n/2} \to \infty,$$

что противоречит cc-спрямляемости кривой γ. П. 2 свойства 3.1 доказан.

Замечание 3.1. Если кривая $\gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, спрямляема в обычном смысле и горизонтальна, то это еще не гарантирует ее cc-спрямляемость. В качестве примера рассмотрим кривую $\gamma(s) \subset \big(\mathbb{H}_1, d_c^g\big)$, $s \in [0,1]$, $\gamma(s) = (s, 0, \varphi(s))$, где $\varphi(s)$ — канторова лестница (см. [10]). По построению γ имеет ограниченную обычную вариацию и $\dot{\gamma}(s) = (1,0,0) \in H_1(\gamma(s))$ для почти всех $s \in [0,1]$. Однако кривая $\gamma(s)$ даже локально не cc-спрямляема (см. свойство 3.2). Автор выражает признательность рецензенту за идею построения данного примера.

Рассмотрим cc-спрямляемую кривую $\gamma = \gamma(s) \subset \big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$, $s \in [0, s_0]$. Пусть $x_{(1)}(s) = \mathrm{Pr}_{H_1}\big(\hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s))\big)$. Рассмотрим произвольное n-разбиение интервала $[0, s_0]$. Используя определение квазиметрики d_c^g и [5, (2.4)], получаем

$$\sum_{j=1}^{n-1} |x_{(1)}(s_j) - x_{(1)}(s_{j+1})| \leq \mathrm{const} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} d_c^g(\gamma(s_j), \gamma(s_{j+1})) \leq l_{d_c^g}(\gamma),$$

поэтому кривая $x_{(1)}(s)$ имеет ограниченную вариацию. Учитывая свойства 2.1, 2.2 из [5], получаем, что для любого $\tau > 0$ кривая $\widehat{\Delta}_\tau^g \gamma$ горизонтальна и $l_{d_c^g}(\widehat{\Delta}_\tau^g \gamma) = \tau l_{d_c^g}(\gamma)$.

Свойство 3.2. *Для всякого вектора $\alpha_{(1)}$ существует единственная cc-спрямляемая кривая $\gamma = \gamma(s) \subset \big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, такая, что множество $\mathrm{Pr}_{H_1}\big(\hat{\theta}_g^{-1}(\gamma)\big)$ совпадает с множеством $\bigcup\limits_{t \in [0,1]} t\alpha_{(1)}$, и $\gamma(s) = \exp(f(s) \cdot \alpha_{(1)} \widehat{X}^g)(g)$, где $f : [0, s_0] \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $\sup\limits_{s \in [0, s_0]} f(s) = 1$, — некоторая непрерывная функция.*

Доказательство. Покажем, что не существует cc-спрямляемой кривой, удовлетворяющей условиям свойства 3.2 и отличной от $\exp\left(f(s) \sum\limits_{i=1}^{\dim H_1} \alpha_i \widehat{X}_i^g\right)(g)$. Предположим, что такая кривая есть. Обозначим $\hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s)) = x(s) = (x_1(s), \ldots, x_N(s))$. Пусть найдутся некоторые $k \in \{\dim H_1 + 1, \ldots, \dim H_2\}$ и $t \in [0, s_0]$ такие, что $x_k(t) \neq 0$. Для определенности пусть $x_k(t) > 0$. В силу непрерывности γ найдется интервал $[t_1, t_2]$ такой, что $x_k|_{(t_1,t_2)} > 0$. Мы можем полагать, не уменьшая общности, что $t_1 = 0$ и $x_k(t) = \sup\limits_{s \in [0, t_2]} x_k(s)$. Рассмотрим такое n-разбиение отрезка $[0, t]$, что $x_k(s_{j+1}) > x_k(s_j)$, $x_k(s_j) - x_k(s_{j-1}) = a_n = \mathrm{const}$,

$x_k(s_1)=0$, $x_k(s_n)=x_k(t)$; при этом $(n-1)a_n=x_k(t)$. Тогда, используя определение квазиметрики d_c^g и формулы [5, (2.4)], получаем

$$\sum_{j=1}^{n-1} d_c^g(\gamma(s_{j+1}),\gamma(s_j)) \geq \mathrm{const}\cdot(n-1)(a_n)^{1/2}=\mathrm{const}\cdot\frac{x_k(t)}{a_n^{1/2}} \underset{a_n\to 0}{\longrightarrow} \infty. \tag{3.2}$$

Соотношение (3.2) противоречит cc-спрямляемости кривой γ, поэтому $x_k(t)=0$ для любых $k\in\{\dim H_1+1,\dots,\dim H_2\}$ и $t\leq s_0$. Далее, используя $x_k(s)|_{[0,s_0]}\equiv 0$, где $k\in\{\dim H_1+1,\dots,\dim H_2\}$, точно так же можно доказать, что $x_k(s)|_{[0,s_0]}\equiv 0$ для $k\in\{\dim H_2+1,\dots,\dim H_3\}$, и т. д. Свойство 3.2 доказано.

Свойство 3.3. *Не существует cc-спрямляемой кривой $\gamma=\gamma(s)\subset\left(\mathscr{O}_g,d_c^g\right)$, $s\in[0,s_0]$, $\gamma(0)=g$, такой, что $\mathrm{Pr}_{H_1}\left(\theta_g^{-1}(\gamma)\right)=0$.*

§ 4. Абсолютно непрерывные горизонтальные кривые

Определение 4.1. Кривая $\gamma(s)\subset O$, $s\in[0,s_0]$, называется *абсолютно непрерывной*, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любой конечной системы попарно не пересекающихся интервалов (a_k,b_k), $k=1,\dots,n$, содержащихся в $[0,s_0]$, такой, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$, выполняется $\sum\limits_{k=1}^{n} d_{\mathrm{riem}}(\gamma(a_k),\gamma(b_k))<\varepsilon$. Заменяя в последнем неравенстве d_{riem} на d_{cc}, получаем определение *cc-абсолютно непрерывной кривой*.

Замечание 4.1. Пусть $\gamma(s)=\theta_g(x(s))$, $x(s)=(x_1(s),\dots,x_N(s))$. Поскольку для любого $g\in O$ отображение θ_g является диффеоморфизмом, абсолютная непрерывность кривой γ эквивалентна тому, что каждая кривая $x_i(s)$ является абсолютно непрерывной. Из определений квазиметрик d_{riem}, d_{cc} и свойства 3.1 вытекает, что любая cc-абсолютно непрерывная горизонтальная кривая будет абсолютно непрерывной в обычном смысле.

Предложение 4.1. *Для каждого вектора $\alpha_{(1)}$ существует единственная абсолютно непрерывная горизонтальная кривая $\gamma(s)\subset\left(\mathscr{O}_g,d_c^g\right)$, $s\in[0,s_0]$, $\gamma(0)=g$, такая, что $\mathrm{Pr}_{H_1}\,\hat\theta_g^{-1}(\gamma(s))=\alpha_{(1)}s$; при этом $\gamma(s)=\exp(s\alpha_{(1)}\widehat{X}^g)(g)$.*

Доказательство. Пусть $x(s)=(x_1(s),\dots,x_N(s))=\hat\theta_g^{-1}(\gamma(s))$, $x(0)=0$. Используя (3.1) и [5, (2.3)], для п. в. s имеем

$$\dot x_j(s)=\sum_{i=1}^{\dim H_1}\dot x_i(s)\sum_{\substack{\omega\geq 0,\\ |\omega|_h=\deg X_j-1}}\widehat{F}^{g,j}_{\omega,e_i}x^{\omega}(s),\quad j>\dim H_1. \tag{4.1}$$

Из (4.1) вытекает, что

$$\dot x_j(s)=\sum_{|e_m|_h\cdot|e_l|_h=1}\widehat{F}^{g,j}_{e_l,e_m}(\alpha_l x_m-\alpha_m x_l)=0$$

для $\deg X_j=2$, откуда, учитывая начальные условия $x(0)=0$, получаем $x_j(s)=0$ для $\dim H_1<j\leq\dim H_2$. Предположим, что

$$x_j(s)=0,\quad \dim H_1<j\leq\dim H_t,\quad t<M. \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1), используя [4, (3.20); 5, (2.3), (2.4)], для $\dim H_t < j \le \dim H_{t+1}$ получаем

$$\dot{x}_j(s) = \sum_{\substack{\omega\ge 0, |e_m|_h\cdot|e_l|_h=1,\\ |\omega|_h=\deg X_j-2}} \widehat{G}^{g,j}_{\omega,0,l,m} x^{\omega}(\alpha_l x_m - \alpha_m x_l) = 0,$$

откуда, учитывая начальные условия $x(0) = 0$, вытекает $x_j(s) = 0$ (см. также доказательство предложения 3.2 из [4]). Предложение 4.1 доказано.

Предложение 4.2. *Пусть $\gamma(s) \subset \left(\mathscr{O}_g, d_c^g\right)$, $s \in [0, s_0]$, — абсолютно непрерывная горизонтальная кривая, $\gamma(0) = g$, $x(s) = \hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s))$, $\mathrm{Pr}_{H_1} x(s) = x_{(1)}(s)$. Тогда для каждого $s \in [0, s_0]$ выполняются оценки*

$$|x_i(s)| \le \mathrm{const}\cdot \widehat{C}_s \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{\deg X_i - 1}, \quad \deg X_i > 1, \quad \widehat{C}_s = \|x_{(1)}\|_{C[0,s]}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Имеем $|x_j(s)| \le \widehat{C}_s$ для $\deg X_j = 1$. Из (3.1) вытекает, что

$$x_j(s) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \sum_{\substack{\omega\ge 0,\\ |\omega|_h=\deg X_j-1}} \widehat{F}^{g,j}_{\omega,e_i} \int_0^s x^{\omega}\, dx_i. \tag{4.4}$$

Используя свойства интеграла Стилтьеса (см., например, [11]), для $\deg X_j = 2$ получаем

$$|x_j(s)| = \left| \sum_{i=1}^{\dim H_1} \sum_{\omega>0, |\omega_k|_h=1} \widehat{F}^{g,j}_{\omega,e_i} \int_0^s x^{\omega}\, dx_i \right| \le \mathrm{const}\cdot \widehat{C}_s \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right).$$

Предположим, что оценки (4.3) доказаны для $\deg X_i = 1, \dots, k-1 < M$. Из (4.4) вытекает, что

$$x_j(s) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \sum_{\omega\ge 0, |\omega|_h=k-1} \widehat{F}^{g,j}_{\omega,e_i} \int_0^s x^{\omega}\, dx_i, \quad \deg X_j = k. \tag{4.5}$$

Применяя индукционное предположение, для каждого мультииндекса ω из (4.5) выводим, что

$$\left|\int_0^s x^{\omega}\, dx_i\right| \le \mathrm{const}\cdot \widehat{C}_s^{|\omega|} \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{k-1-|\omega|} \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right) = \mathrm{const}\cdot \widehat{C}_s^{|\omega|} \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{k-|\omega|}.$$

Заметим, что $\min\{|\omega| \mid |\omega|_h = \deg X_i - 1\} = 1$, а из определения вариации имеем $\widehat{C}_s \le \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)$. Поскольку количество мультииндексов ω в (4.5) ограничено для каждого $k \le M$, оценки (4.3) для $i = k$ доказаны.

Следствие 4.1. *Пусть кривая $x_{(1)}(s)$, $s \in [0, s_0]$, $x_{(1)}(0) = 0$, абсолютно непрерывна. Тогда существует единственная абсолютно непрерывная горизонтальная кривая $\gamma(s) \subset \left(\mathscr{O}_g, d_c^g\right)$, $\gamma(0) = g$, такая, что $\mathrm{Pr}_{H_1} \hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s)) = x_{(1)}(s)$.*

Доказательство. Пусть $\hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s)) = x(s)$. Тогда с учетом (3.1) кривая $x(s)$ однозначно определяется посредством соотношений (4.4); при этом сходимость интегралов в (4.5) обеспечивается оценками (4.3). Таким образом, $\gamma(s) = \hat{\theta}_g(x(s))$.

Следствие 4.2. *Пусть кривая* $u_{(1)}(s) = x_{(1)}(s) + b_{(1)}$, $s \in [0, s_0]$, $x_{(1)}(0) = 0$, *абсолютно непрерывна. Тогда для всякой точки* $\hat{b} = \hat{\theta}_g(b_{(1)}, \dots, b_{(M)}) \in \mathrm{Box}_c^g(g, \varepsilon)$ *существует единственная абсолютно непрерывная горизонтальная кривая* $\hat{\gamma}(s) \subset \left(\mathscr{O}_g, d_c^g\right)$ *такая, что* $\hat{\gamma}(0) = \hat{b}$, $\mathrm{Pr}_{H_1} \hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s)) = u_{(1)}(s)$; *при этом для кривой* $\hat{\theta}_g^{-1}(\hat{\gamma}(s)) = (u_1(s), \dots, u_N(s))$ *выполняются оценки*

$$
\begin{aligned}
&|u_i(s)| \le |b_i| + \widehat{C}_s, \quad \deg X_i = 1, \\
&|u_i(s)| \le |b_i| + \mathrm{const} \cdot \widehat{C}_s \left(\bigvee_0^s x_{(1)} \right)^{\deg X_i - 1} \\
&\qquad + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i > 1, \\ \alpha > 0, \beta > 0}} \mathrm{const} \cdot \widehat{C}_s^{|\alpha|} \left(\bigvee_0^s x_{(1)} \right)^{|\alpha - \alpha_{(1)}|_h - |\alpha - \alpha_{(1)}|} b^\beta, \quad \deg X_i > 1.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Доказательство. Используя «групповые» свойства пространства $\left(\mathscr{O}_g, d_c^g\right)$ и формулы [5, (2.4)], получаем, что

$$
\begin{aligned}
&u_i(s) = b_i + x_i(s), \quad \deg X_i = 1, \\
&u_i(s) = b_i + x_i(s) + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = k, \\ \alpha > 0, \beta > 0}} \widehat{F}_{\alpha,\beta}^{g,i} x^\alpha(s) b^\beta, \quad \deg X_i = k,
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

где кривая $x(s) = (x_1, \dots, x_N)(s)$ из следствия 4.1. Тогда следствие 4.2 вытекает из (4.7) и предложения 4.2.

Замечание 4.2. Пусть горизонтальная кривая $\gamma(s) \subset \left(\mathscr{O}_g, d_c^g\right)$, $s \in [0, s_0]$, абсолютно непрерывна. Тогда из (3.1), координатной записи горизонтальных векторных полей [5, (2.3)] и известных фактов геометрической теории меры (см. [12, гл. 2]) вытекает, что

$$
l(\gamma) = \int_0^{s_0} |\dot{x}_{(1)}(s)| = \bigvee_0^{s_0} x_{(1)}.
$$

Учитывая свойство 2.1 из [5], получаем $l(\widehat{\Delta}_\tau^g \gamma) = \tau l(\gamma)$, $\tau > 0$.

Рассмотрим абсолютно непрерывные кривые $\gamma^n = \gamma^n(s)$, $\gamma = \gamma(s) \subset \left(\mathscr{O}_g, d_c^g\right)$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$. Обозначим $x^n(s) = \hat{\theta}_g^{-1}(\gamma^n(s))$, $x(s) = \hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s))$,

$$
\begin{gathered}
\Pr_{H_1} \hat{\theta}_g^{-1}(\gamma^n(s) = x_{(1)}^n(s), \quad \Pr_{H_1} \hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s)) = x_{(1)}(s), \\
\epsilon^n(s) = x_{(1)}^n(s) - x_{(1)}^n(0) - x_{(1)}(s) = (\epsilon_1^n(s), \dots, \epsilon_{\dim H_1}^n(s)).
\end{gathered}
$$

Предложение 4.3. *Предположим, что для кривых* $\gamma^n(s)$, $\gamma(s)$, *введенных выше,* $\|\epsilon^n(s)\|_{C[0,s_0]} \to 0$, $\gamma^n(0) \to g$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для некоторой константы* c

$$
d_c^g(\gamma^n(s), \gamma(s)) \le c \max\left\{ d_c^g(g, \gamma^n(0)), \|\epsilon^n\|_{C[0,s_0]} \right\}^{\frac{1}{M}} \left(\max\left\{ \bigvee_0^s x_{(1)}, \bigvee_0^s x_{(1)}^n \right\} \right)^{\frac{M-1}{M}}.
$$

Доказательство. Пусть $x^n(0) = \big(\varepsilon_n\alpha_1^n, \dots, \varepsilon_n^{\deg X_N}\alpha_N^n\big)$, $|\alpha^n|_\infty = 1$. Заметим, что кривая $\epsilon_{(1)}^n(s)$ абсолютно непрерывна, и $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Используя (4.4), для $\deg X_j = 2$ можем записать

$$x_j^n(s) - x_j^n(0) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \sum_{\deg X_k = 1} \widehat{F}^{g,j}_{e_k,e_i} \int_0^s \big(x_k^n(0) + x_k + \epsilon_k^n\big)\, d\big(x_i + \epsilon_i^n\big)$$
$$= x_j(s) + \sum_{i=1}^{\dim H_1} \sum_{\deg X_k = 1} \widehat{F}^{g,j}_{e_k,e_i} \left(\int_0^s x_k\, d(\epsilon_i^n) + \int_0^s \big(x_k^n(0) + \epsilon_k^n\big)\, d\big(x_i^n\big) \right).$$

Пусть $\epsilon_s = \max\{\varepsilon_n, \|\epsilon^n\|_{C[0,s]}\}$, $\phi_s = \max\left\{\bigvee_0^s x_{(1)}, \bigvee_0^s x_{(1)}^n\right\}$. Тогда

$$\left|\int_0^s \big(x_k^n(0) + \epsilon_k^n\big)\, d\big(x_i^n\big)\right| \le 2\epsilon_s\phi_s, \qquad \left|\int_0^s x_k\, d\epsilon_i^n\right| = \left| x_k\epsilon_i^n\Big|_0^s - \int_0^s \epsilon_i^n\, dx_k\right| \le 2\epsilon_s\phi_s.$$

Если ε_n достаточно мало, то $\varepsilon_n < \phi_s$, поэтому $x_j^n(0) + c_1\epsilon_s\phi_s = \alpha_j^n\varepsilon_n^2 + c_1\epsilon_s\phi_s = c_2\epsilon_s\phi_s$, $c_1, c_2 = \mathrm{const}$, для $\deg X_j = 2$. Таким образом, для $\deg X_j = 2$ получили $x_j^n(s) = x_j(s) + \varphi_j^s$, $\varphi_j^s = O(\epsilon_s\phi_s)$. Пусть в случае $\deg X_j \le m-1$ доказано, что

$$x_j^n(s) = x_j(s) + \varphi_j^s, \quad \varphi_j^s = O\big(\epsilon_s\phi_s^{\deg X_j - 1}\big). \tag{4.8}$$

Обозначим $\varphi_{m-1} = \big(\varphi_1^s, \dots, \varphi^s_{\dim H_{m-1}}\big)$. Тогда, используя (4.4), (4.8) и билинейность скобки Пуассона, для всех j таких, что $\deg X_j = m$, имеем

$$x_j^n(s) - x_j^n(0) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \sum_{|\omega|_h = m-1} \widehat{F}^{g,j}_{\omega,e_i} \int_0^s (x^n)^\omega\, d\big(x_i + \epsilon_i^n\big) = x_j(s)$$
$$+ \sum_{i=1}^{\dim H_1} \sum_{\substack{\omega_1 \ge 0, \omega_2 > 0,\\ |\omega_1+\omega_2|_h = m-1}} C^i_{\omega_1,\omega_2} \int_0^s x^{\omega_1}\varphi_{m-1}^{\omega_2}\, d\big(x_i^n\big) + \sum_{i=1}^{\dim H_1} \sum_{|\omega|_h = m-1} \widehat{F}^{g,j}_{\omega,e_i} \int_0^s x^\omega\, d\big(\epsilon_i^n\big)$$
$$= x_j(s) + S_1 + S_2, \quad C^i_{\omega_1,\omega_2} = \mathrm{const}.$$

Для каждого выражения $\int\limits_0^s x^\omega\, d\big(\epsilon_i^n\big)$ из S_2 можно записать

$$\int_0^s x^\omega\, d\big(\epsilon_i^n\big) = x^\omega\epsilon_i^n\Big|_0^s - \int_0^s \epsilon_i^n\, d(x^\omega), \quad d(x^\omega) = \sum_{i=1}^{\dim H_{m-1}} \omega_i x^{\omega - e_i} d(x_i),$$

откуда, используя (4.3), получаем $|S_2| \le \mathrm{const}\cdot\epsilon_s\phi_s^{m-1}$. С другой стороны, поскольку суммирование в S_1 происходит при условии, что $\omega_2 > 0$, то (4.3) влечет $|S_1| \le \mathrm{const}\cdot\epsilon_s\phi_s^{m-1}$. Таким образом, соотношения (4.8) для $\deg X_j = m$ доказаны. Используя формулы [5, (2.4)], (4.3), (4.8), для каждого $i = 1, \dots, N$ получаем

$$|z_i(x + \varphi_M, -x)| = \left|\varphi_i^s + \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h = \deg X_i,\\ \alpha > 0, \beta > 0}} \widehat{F}^{g,i}_{\alpha,\beta}(-x)^\alpha \cdot (\varphi_M + x)^\beta\right| \le \mathrm{const}\cdot\epsilon_s\phi_s^{\deg X_i - 1}. \tag{4.9}$$

Предложение 4.3 следует из оценок (4.9).

§ 5. Спрямляемость и сходимость к направлению горизонтальных кривых

Определение 5.1. Пусть $\gamma(s) \subset O$, $s \in [0, s_0]$, — спрямляемая кривая. Кривая γ *cc-спрямляема по хорде справа* в точке $s \in [0, s_0)$, если

$$\overline{\lim_{\tau\to+0}} \frac{l(\gamma|_{[s,s+\tau]})}{d_{cc}(\gamma(s), \gamma(s+\tau))} < \infty.$$

Обозначение 5.1. Для всякой кривой $\gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, введем обозначение $m_{\gamma,[s,\tau]} = \sup\limits_{s'\in[s,\tau]} d_{cc}(\gamma(s), \gamma(s'))$. В случае $s = 0$ будем использовать обозначение $m_{\gamma,\tau}$ вместо $m_{\gamma,[0,\tau]}$. Для произвольных точек $a, b \in \gamma$ символом $\gamma_{a,b}$ далее обозначаем участок кривой γ от a до b.

Определение 5.2. Пусть $\gamma(s) \subset O$, $s \in [0, s_0]$, — спрямляемая кривая. Кривая γ *m-спрямляема справа* в точке $s \in [0, s_0)$, если $\overline{\lim\limits_{\tau\to+0}} \frac{l(\gamma|_{[s,s+\tau]})}{m_{\gamma,[s,\tau]}} < \infty$.

Определение 5.3. Кривая $\gamma = \gamma(s) \subset O$, $s \in [0, s_0]$, удовлетворяет *cc-условию Липшица в точке* $s' \in [0, s_0]$, если $d_{cc}(\gamma(s'), \gamma(s)) \le L|s' - s|$ для каждого $s \in [0, s_0]$. Кривая γ *cc-липшицева*, если она удовлетворяет условию Липшица в каждой точке $s' \in [0, s_0]$ и константа L не зависит от выбора s'.

Определение 5.4. Спрямляемая кривая $\gamma(s) \subset O$, $s \in [0, s_0]$, в точке $s \in [0, s_0)$ *спрямляема по параметру справа*, если существует предел

$$\overline{\lim_{\tau\to+0}} \frac{l(\gamma|_{[s,s+\tau]})}{\tau} < \infty.$$

Соглашение 5.1. В дальнейшем, употребляя выражение «в обычном смысле», имеем в виду, что те или иные понятия рассматриваются с точки зрения обычной евклидовой метрики соответствующего евклидова пространства.

Лемма 5.1. *Рассмотрим некоторую кривую $x(s) \subset (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $s \in [0, s_0]$, $x(0) = 0$, дифференцируемую в начале координат. Пусть $|\dot{x}(0)| \in \mathbb{R}_+^*$. Тогда $m_{x,s} \approx s$ для всех достаточно малых s (здесь величина $m_{x,s}$ определяется в обычном смысле).*

Доказательство. Обозначим $\dot{x}(0) = \alpha$. Очевидно, имеем $|x(s)| \approx s$ для всех достаточно малых s. Покажем, что $m_{x,s} \approx |x(s)|$. Действительно, так как $m_{x,s}$ — монотонная и непрерывная по переменной s функция, $m_{x,0} = 0$, то для каждого s' найдется такое число $s \ge s'$, что $m_{x,s'} = |x(s)|$. Данное равенство в силу дифференцируемости $x(s)$ в 0 эквивалентно $\hat{s}|\alpha + \hat{f}(\hat{s})| = s|\alpha + f(s)|$, где $\hat{f}(\hat{s}) = o(1)$, $f(s) = o(1)$, а $\hat{s} \in [0, s']$ определяется условием $m_{x,s'} = |x(\hat{s})|$. Если $\hat{s} = o(s)$, то $o(1)|\alpha + \hat{f}(\hat{s})| = |\alpha + f(s)| \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0$, откуда следует $|\alpha| = 0$; противоречие. Таким образом, $\hat{s} = O(s)$, и поэтому $s' = O(s)$. Следовательно, $\hat{s} = O(s')$, откуда вытекает требуемая эквивалентность.

Итак, в случае, когда кривая $x(s) : [0, s_0] \to (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ дифференцируема в 0 и $|\dot{x}(0)| \in \mathbb{R}_+^*$, определения 5.2, 5.4 эквивалентны. В других случаях определения 5.2, 5.4 могут быть не эквивалентны.

Замечание 5.1. Напомним, что *расстоянием по Хаусдорфу* [13] между множествами A, $B \subset (O, d_{cc})$ называется величина $d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset N_r(B), B \subset N_r(A)\}$. Несложно убедиться в том, что если в евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ кривая $x(s)$, $s \in [0, s_0]$, $x(0) = 0$, дифференцируема в 0, то множества $\delta^e_{1/s_n}(x|_{[0,s_n]})$ сходятся по Хаусдорфу при $s_n \to 0$ к множеству $\dot{x}(0)t$, $t \in [0,1]$, в обычном смысле; если же кривая $x(s)$ $\delta^e_{1/m_{x,s}}$-сходится справа в 0 к направлению α в обычном смысле, то для любой последовательности положительных чисел $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ множества $A_n = \delta^e_{1/m_{x,s_n}}(x|_{[0,s_n]})$ сходятся по Хаусдорфу к множеству $A = \alpha t$, $t \in [0,1]$, в обычном смысле.

Лемма 5.2. *Пусть $x(s) \subset (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $s \in [0,s_0]$, $x(0) = 0$, — дифференцируемая в 0 кривая. Тогда: 1°) кривая $x(s)$ $\delta^e_{1/s}$-сходится к направлению $\dot{x}(0)$ в точке 0 в обычном смысле; 2°) если $|\dot{x}(0)| \in \mathbb{R}^*_+$, то кривая $x(s)$ $\delta^e_{1/m_{x,s}}$-сходится справа в 0 к направлению $\frac{\dot{x}(0)}{|\dot{x}(0)|}$ в обычном смысле.*

Доказательство. Имеем $x(s) - \dot{x}(0)s = o(s)$, где $s \to 0$. Используя лемму 5.1, получаем $\frac{x(s)}{m_{x,s}} - \frac{\dot{x}(0)s}{m_{x,s}} = o(1)$. Пусть $t_s = \sup\{\tilde{s} \in [0,s] \mid \frac{|x(\tilde{s})|}{m_{x,s}} = 1\}$. Тогда

$$\frac{\dot{x}(0)t_s}{m_{x,s}} = \frac{\dot{x}(0)t_s}{|\dot{x}(0)t_s + o(t_s)|} \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \frac{\dot{x}(0)}{|\dot{x}(0)|}.$$

Так как $\frac{|x(\tilde{s})|}{m_{x,s}} \le 1$ для любых $\tilde{s} \in [0,s]$, то п 2° доказан. П. 1° очевиден.

Лемма 5.3. *Пусть $\gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0,s_0]$, $\gamma(0) = g$, — абсолютно непрерывная горизонтальная кривая такая, что $\|\theta_g^{-1}(\gamma)\|_{C[0,s_0]} < \xi$, где $\xi > 0$ — достаточно малое число. Тогда*

$$\int\limits_0^{s_0} |\dot{x}_{(1)}(s)|\,ds \approx \int\limits_0^{s_0} |\alpha_{(1)}(s)|\,ds = l(\gamma),$$

где $\alpha_i(s)$ из (3.1), $x_{(1)}(s) = \mathrm{Pr}_{H_1}\,\theta_g^{-1}\gamma(s)$.

Доказательство. Так как ξ — достаточно малое число, то, используя координатные записи векторных полей $\widetilde{X}'_i$ [5, лемма 1.1], имеем $|\dot{x}_i| \approx |\alpha_i|$, $i = 1,\dots,\dim H_i$, откуда следует лемма 5.3.

Учитывая свойство 2.4, ниже мы модифицируем определение 2.1 для кривых.

Определение 5.5. Пусть $a(s) : [0,s_0] \to \mathbb{R}$ — некоторая неотрицательная непрерывная неубывающая функция, $a(0) = 0$. Кривая $\gamma = \gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [-s_0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, $\Delta^g_{1/a(s)}$*-сходится справа к направлению $\alpha\widehat{X}^g$ в точке g*, если для любой последовательности положительных чисел $s_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ найдется последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ такая, что $\Delta^g_{1/a(s_n)}\big(\gamma|_{[0,s_n]} \cap \mathrm{Box}_{cc}(g, a(s_n))\big) \subset N_{\varepsilon_n}\big(I^{\alpha\widehat{X}^g}_{[0,1]}(g)\big)$.

Свойство 5.1. *Рассмотрим некоторую кривую $\gamma = \gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0,s_0]$, $\gamma(0) = g$, и пусть $x_{(1)}(s) = \mathrm{Pr}_{H_1}\big(\theta_g^{-1}(\gamma(s))\big)$. $\Delta^g_{1/m_{\gamma,s}}$-сходимость справа в точке g кривой γ к направлению $\alpha_{(1)}\widehat{X}^g$ эквивалентна $\Delta^g_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходимости справа в точке g кривой γ к направлению $\alpha_{(1)}\widehat{X}^g$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Обозначим $x = (x_{(1)},\dots,x_{(M)}) = \theta_g^{-1}(\gamma)$. Из $\Delta^g_{1/m_{\gamma,s}}$-сходимости справа вытекает, что $\|x_{(i)}\|_{C[0,s]} = o(m^i_{\gamma,s})$ для $i > 1$. Используя предложение 2.2 из [5], для каждого $s \in [0,s_0]$ получаем

$$1 = \frac{\|d_{cc}(g,\gamma)\|_{C[0,s]}}{m_{\gamma,s}} = \frac{\|d^g_c(g,\gamma)\|_{C[0,s]}}{m_{\gamma,s}} = \big\|d^g_c\big(g, \Delta^g_{1/m_{\gamma,s}}\gamma\big)\big\|_{C[0,s]},$$

откуда $\lim\limits_{s\to 0}\frac{\|x_{(1)}\|_{C[0,s]}}{m_{\gamma,s}}=1$, и кривая $x_{(1)}(s)$ $\delta^e_{1/m_{\gamma,s}}$-сходится в 0 справа к направлению $\alpha_{(1)}$. Поскольку $\|x_{(1)}\|_{C[0,s]}=m_{x_{(1)},s}$, то, учитывая вышесказанное и используя замечание 5.1, получаем, что кривые $\delta^e_{1/m_{x_{(1)},s}}(x_{(1)}|_{[0,s]})$ сходятся по Хаусдорфу к множеству $\alpha_{(1)}t$, $t\in[0,1]$, и $\|x_{(i)}\|_{C[0,s]}=o\big(m^i_{x_{(1)},s}\big)$, $i>1$. Поэтому кривая $\gamma(s)$ $\Delta^g_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходится справа в точке g к направлению $\alpha_{(1)}\widehat{X}^g$.

($\Leftarrow$) Из $\Delta^g_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходимости справа и предложения 2.2 в [5] имеем

$$\|x_{(i)}\|_{C[0,s]}=o\big(m^i_{x_{(1)},s}\big),\quad i>1, \tag{5.1}$$

$$\frac{m_{\gamma,s}}{m_{x_{(1)},s}}=\frac{\|d_{cc}(g,\gamma)\|_{C[0,s]}}{m_{x_{(1)},s}}=\frac{\|d^g_c(g,\gamma)\|_{C[0,s]}}{m_{x_{(1)},s}}=\big\|d^g_c\big(g,\Delta^g_{1/m_{x_{(1)},s}}\gamma\big)\big\|_{C[0,s]}\underset{s\to 0}{\longrightarrow}1.$$

Используя замечание 5.1, получаем, что кривые $\delta^e_{1/m_{\gamma,s}}(x_{(1)}|_{[0,s]})$ сходятся по Хаусдорфу к множеству $\alpha_{(1)}t$, $t\in[0,1]$. Заметим, что $m_{x_{(1)},s}\le m_{\gamma,s}$, поэтому с учетом (5.1) справедливы оценки $\|x_{(i)}\|_{C[0,s]}=o\big(m^i_{\gamma,s}\big)$, $i>1$. Следовательно, кривая γ $\Delta^g_{1/m_{\gamma,s}}$-сходится справа в точке g к направлению $\alpha_{(1)}\widehat{X}^g$.

Замечание 5.2. Пусть кривая $\gamma(s)\subset(O,d_{cc})$, $\gamma(0)=g$, $s\in[0,s_0]$, $x_{(1)}=\mathrm{Pr}_{H_1}\theta_g^{-1}\gamma$, удовлетворяет в 0 cc-условию Липшица. Тогда если $x_{(1)}(s)$ дифференцируема в 0 и при этом $|\dot{x}_{(1)}(0)|\in\mathbb{R}^*_+$, то

$$\frac{m_{x_{(1)},s}}{L}\le\mathrm{const}\cdot s\le\frac{c_3d_e(0,x_{(1)}(s))}{|\dot{x}_{(1)}(0)|}\le\frac{c_4m_{x_{(1)},s}}{|\dot{x}_{(1)}(0)|},\quad c_3,c_4=\mathrm{const},$$

для достаточно малых s. Если кривая $\gamma(s)$ cc-липшицева, то, учитывая свойство 3.1 и лемму 5.3, имеем $m_{x_{(1)},s}\le\mathrm{const}\cdot\bigvee\limits_0^s x_{(1)}\le\mathrm{const}\cdot Ls$. Таким образом, если кривая $\gamma:[0,s_0]\to\big(\mathscr{O}_g,d^g_c\big)$, $\gamma(0)=g$, cc-липшицева, дифференцируема в 0 и $|\dot{x_{(1)}}(0)|\in\mathbb{R}^*_+$, то длины кривых $\widehat{\Delta}^g_{1/s}(\gamma|_{[0,s]})$, $\widehat{\Delta}^g_{1/m_{x_{(1)},s}}(\gamma|_{[0,s]})$ равномерно ограничены. Тогда из дифференцируемости кривой $x_{(1)}(s)$ в 0, леммы 5.2, замечания 5.1 и свойства 3.2 вытекает, что кривая $\gamma(s)$ $\widehat{\Delta}^g_{1/m_{x_{(1)},s}}$- и $\widehat{\Delta}^g_{1/s}$-сходится в точке g к направлениям $\frac{\dot{x}_{(1)}(0)}{|\dot{x}_{(1)}(0)|}\widehat{X}^g$ и $\dot{x}_{(1)}(0)\widehat{X}^g$ соответственно. Если $|\dot{x}_{(1)}(0)|=0$, то из замечания 5.1 и свойства 3.3 вытекает, что $l\big(\widehat{\Delta}^g_{1/s}(\gamma|_{[0,s]})\big)\underset{s\to 0}{\longrightarrow}0$, $\widehat{\Delta}^g_{1/s}(\gamma|_{[0,s]})\underset{s\to 0}{\longrightarrow}g$. Таким образом, в частности, доказано, что на группах Карно cc-липшицевы кривые cc-дифференцируемы п. в. (см. определение 6.2).

Примеры ниже показывают, что в случае $|\dot{x}_{(1)}(0)|=0$ $\widehat{\Delta}^g_{1/m_{\gamma,s}}$-сходимости кривой $\gamma(s)$ к g может и не быть.

Пример 5.1. На одномерной группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ [2] рассмотрим точки $u_{4n+1}=(4^{-2n-1},0,4^{-l(2n+1)})$, $u_{4n+2}=(4^{-2n-2},0,4^{-l(2n+1)})$, $u_{4n+3}=(4^{-2n-2},0,0)$, $u_{4n+4}=(4^{-2n-3},0,0)$, $n\in\{0\cup\mathbb{N}\}$, где $l\ge 3$ — фиксированное натуральное число. Пусть $\gamma_{u_{4n+1},u_{4n+2}}$, $\gamma_{u_{4n+3},u_{4n+4}}$ — прямолинейные отрезки, соединяющие точки u_{4n+1}, u_{4n+2} и u_{4n+3}, u_{4n+4} соответственно. Точки u_{4n+2}, u_{4n+3} соединим следующим образом. Разобьем прямолинейный отрезок $I_{u_{4n+2},u_{4n+3}}$, соединяющий эти точки, на k_n равных частей так, чтобы $\big(\frac{k_n}{4^{l(2n+1)}}\big)^{1/2}=\frac{1}{2^{2n+1}}$, т. е. $k_n=4^{(2n+1)(l-1)}$. Соединим полученные при разбиении точки последовательно кратчайшими Карно — Каратеодори. Обозначим полученную кривую через

$\gamma_{u_{4n+2},u_{4n+3}}$. Из построения $\gamma_{u_{4n+2},u_{4n+3}}$ вытекает, что $l(\gamma_{u_{4n+2},u_{4n+3}}) \approx 2^{-2n-1}$. Соединим точки u_{4n+4} и u_{4n+5} кривой $\gamma_{u_{4n+4},u_{4n+5}}$ так же, как и u_{4n+2}, u_{4n+3}. Пусть $\gamma = \bigcup\limits_{n\in 0\cup\mathbb{N}} v_n$, где $v_n = \bigcup\limits_{j=1}^{4} \gamma_{u_{4n+j},u_{4n+j+1}}$. По построению кривая γ горизонтальна, *cc*-спрямляема, соединяет точки u_1 и $u_\infty = (0,0,0)$. Пусть $w \in v_n$, тогда $4^{-2n-3} \le d_c^g(u_\infty, w) \le \mathrm{const}\cdot(4^{-2n-1} + 2^{-l(2n+1)})$, $l(\gamma_{u_\infty,w}) = \mathrm{const}\cdot 2^{-2n-1}$, $\gamma_{u_\infty,w} \subset N_{\varepsilon_n}\bigl(I^X_{[0,4^{-2n-1}]}\bigr)$, $\varepsilon_n = \mathrm{const}\cdot 2^{-l(2n+1)}$. Поэтому кривая γ не удовлетворяет определениям 5.1, 5.2 в точке u_∞, однако γ $\delta_{1/m_{\gamma,s}}$-сходится к направлению X в точке u_∞. Если γ параметризована длиной дуги, то $\dot\gamma(0) = (0,0,0)$ и $\delta_{s^{-1}}\gamma(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} u_\infty$ при $s \to 0$.

Пример 5.2. На одномерной группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ [2] рассмотрим следующую последовательность точек: $u_n = \bigl(0,0,2^{1-n}\bigr)$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \{0 \cup \mathbb{N}\}$ решим уравнения $\alpha_n k_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, $\alpha_n^{1/2} k_n = \bigl(\frac{1}{2^{n+1}}\bigr)^{1/4}$. Получаем $\alpha_n = \bigl(\frac{1}{2^{n+1}}\bigr)^{3/2}$, $k_n = 2^{\frac{n+1}{2}}$. Последовательно отложим на отрезке, соединяющем точки u_{n+1}, u_{n+2}, в направлении от u_{n+1} к u_{n+2} точки $u_{n+1,1}$, $u_{n+1,2}, \dots$, $u_{n+1,[k_n]}$ так, чтобы $|u_{n+1,l}| - |u_{n+1,l+1}| = \alpha_n$. Соединим последовательно пары точек $u_{n+1,l}$ и $u_{n+1,l+1}$, а также $u_{n+1,[k_n]}$ и u_{n+2} кратчайшими Карно — Каратеодори. В результате получим кривую $\gamma_{u_{n+1},u_{n+2}}$, и пусть $\gamma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \gamma_{u_n,u_{n+1}}$. Тогда $l(\gamma) \approx \mathrm{const}\cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{1/2} k_n < \infty$. В точке $u_\infty = (0,0,0)$ кривая γ не удовлетворяет определениям 5.1, 5.2. Пусть γ параметризована длиной дуги; тогда $\dot\gamma(0) = (0,0,0)$, более того, $\delta_{s^{-1}}\gamma(s) \underset{s\to 0}{\longrightarrow} u_\infty$. Однако кривая γ $\delta_{1/m_{\gamma,s}}$-сходится в точке u_∞ к направлению T.

§ 6. Дифференцируемость горизонтальных кривых

Определение 6.1. Рассмотрим кривую $\gamma = \gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [-s_0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, и пусть $x_{(1)}(s) = \mathrm{Pr}_{H_1}\bigl(\theta_g^{-1}(\gamma(s))\bigr)$. Кривая γ *h-дифференцируема* в точке 0, если существует единственный вектор $\alpha_{(1)} \in \mathbb{R}^{\dim H_1}$ такой, что кривая γ $\Delta^g_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходится справа и слева к направлению $\alpha_{(1)}\widehat{X}^g$ в точке g.

Определение 6.2. Кривая $\gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [-s_0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, *cc-дифференцируема* в точке 0, если существует единственный вектор $\alpha_{(1)} \in \mathbb{R}^{\dim H_1}$ такой, что кривая γ $\Delta^g_{1/s}$-сходится справа и слева к направлению $\alpha_{(1)}\widehat{X}^g$ в точке g.

Замечание 6.1. h-Дифференцируемость и cc-дифференцируемость кривой $\gamma(s) \subset \bigl(\mathscr{O}_g, d_c^g\bigr)$, $s \in [-s_0, s_0]$, в точке $\tau \in [-s_0, s_0]$ такой, что $\gamma(\tau) \neq g$, определяются при помощи замечания 2.1.

Теорема 6.1. *Пусть $\gamma(s) \subset \bigl(\mathscr{O}_g, d_c^g\bigr)$, $s \in [0, s_0]$, — абсолютно непрерывная горизонтальная кривая такая, что кривая $x_{(1)}(s) = \mathrm{Pr}_{H_1}\bigl(\hat\theta^{-1}_{g,\gamma(0)}\bigl(\gamma(s)\bigr)\bigr)$ $\delta^e_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходится в 0 справа к направлению $\alpha_{(1)}$ и m-спрямляема справа в обычном смысле. Тогда γ $\widehat{\Delta}^{g,\gamma(0)}_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходится справа к направлению $\alpha_{(1)}\widehat{X}^g$ в точке $\gamma(0)$.*

Доказательство. По формулам [5, (2.4)] и (3.1) имеем $\mathrm{Pr}_{H_1}\bigl(\hat\theta_g^{-1}(\gamma^{-1}(0)\cdot\gamma(s))\bigr) = \mathrm{Pr}_{H_1}\bigl(\hat\theta_g^{-1}(\gamma(s))\bigr) - \mathrm{Pr}_{H_1}\bigl(\hat\theta_g^{-1}(\gamma(0))\bigr)$. Поэтому, учитывая замечание 2.1, достаточно рассмотреть случай $\gamma(0) = g$. Пусть $x(s) = (x_{(1)}(s), \dots, x_{(M)}(s)) =$

$\hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s))$. Рассмотрим кривые $\{y_{s_n}\} = \{\delta_{1/m_{x_{(1)},s_n}} x(\tilde{s})\}$, $\tilde{s} \in [0, s_n]$, $s_n \to 0$. Из m-спрямляемости кривой $x_{(1)}(s)$, свойств 2.1, 2.2 из [5] и замечания 4.2 вытекает, что $\{y_{s_n}\}$ — последовательность ограниченных абсолютно непрерывных горизонтальных кривых, длины которых не превосходят $\mathrm{const}\cdot|\alpha_{(1)}|$. Тогда, используя сходимость кривой $x_{(1)}(s)$ в точке 0 к направлению $\alpha_{(1)}$ и свойство 3.2, получаем теорему 6.1.

Теорема 6.2. *Пусть $\gamma(s) \subset \big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, — абсолютно непрерывная горизонтальная кривая. Обозначим $\hat{\theta}_g^{-1}(\gamma(s)) = (x_1(s), \dots, x_N(s))$. Предположим, что кривая $x_{(1)}(s)$ дифференцируема в 0 и для $j > \dim H_1$ выполняются оценки $\|x_{(1)}(s) - \dot{x}_{(1)}(0)s\|_{C[0,s]} \left(\bigvee\limits_0^s x_{(1)}\right)^{\deg X_j - 1} = o(s^{\deg X_j})$. Тогда кривая $\gamma(s)$ cc-дифференцируема в 0.*

Доказательство. В силу дифференцируемости кривой $x_{(1)}(s)$ в 0 для всех достаточно малых s будем иметь $\dot{x}_{(1)}(0)s \le \mathrm{const}\cdot\left(\bigvee\limits_0^s x_{(1)}\right)$. Теорема 6.2 вытекает из оценок (4.9).

Теорема 6.3. *Пусть $\gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, — абсолютно непрерывная горизонтальная кривая. Тогда существует абсолютно непрерывная горизонтальная кривая $\hat{\gamma}(s) \subset \big(\mathscr{O}_g, d_c^g\big)$, $s \in [0, s_0]$, такая, что $\gamma(0) = \hat{\gamma}(0)$,*

$$\Pr_{H_1} \theta_g^{-1}(\hat{\gamma}(s)) = \Pr_{H_1} \theta_g^{-1}(\gamma(s)), d_c^g(\gamma(s), \hat{\gamma}(s)) \le \mathrm{const}\cdot\left(C_s W_s^{M-1}\left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)\right)^{\frac{1}{M}},$$

где

$$\theta_g^{-1}(\gamma(s)) = x(s) = (x_{(1)}(s), \dots, x_{(M)}(s)),$$

$$C_s = \sup_{[0,s]} d_{cc}(g, \gamma(s)), \quad W_s = \max\left\{C_s, \bigvee_0^s x_{(1)}\right\}.$$

Доказательство. Имеем

$$\dot{x}(s) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \alpha_i(s)\widetilde{X}_i(x(s)) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \alpha_i(s)\big(\widehat{X}_i' + Y_i\big)(x(s))$$

п. в. на $[0, s_0]$; также $|x_i(s)| \le C_s^{\deg X_i}$, $i = 1, \dots, N$. Используя координатные записи векторных полей $\widetilde{X}_i$, $\widehat{X}_i'$ [5, лемма 1.1, (2.3)], для $\deg X_i = 1$ получаем

$$\alpha_i = \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{\dim H_1} \dot{x}_i p_i(x) = \dot{x}_i + b_i, \quad |p_i| = O(C_s),$$

где $p_i = p_i(x) \in C^{M+1}$. Запишем

$$\dot{x}(s) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} (\dot{x}_i(s) + b_i(s))\big(\widehat{X}_i' + Y_i\big)(x(s)) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \dot{x}_i(s)\widehat{X}_i'(x(s))$$
$$+ \sum_{i=1}^{\dim H_1} \dot{x}_i(s)Y_i(x(s)) + \sum_{i=1}^{\dim H_1} b_i(s)\widetilde{X}_i(x(s)) = A_1(s) + A_2(s) + A_3(s). \quad (6.1)$$

Пусть $A_2 = (w_1, \dots, w_N)$, $A_3 = (v_1, \dots, v_N)$. Используя координатные записи векторных полей $\widetilde{X}_i$, $\widehat{X}'_i$ [5, лемма 1.1, (2.3)] и учитывая, что $b_i = \dot{x}_i p_i$, получаем

$$\max\left\{\left|\int\limits_0^s v_i(s)\,ds\right|, \left|\int\limits_0^s w_i(s)\,ds\right|\right\} \le \mathrm{const}\cdot C_s^{\deg X_i} \bigvee_0^s x_{(1)}. \tag{6.2}$$

Из следствия 4.2 вытекает существование абсолютно непрерывной горизонтальной кривой $\hat{\gamma}(s) \subset \left(\mathscr{O}_g, d_c^g\right)$, $\hat{\gamma}(0) = \gamma(0)$, такой, что для кривой $u(s) = \theta_g^{-1}(\hat{\gamma}(s))$ выполняются соотношения

$$\dot{u}(s) = \sum_{i=1}^{\dim H_1} \dot{x}_i(s)\widehat{X}'_i(u(s)), \quad u(0) = x(0), \quad u_{(1)}(s) = x_{(1)}(s).$$

Обозначим $x(s) - u(s) = a(s) = (0, a_{(2)}, \dots, a_{(M)})(s)$. Из (4.1), (6.1), (6.2) получаем, что $\dot{x}_{(2)}(s) = (\dot{u}_{(2)} + v_{(2)} + w_{(2)})(s)$, откуда следует $\|x_{(2)} - u_{(2)}\|_{C[0,s]} \le \mathrm{const}\cdot \bigvee\limits_0^s x_{(1)} C_s^2$. Предположим, что для всех $i \le l$, $l > 2$, доказаны оценки

$$\|a_{(i)}\|_{C[0,s]} \le \mathrm{const}\cdot \bigvee_0^s x_{(1)} C_s W_s^{i-1}. \tag{6.3}$$

С помощью (4.1), (6.2) для $\dim H_l < j \le \dim H_{l+1}$ можем записать

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= \sum_{i=1}^{\dim H_1} \dot{x}_i \Big(\sum_{\substack{|\omega_j + e_i|_h = l,\\ \omega_j > 0}} \widehat{F}^{g,j}_{\omega_j, e_i} x^{\omega_j}\Big) + v_j + w_j \\ &= \sum_{i=1}^{\dim H_1} \dot{u}_i \Big(\sum_{\substack{|\omega_j + e_i|_h = l,\\ \omega_j > 0}} \widehat{F}^{g,j}_{\omega_j, e_i} (u+a)^{\omega_j}\Big) + v_j + w_j = \dot{u}_j + \sum_{i=1}^{\dim H_1} t_i \dot{x}_i + v_j + w_j.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Используя (4.6), (6.3), (6.4), получаем

$$|t_i| \le \mathrm{const}\cdot \sum_{\substack{\alpha \ge 0, \beta > 0,\\ \alpha + \beta = \omega_j}} u^\alpha a^\beta \le \mathrm{const}\cdot \sum_{\substack{\alpha \ge 0, \beta > 0,\\ \alpha + \beta = \omega_j}} u^\alpha \left(\bigvee_0^s x_{(1)} C_s\right)^{|\beta|} W_s^{|\beta|_h - |\beta|},$$

$$u^\alpha \le u^\alpha(0) + \mathrm{const}\cdot \widehat{C}_s^{|\alpha|} \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{|\alpha - \alpha_{(1)}|_h - |\alpha - \alpha_{(1)}|}$$

$$+ \mathrm{const}\cdot \sum_{\substack{\tilde{\alpha} > 0, \tilde{\beta} > 0,\\ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \alpha}} \bar{u}^{\tilde{\alpha}}(0) \widehat{C}_s^{|\tilde{\beta}|} \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{|\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_{(1)}|_h - |\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_{(1)}|},$$

откуда $\|t_i\|_{C[0,s]} \le \mathrm{const}\cdot C_s W_s^l$. Тогда, используя (6.2), (6.4), получаем оценки (6.3) и в случае $\deg X_j = l + 1$. Учитывая предложение 2.2 [5], запишем

$$\begin{aligned} d_c^g(\hat{\gamma}(s), \gamma(s)) &= d_c^g\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N u_i(s)\widehat{X}_i^g\right)(g), \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i(s)\widehat{X}_i^g\right)(g)\right) \\ &= d_c^g\left(\exp\left(\sum_{i=1}^N \eta_i(s)\widehat{X}_i^g\right)\gamma(s), \gamma(s)\right) = \max_{i=1,\dots,N}\{|\eta_i(s)|^{1/\deg X_i}\}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Обозначим $x_i(s) = \alpha_{i,s} C_s^{\deg X_i}$, $|\alpha_{i,s}| \le \mathrm{const}$. Тогда из (6.3) вытекает

$$u_i(s) = \alpha_{i,s} C_s^{\deg X_i} + \beta_{i,s} C_s \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right) W_s^{\deg X_i - 1}, \quad |\beta_{i,s}| \le \mathrm{const},$$

где $\beta_{i,s} = 0$ в случае $1 \le i \le \dim H_1$. Используя [5, (2.4)], получаем

$$\eta_i(s) = \hat{\beta}_{i,s} C_s \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right) W_s^{\deg X_i - 1}, \quad |\hat{\beta}_{i,s}| \le \mathrm{const}, \tag{6.6}$$

поэтому $d_c^g(\hat{\gamma}(s), \gamma(s)) \le \mathrm{const} \cdot \left(\left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right) C_s W_s^{M-1}\right)^{\frac{1}{M}}$.

Теорема 6.4. *Пусть $\gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, — абсолютно непрерывная горизонтальная кривая такая, что кривая $x_{(1)}(s) = \mathrm{Pr}_{H_1} \theta_g^{-1} \gamma(s)$ m-спрямляема справа и $\delta^e_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходится в точке 0 к направлению $\beta_{(1)}$ в обычном смысле. Тогда кривая γ h-дифференцируема справа в точке 0.*

Доказательство. Рассмотрим кривую $(x_1, \dots, x_N)(s) = \theta_g^{-1} \gamma(s)$. Используя координатную запись векторных полей $\widetilde{X}_i$, $i = 1, \dots, H_1$ (см. [5, лемма 1.1]), несложно показать, что $|x_i(s)| \le \mathrm{const} \cdot \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{\deg X_i}$, $i = 1, \dots, N$. Действительно (см. (3.1)), на первом шаге, используя лемму 5.1, имеем оценки $|x_i(s)| \le \mathrm{const} \cdot \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)$, $i = 1, \dots, N$. Рассмотрим $x_i(s)$, $i > \dim H_1$. Используя оценки первого шага, получим, что $|x_i(s)| \le \mathrm{const} \cdot \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^2$, $i > \dim H_1$. Предположим, что на k-м шаге мы имеем оценки

$$|x_i(s)| \le \mathrm{const} \cdot \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{\deg X_i}, \ \deg X_i \le k, \ |x_i(s)| \le \mathrm{const} \cdot \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^k, \ \deg X_i > k.$$

Используя их как базу индукции, на $(k+1)$-м шаге будем иметь

$$|x_i(s)| \le \mathrm{const} \cdot \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{\deg X_i}, \quad \deg X_i \le k+1,$$

$$|x_i(s)| \le \mathrm{const} \cdot \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^k, \quad \deg X_i > k+1.$$

Следовательно, $\gamma(s) \subset \mathrm{Box}_{cc}\left(g, C_1 \bigvee_0^s x_{(1)}\right)$, где константа $C_1 > 0$ не зависит от выбора $s \in [0, s_0]$. Из теоремы 6.3 вытекает существование абсолютно непрерывной горизонтальной кривой $\hat{\gamma} : [0, s_0] \to \left(\mathscr{O}_g, d_c^g\right)$ такой, что

$$\hat{\gamma}(0) = g, \ \Pr_{H_1} \theta_g^{-1}(\hat{\gamma}(s)) = x_{(1)}(s), \ d_c^g(\gamma(s), \hat{\gamma}(s)) \le \mathrm{const} \cdot \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{\frac{M+1}{M}}. \tag{6.7}$$

Используя условия теоремы 6.4, имеем $\bigvee_0^s x_{(1)} \approx m_{x_{(1)},s}$, откуда по теореме 6.1 получаем, что кривая $\hat{\gamma}(s)$ $\Delta^g_{1/m_{x_{(1)},s}}$-сходится в точке g к направлению $\beta_{(1)} \widehat{X}^g$. С учетом этого теорема 6.4 вытекает из (6.7).

Следствие 6.1. *Пусть cc-липшицева кривая* $\gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, *такова, что кривая* $\mathrm{Pr}_{H_1}\, \theta_g^{-1}(\gamma(s)) = x_{(1)}(s)$ *дифференцируема в точке* 0, *при этом* $|\dot{x}_{(1)}(0)| \in \mathbb{R}_+^*$. *Тогда в точке* 0 *кривая* γ *h-дифференцируема; более того, в точке* $\gamma(0)$ *кривая* γ $\Delta^g_{1/m_{x_{(1)}},s}$*-сходится справа к направлению* $\frac{\dot{x}_{(1)}(0)}{\|\dot{x}_{(1)}(0)\|}\widehat{X}^g$.

Доказательство. Проверим, что в 0 кривая $\mathrm{Pr}_{H_1}\, \theta_g^{-1}(\gamma(s)) = x_{(1)}(s)$ m-спрямляема справа в обычном смысле. Используя условие cc-липшицевости кривой, для п. в. $s \in [0, s_0]$ получаем $\theta^{-1}_{\gamma(s)}(\gamma(s+\tau)) = x(\tau) = \alpha_{(1)}\tau + o(\tau)$, $|\alpha_{(1)}| \leq \mathrm{const} \cdot L$, для всех достаточно малых τ. Используя тот факт, что отображение, индуцирующее систему координат 1-го рода, — диффеоморфизм, можем утверждать, что кривая $\mathrm{Pr}_{H_1}\, \theta^{-1}_{\gamma(\hat{s})}\gamma(\hat{s}+\tau)$, $\hat{s} \in [0, s_0]$, абсолютно непрерывна и ее производная в точках дифференцируемости ограничена по норме некоторой константой C, зависящей от L и не зависящей от выбора $\hat{s} \in [0, s_0]$. Тогда, применяя леммы 5.1, 5.3, получаем $\bigvee\limits_0^\tau x_{(1)} = \int\limits_0^\tau |\dot{x}_{(1)}(s)|\, ds \leq C\tau \leq \mathrm{const} \cdot m_{x_{(1)},\tau}$. Следствие 6.1 вытекает из леммы 5.2 и теоремы 6.4.

Следствие 6.2. *Пусть cc-липшицева кривая* $\gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, *такова, что кривая* $\mathrm{Pr}_{H_1}\, \theta_g^{-1}(\gamma(s)) = x_{(1)}(s)$ *дифференцируема в точке* 0. *Тогда кривая* γ *cc-дифференцируема в этой точке.*

Доказательство. Случай, когда $|\dot{\gamma}(0)| \in \mathbb{R}_+^*$, доказывается точно так же, как и следствие 6.2. В случае, когда $|\dot{\gamma}(0)| = 0$, учитывая свойство 3.3, несложно показать, что $\Delta^g_{1/s}(\gamma(s)) \underset{s \to 0}{\longrightarrow} \gamma(0)$.

Теорема 6.5. *Пусть* $\gamma(s) \subset (O, d_{cc})$, $s \in [0, s_0]$, $\gamma(0) = g$, *— абсолютно непрерывная горизонтальная кривая такая, что кривая* $x_{(1)}(s) = \mathrm{Pr}_{H_1}\, \theta_g^{-1}(\gamma(s))$ *удовлетворяет условиям:*

1°) $\bigvee\limits_0^s x_{(1)} = o(s^{\frac{M}{M+1}})$,

2°) $x_{(1)}(s)$ *дифференцируема в* 0,

3°) $\|x_{(1)}(s) - \dot{x}(0)s\|_{C[0,s]} = o(s^{\frac{2M}{M+1}})$.

Тогда $\gamma(s)$ *cc-дифференцируема в* 0.

Доказательство. Из 1° и монотонного возрастания функции $\frac{y}{y+1}$ следует, что $\bigvee\limits_0^s x_{(1)} = o(s^{\frac{\deg X_i}{\deg X_i + 1}})$, $i = 1, \ldots, N$. Имеем (см. доказательство теоремы 6.4) $\gamma(s) \subset \mathrm{Box}_{cc}\left(g, \mathrm{const} \cdot \bigvee\limits_0^s x_{(1)}\right)$. Тогда из теоремы 6.3 вытекает существование абсолютно непрерывной горизонтальной кривой $\hat{\gamma}(s) \subset \left(\mathscr{O}_g, d_c^g\right)$, $s \in [0, s_0]$, $\hat{\gamma}(0) = g$, $\mathrm{Pr}_{H_1}\, \theta_g^{-1}(\hat{\gamma}(s)) = x_{(1)}(s)$, такой, что величины $\eta_i(s)$ (см. (6.5), (6.6)) суть $o(s^{\deg X_i})$. Из 3° следует, что $\|x_{(1)}(s) - \dot{x}(0)s\|_{C[0,s]} = o(s^{\frac{\deg X_j + M}{M+1}})$, поэтому

$$\|x_{(1)}(s) - \dot{x}(0)s\|_{C[0,s]} \left(\bigvee_0^s x_{(1)}\right)^{\deg X_j - 1} = o(s^{\frac{\deg X_j + M}{M+1}}) \cdot o(s^{\frac{M(\deg X_j - 1)}{M+1}}) = o(s^{\deg X_j}).$$

Следовательно, по теореме 6.2 кривая $\hat{\gamma}$ $\Delta^g_{1/s}$-сходится к направлению $\dot{x}_{(1)}(0)\widehat{X}^g$ в точке g, откуда, учитывая, что $|\eta_i(s)| = o(s^{\deg X_i})$, получаем теорему 6.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gromov M.* Carnot–Caratheodory spaces seen from within // Sub-Reimannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
2. *Korányi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
3. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math. 1989. V. 119. P. 1–60.
4. *Грешнов А. В.* Метрики равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.
5. *Грешнов А. В.* Локальная аппроксимация равномерно регулярных квазипространств Карно — Каратеодори их касательными конусами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 290–312.
6. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; 28).
7. *Margulis G. A., Mostow G. D.* The differential of quasi-conformal mapping of a Carnot–Carathéodory space // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5, N 2. P. 402–433.
8. *Mitchell J.* On Carnot–Carathéodory metrics // J. Differential Geometry. 1985. V. 21. P. 35–45.
9. *Belläiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
10. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
11. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа.. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1999. Ч. I. Кн. 2.
12. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
13. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

Статья поступила 5 сентября 2006 г.,
окончательный вариант — 13 сентября 2007 г.

Грешнов Александр Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
greshnov@math.nsc.ru