Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 512.55

СЛАБО РЕГУЛЯРНЫЕ МОДУЛИ НАД НОРМАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ

А. Н. Абызов

Аннотация. Изучаются условия, при которых слабо регулярные модули замкнуты относительно прямых сумм, и кольца, над которыми каждый правый модуль является слабо регулярным. Для произвольного правого R-модуля M установлено, что в категории $\sigma(M)$ каждый модуль слабо регулярен тогда и только тогда, когда каждый модуль в $\sigma(M)$ либо полупрост, либо содержит в себе ненулевой M-инъективный подмодуль. Описаны нормальные кольца, над которыми каждый модуль слабо регулярен.

Ключевые слова: полуартиново кольцо, SV-кольцо, регулярное кольцо, слабо регулярный модуль.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули унитарными. Модуль M называется *слабо регулярным*, если каждый его подмодуль, который не содержится в радикале Джекобсона модуля M, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M. Кольцо называется *нормальным*, если каждый его идемпотент является центральным.

В работе изучаются условия, при которых слабо регулярные модули замкнуты относительно прямых сумм, и кольца, над которыми каждый модуль является слабо регулярным. Работа состоит из трех параграфов. В § 1, носящем предварительный характер, устанавливается ряд свойств нормальных колец, необходимых для дальнейших рассмотрений. В § 2 изучаются условия, при которых слабо регулярные модули замкнуты относительно прямых сумм. В § 3 описываются нормальные кольца, над которыми каждый модуль слабо регулярен.

Через $J(R)$ и $J(M)$ будем соответственно обозначать радикал Джекобсона кольца R и модуля M. Инъективную оболочку модуля M будем обозначать через $E(M)$. Если $x \in M$, то *аннулятором элемента* x будем называть множество вида $\mathrm{Ann}_R(x) = \{r \in R \mid xr = 0\}$. При этом если из изложения будет понятно, над каким кольцом рассматривается модуль M, то вместо $\mathrm{Ann}_R(x)$ будем писать просто $\mathrm{Ann}(x)$.

Рядом Леви модуля M называется возрастающая цепочка

$$0 \subset \mathrm{Soc}_1(M) = \mathrm{Soc}(M) \subset \dots \subset \mathrm{Soc}_\alpha(M) \subset \mathrm{Soc}_{\alpha+1}(M) \subset \dots,$$

где $\mathrm{Soc}_\alpha(M)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M) = \mathrm{Soc}(M/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M))$ для каждого непредельного ординального числа α и

$$\mathrm{Soc}_\alpha(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Soc}_\beta(M)$$

для каждого предельного ординального числа α. Обозначим через $L(M)$ подмодуль вида $\mathrm{Soc}_\xi(M)$, где ξ — наименьший ординал, для которого выполнено равенство $\mathrm{Soc}_\xi(M) = \mathrm{Soc}_{\xi+1}(M)$. Модуль M называется *полуартиновым*, если выполнено равенство $M = L(M)$. Кольцо R называется *полуартиновым справа*, если модуль R_R является полуартиновым. Для произвольного кольца R через $L(R)$ и $\mathrm{Soc}(R)$ будем обозначать соответственно идеалы $L(R_R)$ и $\mathrm{Soc}(R_R)$.

§ 1. Нормальные полуартиновы кольца

Для произвольного кольца R определим по трансфинитной индукции для каждого ординального числа α идеал I_α следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $I_\alpha = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $I_{\beta+1}/I_\beta$ — сумма всех простых инъективных правых R/I_β-подмодулей модуля R/I_β. Когда α — предельное ординальное число, положим $I_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I_\beta$. Ясно, что для некоторого ординального числа τ имеют место равенства $I_\tau = I_{\tau+1}$ и $I_1(R/I_\tau) = 0$. Далее через $I(R)$ будем обозначать идеал $I_\tau(R)$.

Лемма 1.1. *Для произвольного кольца R имеют место следующие утверждения:*

(1) *для каждого ординального числа α всякий инъективный простой правый R/I_α-модуль M является инъективным правым R-модулем;*

(2) *для каждого α идеал I_α регулярен;*

(3) *кольцо R является правым SV-кольцом тогда и только тогда, когда $I(R) = R$.*

Доказательство. (1) Покажем с помощью трансфинитной индукции, что для каждого ординального числа α инъективный простой R/I_α-модуль M является инъективным R-модулем. Если $\alpha = 0$, то утверждение тривиально. Пусть α — некоторое ординальное число и для каждого $\beta < \alpha$ всякий инъективный простой правый R/I_β-модуль M является инъективным правым R-модулем. Рассмотрим произвольный инъективный простой правый R/I_α-модуль M. Допустим, что $E(M) \neq M$, где $E(M)$ — инъективная оболочка R-модуля M. Если $E(M)I_\alpha \neq 0$, то обозначим через γ наименьшее ординальное число, для которого имеет место неравенство $E(M)I_\gamma \neq 0$. Ясно, что для некоторого ординального числа γ_0 имеет место равенство $\gamma = \gamma_0 + 1$. Тогда $E(M) - R/I_{\gamma_0}$ — модуль и для некоторого примитивного идемпотента e идеала I_γ/I_{γ_0} имеет место неравенство $E(M)e \neq 0$. По предположению индукции простой модуль $e(R/I_{\gamma_0})$ является инъективным R-модулем. Согласно [1, следствие 6.6.3] $E(M)$ является однородным непростым модулем. С другой стороны, $E(M)$ содержит простой инъективный R-модуль. Полученное противоречие показывает, что $E(M)I_\alpha = 0$. Таким образом, $E(M)$ является R/I_α-модулем, и поскольку M — инъективный простой R/I_α-модуль, то $E(M) = M$.

(2) Покажем сначала, что I_1 является регулярным идеалам. Поскольку идеал I_1 является прямой суммой минимальных инъективных правых идеалов, для произвольного элемента x из I_1 имеет место равенство $xR = eR$, где e — некоторый идемпотент кольца R. Пусть $e = xr$, где $r \in R$. Тогда $xR = eR = eeR = xreR \subset xI_1$. Таким образом, $xR = xI_1$, и для некоторого элемента r_0 идеала I_1 имеем $xr = xr_0$, следовательно, $xr_0x = x$. Используя трансфинитную индукцию, покажем, что для каждого ординального числа α идеал I_α регулярен. Для $\alpha = 0$ это утверждение тривиально. Если α — предельное ординальное число, то регулярность идеала I_α очевидна. Пусть α — не предельное ординальное число. Тогда для некоторого ординального числа

β имеет место равенство $\alpha = \beta + 1$ и, следовательно, $I_\alpha/I_\beta = I_1(R/I_\beta)$. Поскольку идеалы I_β и $I_1(R/I_\beta)$ регулярны, регулярность идеала I_α следует из [2, лемма 1.3].

(3) Утверждение непосредственно вытекает из п. (1). $\square$

Лемма 1.2. *Пусть e — центральный идемпотент кольца R и eR — полупростой модуль над кольцом R. Тогда eR является инъективным модулем.*

Доказательство. Рассмотрим вложение $eR \subset E(eR)$. Если $E(eR)(1-e) \neq 0$, то для некоторого элемента x из $E(eR)$ имеем $x(1-e) \neq 0$, и поскольку eR существен в $E(eR)$, для некоторых элементов r и s из R будет $x(1-e)r = es \neq 0$. Тогда $es = ese = x(1-e)re = 0$. Полученное противоречие показывает, что $E(eR)(1-e) = 0$ и, следовательно, $E(eR)$ мы можем рассматривать как модуль над кольцом eR. Поскольку eR — полупростой модуль, кольцо eR является классически полупростым и, значит, $eR = E(eR)$. $\square$

Теорема 1.3. *Для нормального кольца R имеют место следующие утверждения:*

(1) *если $J(R) = 0$, то $L(R)$ регулярен;*

(2) *если $J(R) = 0$, то $I(R) = L(R)$;*

(3) $\mathrm{Soc}(R/I(R)) \subset J(R/I(R))$.

Доказательство. (1) Пусть R — нормальное кольцо, у которого $J(R) = 0$. Используя трансфинитную индукцию, покажем, что для произвольного ординального числа α идеал $\mathrm{Soc}_\alpha(R)$ регулярен. Покажем, что $\mathrm{Soc}(R)$ регулярен. Поскольку $J(R) = 0$, любой минимальный идеал кольца R порождается идемпотентом и, следовательно, $\mathrm{Soc}(R) = \bigoplus_{i\in I} e_iR$, где e_i — примитивные центральные идемпотенты. Так как для каждого i кольцо e_iR является телом, то $\mathrm{Soc}(R)$ является прямой суммой тел и, следовательно, будет регулярным. Пусть α — предельное ординальное число. Тогда по определению

$$\mathrm{Soc}_\alpha(R) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Soc}_\beta(R).$$

Согласно предположению индукции $\mathrm{Soc}_\beta(R)$ регулярен для каждого $\beta < \alpha$, следовательно, и $\mathrm{Soc}_\alpha(R)$ также будет регулярным. Рассмотрим случай непредельного ординального числа α. Тогда $\alpha = \alpha_0 + 1$ для некоторого ординального числа α_0. Заметим, что для каждого ненулевого x из $L(R)$ выполнено неравенство $x^2 \neq 0$. Действительно, если для некоторого ненулевого элемента x из $L(R)$ выполнено равенство $x^2 = 0$, то xr — примитивный идемпотент для некоторого элемента r из R и $xr = xrxr = xxrr = 0$, что невозможно. Покажем, что $\mathrm{Soc}_\alpha(R)/\mathrm{Soc}_{\alpha_0}(R)$ не содержит нильпотентных элементов. Допустим противное. Тогда для некоторого элемента $x \in \mathrm{Soc}_\alpha(R)\backslash\mathrm{Soc}_{\alpha_0}(R)$ имеем $x^2 \in \mathrm{Soc}_{\alpha_0}(R)$. Пусть $\beta = \min_\gamma(x^2 \in \mathrm{Soc}_\gamma(R))$. Ясно, что β — непредельное ординальное число и, следовательно, $\beta = \beta_0 + 1$ для некоторого ординального числа β_0. Очевидно, $\beta \leq \alpha_0 < \alpha$, и из предположения индукции следует, что $\mathrm{Soc}_\beta(R)$ регулярен. Рассмотрим фактор-кольцо $\overline{R} = R/\mathrm{Soc}_{\beta_0}(R)$. Тогда цоколь $\mathrm{Soc}_\beta(R)/\mathrm{Soc}_{\beta_0}(R)$ кольца $\overline{R}$ является прямой суммой минимальных идеалов, каждый из которых порождается примитивным идемпотентом. Пусть $\bar{x}$ — канонический образ элемента x в кольце $\overline{R}$. Тогда $\bar{x}^2 \neq 0$ и $\bar{x}^2 \in \mathrm{Soc}_\beta(R)/\mathrm{Soc}_{\beta_0}(R)$. Следовательно, для идеала $\bar{x}^2\overline{R}$ имеем следующее представление:

$$\bar{x}^2\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \oplus(e_i\overline{R}),$$

где e_i — примитивные идемпотенты кольца $\overline{R}$. Поскольку по предположению индукции $\operatorname{Soc}_{\beta_0}(R)$ регулярен, согласно [3, лемма 1.1] относительно канонического гомоморфизма из R в $\overline{R}$ каждый идемпотент кольца $\overline{R}$ является образом некоторого идемпотента из кольца R. Следовательно, в кольце $\overline{R}$ каждый идемпотент также является центральным. Согласно лемме 1.2 модуль $\bar{x}^2\overline{R}$ инъективен, поэтому выделяется в виде прямого слагаемого в $\bar{x}\overline{R}$ и $\bar{x}\overline{R} = \bar{x}^2\overline{R} \oplus h\overline{R}$, где h лежит в $\overline{R}$. Если $h \neq 0$, то для некоторых элементов r_1и r_2 кольца $\overline{R}$ выполнены условия $h = \bar{x}r_1$ и hr_2 — примитивный центральный идемпотент. Тогда

$$hr_2 = (hr_2)^2 = hr_2\bar{x}r_1r_2 = \bar{x}hr_2r_1r_2 = \bar{x}^2r_1r_2r_1r_2.$$

Таким образом, получаем, что, с одной стороны, $hr_2 \in \bar{x}^2\overline{R} \cap h\overline{R} = 0$, а с другой стороны, $hr_2 \neq 0$. Следовательно, $\bar{x}\overline{R} = \bar{x}^2\overline{R}$ и $\bar{x} = \bar{x}^2\bar{s}$, где s лежит в R и $\bar{s}$ — его канонический образ в $\overline{R}$. Значит, $x - x^2s \in \operatorname{Soc}_\beta(R) \subset \operatorname{Soc}_{\alpha_0}(R)$, и поскольку $x^2s \in \operatorname{Soc}_{\alpha_0}(R)$, элемент x также будет лежать в $\operatorname{Soc}_{\alpha_0}(R)$. Это противоречит выбору элемента x. Тем самым цоколь $\operatorname{Soc}_\alpha(R)/\operatorname{Soc}_{\alpha_0}(R)$ кольца $\overline{R}$ не содержит нильпотентных элементов и поэтому регулярен. Так как согласно предположению индукции $\operatorname{Soc}_{\alpha_0}(R)$ регулярен, в силу [2, лемма 1.3] $\operatorname{Soc}_\alpha(R)$ также регулярен.

(2) Используя трансфинитную индукцию, покажем, что для произвольного ординального числа α имеет место равенство $\operatorname{Soc}_\alpha(R) = I_\alpha$. Для $\alpha = 0$ утверждение тривиально. Пусть α — некоторое ординальное число и для каждого $\beta < \alpha$ имеет место равенство $\operatorname{Soc}_\beta(R) = I_\beta(R)$. Покажем справедливость равенства $\operatorname{Soc}_\alpha(R) = I_\alpha$. Если α предельное, то равенство очевидно. Предположим, что α — непредельное ординальное число. Тогда $\alpha = \alpha_0 + 1$ для некоторого ординального числа α_0. Согласно доказанному выше и [3, лемма 1.1] кольцо $R/\operatorname{Soc}_{\alpha_0}(R)$ нормально и его цоколь $\operatorname{Soc}_\alpha(R)/\operatorname{Soc}_{\alpha_0}(R)$ является прямой суммой минимальных правых идеалов, порожденных центральными идемпотентами. Тогда согласно лемме 1.2 $\operatorname{Soc}_\alpha(R)/\operatorname{Soc}_{\alpha_0}(R) = I_\alpha(R)/I_{\alpha_0}(R)$ и, следовательно, $\operatorname{Soc}_\alpha(R) = I_\alpha(R)$.

(3) Если $\operatorname{Soc}(R/I(R)) \not\subset J(R/I(R))$, то кольцо $R/I(R)$ содержит минимальный правый идеал A, порожденный примитивным идемпотентом. Тогда из леммы 1.2 следует, что $A \subset I_1(R/I(R)) = 0$. Полученное противоречие доказывает включение $\operatorname{Soc}(R/I(R)) \subset J(R/I(R))$. $\square$

В качестве непосредственных следствий предыдущих результатов приведем следующие известные утверждения [4].

Следствие 1.4. *Для нормального кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R — регулярное полуартиново кольцо;*

(2) *для каждого непредельного ординала α кольцо $\operatorname{Soc}_\alpha(R)/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(R)$ является прямой суммой тел;*

(3) *R — полуартиново кольцо, у которого $J(R) = 0$.*

Следствие 1.5. *Нормальное полуартиново кольцо с нулевым радикалом Джекобсона является SV-кольцом.*

§ 2. Прямые суммы слабо регулярных модулей

Лемма 2.1. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны:*

(1) *M слабо регулярен;*

(2) *каждый некосущественный циклический подмодуль модуля M содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M;*

(3) *каждый циклический подмодуль модуля M, который не содержится в $J(M)$, содержит в себе ненулевое циклическое прямое слагаемое модуля M;*

(4) *каждый подмодуль модуля M, не содержащийся в радикале Джекобсона, содержит нерадикальное прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Поскольку в силу [1, следствие 9.1.3] каждый некосущественный циклический подмодуль модуля M не лежит в $J(M)$, импликация непосредственно следует из определения слабо регулярного модуля.

(2) $\Rightarrow$ (3) Если циклический подмодуль nR слабо регулярного модуля M не содержится в $J(M)$, то он некосуществен и, следовательно, согласно предположению будет содержать в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M. Тогда исходная импликация будет следовать из того факта, что каждое прямое слагаемое циклического модуля является циклическим.

(3) $\Rightarrow$ (4) Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (1) Очевидно. $\square$

Для произвольного правого R-модуля M через $\sigma(M)$ будем обозначать наименьшую подкатегорию Гротендика категории правых R-модулей, которая содержит модуль M [5].

Теорема 2.2. *Пусть P — произвольный модуль над кольцом R, M и N — слабо регулярные модули из категории $\sigma(P)$. Тогда если M и N являются проективными в $\sigma(P)$, то модуль $M \oplus N$ слабо регулярен.*

Доказательство. Пусть элемент $m + n$, где $m \in M$ и $n \in N$, не лежит в $J(M \oplus N)$. Тогда либо $n \notin J(N)$, либо $m \notin J(M)$. Пусть для определенности $n \notin J(N)$. В силу слабо регулярности модуля N для некоторого r и подмодуля $N_0 \neq N$ выполнено равенство $nrR \oplus N_0 = N$. Рассмотрим эпиморфизм f модуля $(m+n)rR$ на модуль nrR, который является ограничением на модуль $(m+n)rR$ проекции модуля $M \oplus N$ на модуль N. Поскольку из [6, предложение 16.10] следует проективность модуля nrR в $\sigma(P)$, согласно [5, 18.3] f является расщепляющимся эпиморфизмом. Тогда для некоторого $s \in R$ выполнено равенство $(m+n)rR = \operatorname{Ker} f \oplus (m+n)rsR$. Так как f — эпиморфизм, в кольце R найдется такой элемент h, что $(m + n)rsh = mrsh + nr$. Рассмотрим некоторый элемент a из пересечения $(m + n)rsR \cap (M \oplus N_0)$. Тогда $a = (m + n)rst = m_0 + n_0$, где $t \in R$, $m_0 \in M$, $n_0 \in N_0$. В силу однозначности разложения имеем $mrst = m_0$, $nrst = 0$, $n_0 = 0$, т. е. $a = m_0$ и, следовательно, $a \in \operatorname{Ker} f$. Таким образом, $(m+n)rsR \cap (M \oplus N_0) = 0$. Произвольный элемент модуля $M \oplus N$ можно представить в виде $m_1 + nrr_1 + n_1$, где $m_1 \in M$, $r_1 \in R$, $n_1 \in N_0$. В силу равенства $(m + n)rsh = mrsh + nr$ имеем

$$m_1 + nrr_1 + n_1 = (m + n)rshr_1 + (m_1 - mrshr_1 + n_1),$$

т. е. $(m+n)rsR + (M \oplus N_0) = M \oplus N$ и, следовательно, $(m+n)rsR \oplus (M \oplus N_0) = M \oplus N$. $\square$

Следствие 2.3. *Модуль, который является прямой суммой слабо регулярных проективных модулей, будет слабо регулярным проективным модулем.*

Следствие 2.4. *Если кольцо R, рассматриваемое как правый R-модуль, является прямой суммой слабо регулярных правых идеалов, то оно само слабо регулярно.*

Следствие 2.5 [7]. *Каждое полусовершенное кольцо слабо регулярно.*

Следствие 2.6 [8]. *Над слабо регулярным кольцом каждый проективный модуль слабо регулярен.*

Доказательство. Поскольку проективный модуль является прямым слагаемым свободного модуля, а прямое слагаемое слабо регулярного модуля — слабо регулярным модулем, то утверждение достаточно доказать для свободных модулей. Пусть R — некоторое слабо регулярное кольцо, M — свободный правый R-модуль и $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ — его базис. Рассмотрим элемент $m = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i r_i \notin J(M)$, где $e_i \in \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ для каждого i. Тогда в силу теоремы 2.2 модуль $e_1R\oplus\dots\oplus e_nR$ слабо регулярен. Следовательно, подмодуль mR содержит ненулевое прямое слагаемое модуля $e_1R\oplus\dots\oplus e_nR$ и, значит, модуля M. $\square$

Теорема 2.7 [8]. *Для проективного модуля P над кольцом R следующие условия равносильны:*

(1) *кольцо эндоморфизмов модуля P является слабо регулярным кольцом;*

(2) *модуль P является слабо регулярным с косущественным радикалом Джекобсона.*

Следующая теорема непосредственно следует из теоремы 2.2 и теоремы 2.7.

Теорема 2.8. *Прямая сумма двух проективных модулей со слабо регулярными кольцами эндоморфизмов является проективным модулем со слабо регулярным кольцом эндоморфизмов.*

Теорема 2.9. *Модуль, который является прямой суммой слабо регулярных модулей с нулевым радикалом Джекобсона, будет слабо регулярным модулем.*

Доказательство. Пусть M и N — слабо регулярные модули с нулевыми радикалами Джекобсона и $m+n$ — ненулевой элемент из $M\oplus N$, причем $m\in M$ и $n\in N$. Если $\mathrm{Ann}(n)\neq\mathrm{Ann}(m)$, то найдется такой элемент s из кольца R, что либо $ms\neq 0$ и $ns=0$, либо $ns\neq 0$ и $ms=0$. Пусть для определенности выполнены условия $ms\neq 0$ и $ns=0$. Тогда для некоторого элемента t кольца R подмодуль $mstR$ ненулевой и выделяется в виде прямого слагаемого в M. Следовательно, подмодуль $(m+n)stR = mstR$ ненулевой и выделяется в виде прямого слагаемого в модуле $M\oplus N$. Если $\mathrm{Ann}(n)=\mathrm{Ann}(m)$, то для некоторого элемента r кольца R подмодуль nrR является ненулевым и выделяется в виде прямого слагаемого в модуле N. Пусть $x\in M\cap(mr+nr)R$. Тогда $x = m_0 = (mr+nr)s$, где $m_0\in M$ и $s\in R$. Из однозначности разложения следует, что $m_0 = mrs$ и $nrs = 0$ и, следовательно, $x=0$. Поскольку $M+(mr+nr)R = M\oplus nrR$ и $M\cap(mr+nr)R = 0$, то ненулевой подмодуль $(m+n)rR$ является прямым слагаемым в $M\oplus nrR$ и, следовательно, в $M\oplus N$. $\square$

Лемма 2.10. *Следующие условия для циклического правого R-модуля M равносильны:*

(1) *M полупростой;*

(2) *каждый максимальный подмодуль модуля M является несущественным в M.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть N — произвольный подмодуль M. В силу леммы Цорна в модуле M мы можем выбрать максимальный подмодуль T с условием $T \cap N = 0$. Тогда $T \oplus N$ является существенным в M. Допустим, что $T \oplus N \neq M$. В силу [6, теорема 2.8] в любом ненулевом циклическом модуле существует максимальный подмодуль, следовательно, в модуле M найдется такой максимальный подмодуль M_0, что $T \oplus N \subset M_0 \subset M$. Очевидно, M_0 является существенным подмодулем в M, что противоречит исходному предположению. Таким образом, каждый подмодуль модуля M выделяется в M в виде прямого слагаемого, и по теореме 8.1.3 из [1] M является полупростым. $\square$

Лемма 2.11. *Прямая сумма слабо регулярного модуля с полупростым радикалом Джекобсона и полупростого модуля является слабо регулярным модулем.*

Доказательство. Рассмотрим прямую сумму модулей $M \oplus N$, где M — слабо регулярный модуль и N полупростой. Покажем, что модуль $M \oplus N$ является слабо регулярным. Пусть $x \in M$, $x_0 \in N$ и элемент $x + x_0$ не лежит в $J(M \oplus N)$. Если $x_0 \neq 0$, то для некоторого элемента r кольца R модуль $x_0 rR$ простой. Поэтому без ограничения общности можно считать, что N является простым модулем. Пусть $x \notin J(M)$. Тогда для некоторого элемента r кольца R модуль xrR является ненулевым и выделяется в виде прямого слагаемого в M. Если $\mathrm{Ann}(xr) \not\subset \mathrm{Ann}(x_0 r)$, то найдется такой элемент s кольца R, что $s \in \mathrm{Ann}(xr)$ и $s \notin \mathrm{Ann}(x_0 r)$. Тогда, очевидно, модуль $(xr + x_0 r)sR = x_0 rsR$ является простым и, следовательно, выделяется в виде прямого слагаемого в $M \oplus N$. Если $\mathrm{Ann}(xr) \subset \mathrm{Ann}(x_0 r)$, то, очевидно, $(xr + x_0 r)R \cap x_0 rR = 0$. Значит, подмодуль $(xr + x_0 r)R$ является прямым слагаемым в $xrR \oplus x_0 rR$ и, следовательно, в модуле $M \oplus N$. Допустим теперь, что $x \in J(M)$. Если $\mathrm{Ann}(x) \not\subset \mathrm{Ann}(x_0)$, то для некоторого элемента s кольца R подмодуль $(x + x_0)sR = x_0 sR$ является простым и выделяется в виде прямого слагаемого в модуле $M \oplus N$. В случае, когда $\mathrm{Ann}(x) \subset \mathrm{Ann}(x_0)$, имеем гомоморфизм f полупростого модуля xR в простой модуль $x_0 R$, при котором $f(x) = x_0$. Тогда для некоторого элемента s кольца R имеем $xR = \mathrm{Ker}\, f \oplus xsR$, где xsR — простой модуль и $f(xs) = x_0$. Если $x_0 s = 0$, то $xs \in \mathrm{Ker}\, f$, что невозможно. Значит, $x_0 s \neq 0$. Поскольку $f(xs) = x_0 s$, то $\mathrm{Ann}(xs) \subset \mathrm{Ann}(x_0 s)$ и, следовательно, циклический подмодуль $(xs + x_0 s)R$ является простым и выделяется в виде прямого слагаемого в модуле $M \oplus N$. $\square$

Лемма 2.12. *Пусть M — модуль над кольцом R, m — произвольный элемент модуля M, j — элемент из $J(R)$, для которого $mj \neq 0$. Тогда если для некоторого максимального подмодуля N модуля mjR модуль $M \oplus mjR/N$ слабо регулярен, то N является прямым слагаемым в mjR.*

Доказательство. Пусть $\overline{m}$ — образ элемента m при каноническом гомоморфизме модуля M в модуль M/N. Циклический подмодуль $(mj, \overline{m}j)R$ не содержится в радикале Джекобсона модуля $M \oplus mjR/N$ и, следовательно, согласно лемме 2.1 содержит в себе ненулевое прямое слагаемое вида $(mjr, \overline{m}jr)R$ модуля $M \oplus mjR/N$. Таким образом, для некоторого подмодуля M_0 имеем равенство $M \oplus mjR/N = (mjr, \overline{m}jr)R \oplus M_0$. Тогда для некоторых элементов $(mjr, \overline{m}jr)s \in (mjr, \overline{m}\ jr)R$ и $(m_0, \overline{m}jt) \in M_0$ имеем $(m, 0) = (mjr, \overline{m}jr)s + (m_0, \overline{m}jt)$. Поскольку $j \in J(R)$, то $mR = m_0 R$ и для некоторого элемента r_0 кольца R имеем $(m_0, \overline{m}jt)r_0 = (m, \overline{m}jtr_0)$. Покажем, что $\mathrm{Ann}(mjr) = \mathrm{Ann}(\overline{m}jr)$. Допустим противное. Тогда найдется такой элемент a кольца R, что $mjra \neq 0$

и $\overline{m}jra = 0$. Следовательно,

$$(mjr, \overline{m}jr)a = (mjra, 0) = (m, \overline{m}jtr_0)jra \neq 0,$$

что противоречит условию $(mjr, \overline{m}jr)R \cap (m, jtr_0)R = 0$. Таким образом, модуль $(mjr, \overline{m}jr)R$ является простым и изоморфен $mjrR$. Поскольку $mjr \notin N$, то $mjrR \cap N = 0$ и, следовательно, N является прямым слагаемым модуля mjR. $\square$

Теорема 2.13. *Если для правого слабо регулярного R-модуля M выполнено равенство $J(M) = MJ(R)$, то следующие условия равносильны:*

(1) *$J(M)$ — полупростой модуль;*

(2) *для произвольного полупростого модуля N модуль $M \oplus N$ является слабо регулярным;*

(3) *для произвольного простого модуля N модуль $M \oplus N$ является слабо регулярным.*

Доказательство. Поскольку импликация (1) $\Rightarrow$ (2) непосредственно следует из леммы 2.11, достаточно доказать импликацию (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть выполнено условие (3). Тогда из леммы 2.10 и леммы 2.12 следует, что для произвольных элементов $m \in M$, $j \in J(R)$ модуль mjR является полупростым. Так как $J(M) = MJ(R)$, модуль $J(M)$ также является полупростым. $\square$

Поскольку для произвольного проективного модуля P имеет место равенство $J(P) = PJ(R)$, из следствия 2.6 и предыдущей теоремы непосредственно получаем следующие утверждения.

Следствие 2.14. *Для проективного слабо регулярного модуля P следующие условия равносильны:*

(1) *радикал Джекобсона модуля P является полупростым;*

(2) *прямая сумма модуля P и произвольного полупростого модуля является слабо регулярным модулем;*

(3) *прямая сумма модуля P и произвольного простого модуля является слабо регулярным модулем.*

Следствие 2.15. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R — слабо регулярное кольцо и $J(R)$ является полупростым правым R-модулем;*

(2) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы проективного модуля и полупростого модуля, слабо регулярен;*

(3) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы проективного модуля и простого модуля, слабо регулярен.*

Кольцо, над которым каждый правый модуль имеет нулевой радикал Джекобсона, называется *правым V-кольцом.*

Теорема 2.16. *Пусть R — слабо регулярное кольцо и $R/J(R)$ является правым V-кольцом. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *$J(R)$ является полупростым правым R-модулем;*

(2) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы слабо регулярного модуля и полупростого модуля, является слабо регулярным;*

(3) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы проективного модуля и полупростого модуля, является слабо регулярным;*

(4) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы проективного модуля и простого модуля, является слабо регулярным.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Поскольку согласно [1, с. 233] для каждого правого модуля M над кольцом R выполнено равенство $MJ(R) = J(M)$, то импликация следует из теоремы 2.13.

(2) $\Rightarrow$ (3) Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (4) Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (1) Импликация непосредственно следует из следствия 2.15. $\square$

Следствие 2.17. *Для полусовершенного кольца R следующие условия равносильны:*

(1) $J^2(R) = 0$;

(2) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы слабо регулярного модуля и полупростого модуля, слабо регулярен;*

(3) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы проективного модуля и полупростого модуля, слабо регулярен;*

(4) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы локального проективного модуля и простого модуля, слабо регулярен.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Поскольку кольцо $R/J(R)$ является V-кольцом, импликация следует из предыдущей теоремы.

(2) $\Rightarrow$ (3) Очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (4) Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (1) Полусовершенное кольцо как правый модуль над собой согласно [9, с. 74] является прямой суммой конечного числа локальных проективных модулей. Из следствия 2.14 следует, что радикал Джекобсона каждого правого локального проективного R-модуля является полупростым. Следовательно, радикал Джекобсона кольца R также будет полупростым. $\square$

Теорема 2.18. *Пусть M — произвольный правый модуль над кольцом R. Если в категории $\sigma(M)$ прямая сумма слабо регулярного и полупростого модуля является слабо регулярным модулем, то каждый ненулевой модуль из $\sigma(M)$ содержит максимальный подмодуль.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда в категории $\sigma(M)$ найдется радикальный ненулевой правый модуль N. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент x из N и максимальный подмодуль N_0 в xR. Введем внешнюю прямую сумму модулей $N \oplus \bar{x}R$, где $\bar{x}$ — образ элемента x при каноническом гомоморфизме φ модуля xR в модуль xR/N_0. Обозначим модуль $N \oplus \bar{x}R$ через A. Поскольку каждый радикальный модуль слабо регулярен, согласно нашему предположению модуль A слабо регулярен. Тогда в подмодуле $(x, \bar{x})R$ найдется ненулевой подмодуль S, для которого выполнено равенство $A = S \oplus T$, где T — некоторый подмодуль. Из включений $J(S) \subset J((x, \bar{x})R) \subset (J(xR), 0) \subset (xR, 0) \subset (N, 0)$ следует, что подмодуль $J(S)$ косуществен в $(xR, 0)$ и, значит, в $(N, 0)$. Тогда имеют место равенства

$$(N, 0) = J(A) = J(S \oplus T) = J(S) \oplus J(T) = J(T).$$

Если $T \neq (N, 0)$, то для некоторого ненулевого подмодуля T_0 модуля T имеем $T = T_0 \oplus (N, 0)$ и тем самым $A = S \oplus T_0 \oplus (N, 0)$ и $(0, \bar{x}R) \cong S \oplus T_0$, что противоречит простоте модуля $\bar{x}R$. Следовательно, $\bar{x}R \cong S$. Так как модуль S является прямым слагаемым в модуле A и он не содержится в $J(A)$, для некоторого элемента r из R выполнены соотношения $S = (x, \bar{x})rR$ и $\bar{x}r \neq 0$. Покажем, что

$xrR \cap \operatorname{Ker}\varphi = 0$. Допустим противное. Возьмем произвольный ненулевой элемент m из $xrR \cap \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда для некоторого ненулевого элемента s из кольца R имеем $m = xrs \neq 0$ и $\bar{x}rs = 0$. Следовательно, подмодуль $(xrs, 0)R$ является собственным ненулевым подмодулем модуля $(x, \bar{x})rR$, что противоречит простоте модуля S. Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что в произвольном циклическом подмодуле модуля N максимальный подмодуль является несущественным. Тогда ввиду леммы 2.10 модуль N является полупростым, что противоречит его радикальности. $\square$

Говорят, что подмодуль N модуля M *лежит над прямым слагаемым модуля* M, если существуют такие подмодули N_1 и N_2, что $N_1 \oplus N_2 = M$, $N_1 \subset N$ и $N_2 \cap N$ косуществен в N_2. Правый R-модуль M называется *модулем со свойством подъема*, если каждый его подмодуль лежит над прямым слагаемым модуля M. Легко видеть, что каждый модуль со свойством подъема является слабо регулярным.

Лемма 2.19. *Слабо регулярный модуль, который является прямой суммой двух локальных модулей, будет модулем со свойством подъема.*

Доказательство. Рассмотрим слабо регулярный модуль M вида $M = M_1 \oplus M_2$, где M_1 и M_2 — локальные модули. Пусть N — собственный некосущественный подмодуль модуля M. Согласно предположению модуль M слабо регулярен, следовательно, найдутся такие ненулевые подмодули N_1 и N_2 модуля M, что $M = N_1 \oplus N_2$ и $N_1 \subset N$. Тогда

$$M/J(M) \cong M_1/J(M_1) \oplus M_2/J(M_2) \cong N_1/J(N_1) \oplus N_2/J(N_2)$$

и, поскольку $M/J(M)$ является полупростым, из однозначности разложения полупростого модуля в прямую сумму простых модулей вытекает, что модули $N_1/J(N_1)$ и $N_2/J(N_2)$ являются простыми и, следовательно, модули N_1 и N_2 локальны. Если $N \cap N_2$ не лежит в $J(N_2)$, то из локальности модуля N_2 следует включение $N_2 \subset N$, что противоречит выбору подмодуля N. Таким образом, $N \cap N_2$ является косущественным в N_2. $\square$

Теорема 2.20 [10]. *Для полусовершенного кольца R следующие условия являются равносильными:*

(1) $J^2(R) = 0$;

(2) *над кольцом R каждый правый R-модуль, представимый в виде прямой суммы локального проективного и простого модуля, является модулем со свойством подъема.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Импликация непосредственно вытекает из теоремы 2.16 и леммы 2.19.

(2) $\Rightarrow$ (1) Из теоремы 2.16 следует, что каждый главный неразложимый правый модуль над кольцом R имеет полупростой радикал Джекобсона. Отсюда непосредственно получаем равенство $J^2(R) = 0$. $\square$

Поскольку кольца, над которыми правые модули замкнуты относительно прямой суммы, согласно теореме 2.18 являются правыми кольцами Басса, то такие кольца наследуют все свойства правых колец Басса. Отметим в связи с этим следующий результат, который можно найти работах [11, 12].

Теорема 2.21. *Следующие условия эквивалентны для коммутативного кольца R:*

(1) *R является кольцом Басса;*

(2) *$R/J(R)$ является регулярным кольцом и $J(R)$ T-нильпотентен.*

Теорема 2.22. *Для коммутативного кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *$R/J(R)$ является регулярным кольцом и $J(R)$ — полупростой R-модуль;*

(2) *над кольцом R прямая сумма слабо регулярного модуля и полупростого является слабо регулярным модулем.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Поскольку согласно [9, следствие 19.53] регулярное коммутативное кольцо является V-кольцом, из [1, с. 233] следует, что для каждого модуля M над кольцом R выполнено равенство $J(M) = MJ(R)$. Тогда импликация следует из леммы 2.11.

(2) $\Rightarrow$ (1) В силу теоремы 2.18 кольцо R является кольцом Басса. Тогда из теоремы 2.21 и [7, предложение 1.4] следует слабая регулярность кольца R. Поскольку кольцо R является проективным слабо регулярным модулем над собой, импликация вытекает из следствия 2.14 и теоремы 2.21. $\square$

Следствие 2.23. *Для нормального полуартинова кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *$J(R)$ — полупростой R-модуль;*

(2) *над кольцом R прямая сумма слабо регулярного модуля и полупростого является слабо регулярным модулем.*

Теорема 2.24. *Для коммутативного кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R является регулярным кольцом;*

(2) *$J(R) = 0$ и над кольцом R слабо регулярные модули замкнуты относительно прямой суммы.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Если коммутативное кольцо R регулярно, то ввиду [9, следствие 19.53] над ним каждый модуль имеет нулевой радикал Джекобсона. Тогда импликация непосредственно следует из теоремы 2.9.

(2) $\Rightarrow$ (1) Если над коммутативным кольцом R слабо регулярные модули замкнуты относительно прямой суммы, то согласно теореме 2.18 оно является кольцом Басса. Тогда импликация непосредственно следует из теоремы 2.21. $\square$

§ 3. Слабая регулярность категории модулей

Лемма 3.1. *Если над полусовершенным кольцом R каждый правый модуль слабо регулярен, то каждый правый главный неразложимый R-модуль является либо простым, либо инъективным длины два.*

Доказательство. Пусть над полусовершенным кольцом R каждый правый модуль слабо регулярен. Тогда из следствия 2.15 получаем, что $J^2(R) = 0$. Если M — непростой главный неразложимый правый модуль над кольцом R, то из слабой регулярности модуля $E(M)$ и $M \not\subset J(E(M)) = MJ(R)$ следует инъективность модуля M. Поскольку согласно [1, следствие 6.6.3] инъективная оболочка простого модуля является однородной, то из неразложимости инъективного модуля M вытекает простота модуля $J(M)$. $\square$

Теорема 3.2. *Для полусовершенного кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *кольцо R является артиновым полуцепным и $J^2(R) = 0$;*

(2) *над кольцом R все правые модули слабо регулярны;*

(3) *над кольцом R все левые модули слабо регулярны.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Из [9, теорема 25.4.2] следует, что каждый модуль над кольцом R является прямой суммой полупростого и проективного модулей. Тогда из теоремы 2.16 следует слабая регулярность произвольного модуля над кольцом R.

(2) $\Rightarrow$ (1) Импликация вытекает из леммы 3.1 и [9, теорема 25.4.2]. $\square$

Замечание. Отметим, что артиновы полуцепные кольца с полупростым радикалом Джекобсона как кольца, над которыми все модули обладают определенным свойством, возникали в ряде работ [13, 14]. Например, кольца, над которыми каждый модуль является модулем со свойством подъема, являются таковыми [14].

Для произвольного модуля N из категории $\sigma(M)$ через $E_M(N)$ будем обозначать инъективную оболочку модуля N в категории $\sigma(M)$. Модуль N из категории $\sigma(M)$ назовем *малым в* $\sigma(M)$, если он содержится в радикале Джекобсона модуля $E_M(N)$.

Лемма 3.3. *Если в категории $\sigma(M)$ каждый модуль слабо регулярен, то каждый модуль малый в $\sigma(M)$ является полупростым.*

Доказательство. Пусть N — ненулевой малый в $\sigma(M)$ модуль, n — некоторый ненулевой элемент из N и N_0 — максимальный подмодуль в nR. Рассмотрим внешнюю прямую сумму модулей $E_M(N)\oplus\bar{n}R$, где $\bar{n}$ — образ элемента n при каноническом гомоморфизме f модуля nR в модуль nR/N_0. Поскольку подмодуль $(n,\bar{n})R$ не содержится в $J(E_M(N)\oplus\bar{n}R)$, то найдется такой ненулевой подмодуль S модуля $(n,\bar{n})R$, что для некоторого подмодуля T выполнено равенство $E_M(N)\oplus\bar{n}R = S\oplus T$. Из включений $J(S)\subset J((n,\bar{n})R)\subset (J(nR),0)\subset (nR,0)\subset (J(E_M(N)),0)$ следует, что подмодуль $J(S)$ является косущественным в $(nR,0)$ и, значит, в $(J(E_M(N)),0)$. Тогда имеем

$$(J(E_M(N)),0) = J(E_M(N)\oplus\bar{n}R) = J(S)\oplus J(T) = J(T).$$

Покажем, что если для ненулевого элемента m из $E_M(N)\oplus\bar{n}R$ выполнено равенство $mR\cap(N,0)=0$, то mR — простой подмодуль. Допустим, что элемент m имеет вид (a,b), где $a\in E_M(N)$, $b\in\bar{n}R$. Тогда ввиду существенности подмодуля N в $E_M(N)$ выполнены условия $b\neq 0$ и $\mathrm{Ann}(b)\subseteq\mathrm{Ann}(a)$, т. е. либо $m=(0,b)$, либо $m=(a,b)$ и $\mathrm{Ann}(b)=\mathrm{Ann}(a)$. Ясно, что в любом случае подмодуль mR является простым. Так как $(N,0)\subset(J(E_M(N)),0)=J(T)$, то $S\cap(N,0)=0$ и S — полупростой подмодуль. Поскольку $S\subset(n,\bar{n})R$, то для некоторого элемента r из R подмодуль $(n,\bar{n})rR$ является простым и не содержащимся в $(N,0)$. Следовательно, $\bar{n}r\neq 0$ и ввиду простоты подмодуля $(n,\bar{n})rR$ имеем равенство $\mathrm{Ann}(nr)=\mathrm{Ann}(\bar{n}r)$. Таким образом, модуль nrR простой и тем самым выполнено равенство $nrR\cap N_0=0$. Из проведенных выше рассуждений следует, что в каждом циклическом подмодуле модуля N всякий максимальный подмодуль несуществен. Тогда из леммы 2.10 вытекает полупростота модуля N. $\square$

Пусть M и N — правые R-модули. Модуль N называется M-*инъективным*, если для каждого мономорфизма $f: U\to M$ отображение

$$\mathrm{Hom}(f,N):\mathrm{Hom}_R(M,N)\to\mathrm{Hom}_R(U,N)$$

является эпиморфизмом. Отметим, что согласно [5, 16.3] модуль N из категории $\sigma(M)$ является M-инъективным тогда и тогда, когда N является инъективным в $\sigma(M)$.

Теорема 3.4. *Для произвольного правого R-модуля M следующие условия равносильны:*

(1) *в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным;*

(2) *в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является либо полупростым, либо содержит в себе ненулевой M-инъективный подмодуль.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Рассмотрим произвольный модуль N из категории $\sigma(M)$. Если он не является полупростым, то ввиду леммы 3.3 имеем $N \not\subset J(E_M(N))$. Тогда из слабой регулярности модуля $E_M(N)$ следует, что модуль N содержит в себе ненулевой M-инъективный подмодуль.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть N — произвольный модуль из категории $\sigma(M)$. Если подмодуль N_0 модуля N не содержится в $J(M)$, то согласно нашему предположению он содержит в себе либо ненулевой M-инъективный подмодуль, либо несущественный простой подмодуль, т. е. в любом случае подмодуль N_0 будет содержать в себе ненулевое прямое слагаемое модуля N. $\square$

Подфактором модуля M называется модуль вида N/K, где N и K — подмодули M и $K \subseteq N$. Правый R-модуль M называется *V-модулем*, если каждый простой правый R-модуль является M-инъективным [5, 4.23].

Используя результаты работы [15], опишем квазипроективные V-модули M, для которых каждый модуль из $\sigma(M)$ слабо регулярен.

Теорема 3.5. *Пусть R — произвольное кольцо. Тогда для квазипроективного правого R-модуля M следующие условия равносильны:*

(1) *M — полуартиновый V-модуль;*

(2) *M — V-модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый модуль слабо регулярен;*

(3) *каждый ненулевой циклический подфактор модуля M содержит ненулевой M-инъективный подмодуль.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Рассмотрим произвольный ненулевой модуль N из категории $\sigma(M)$. Поскольку M — полуартинов V-модуль, то N содержит ненулевой M-инъективный простой подмодуль. Таким образом, каждый ненулевой модуль из $\sigma(M)$ содержит ненулевой M-инъективный подмодуль, и импликация непосредственно следует из предыдущей теоремы.

(2) $\Rightarrow$ (3) Из предыдущей теоремы следует, что в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является либо полупростым, либо содержит в себе ненулевой M-инъективный подмодуль, т. е. ненулевой модуль из $\sigma(M)$ в любом случае будет содержать ненулевой M-инъективный подмодуль. Тогда импликация следует из [15, лемма 11].

(3) $\Rightarrow$ (1) Импликация доказана в работе [15]. $\square$

Следующая лемма непосредственно вытекает из доказательства леммы 10 в [15].

Лемма 3.6. *Пусть R — регулярное самоинъективное справа кольцо, A — счетнопорожденный неконечнопорожденный правый идеал, существенный в eR для некоторого идемпотента e. Тогда модуль $R/(A \oplus (1-e)R)$ не содержит ненулевых инъективных подмодулей.*

С помощью понятия слабо регулярного модуля получим следующее описание правых SV-колец.

Теорема 3.7. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R — правое SV-кольцо;*

(2) *R — правое V-кольцо и каждый правый R-модуль является слабо регулярным;*

(3) *R — регулярное кольцо и каждый правый R-модуль является слабо регулярным.*

Доказательство. Равносильность первых двух условий следует из теоремы 3.5. Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) вытекает из [16, предложение 2.3].

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть R — регулярное кольцо, над которым каждый правый R-модуль слабо регулярен. Предположим, что $R \neq I(R)$, и обозначим через S кольцо $R/I(R)$. Модуль S_S не содержит простых инъективных S-подмодулей и, в частности, не является полупростым. Поскольку над кольцом S каждый модуль слабо регулярен, из теоремы 3.4 следует, что S_S содержит ненулевой инъективный подмодуль вида eS, где e — некоторый идемпотент кольца S. Заметим сразу, что согласно нашему предположению $\mathrm{Soc}(eS) = 0$. Поскольку в eS каждый циклический подмодуль выделяется в виде прямого слагаемого, то eS является проективным порождающим объектом категории $\sigma(eS)$. Тогда из [5, 46.2] следует, что категория $\sigma(eS)$ эквивалентна категории правых eSe-модулей. В $\sigma(eS)$ каждый модуль является слабо регулярным и, очевидно, категория правых eSe-модулей наследует это свойство. Так как кольцо eSe изоморфно кольцу эндоморфизмов инъективного модуля eS и $J(eSe) = 0$, согласно [2, теорема 1.22] оно является самоинъективным справа регулярным кольцом. Поскольку eS не содержит простых подмодулей, регулярное кольцо eSe не содержит примитивных идемпотентов, т. е. $\mathrm{Soc}(eSe) = 0$. Тогда в кольце eSe мы можем выделить бесконечное семейство взаимно ортогональных ненулевых идемпотентов вида $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$. Для каждого i модуль $\bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} e_{ij}eSe$ существен в f_ieSe, где f_i — некоторый идемпотент кольца eSe. Семейство правых идеалов $\{f_ieSe\}_{i=1}^{\infty}$ является, очевидно, независимым, и для некоторого идемпотента f кольца eSe правый идеал $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} f_ieSe$ существен в $feSe$. Идеал $\bigoplus\limits_{i,j=1}^{\infty} e_{ij}eSe$ является существенным в $feSe$, и правый eSe-модуль $eSe/\left(\bigoplus\limits_{i,j=1}^{\infty} e_{ij}eSe \oplus (e-f)eSe\right)$ содержит подмодуль, изоморфный модулю $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}\left(f_ieSe/\left(\bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} e_{ij}eSe\right)\right)$. Тогда модуль $eSe/\left(\bigoplus\limits_{i,j=1}^{\infty} e_{ij}eSe \oplus (e-f)eSe\right)$ не является полупростым и, следовательно, согласно теореме 3.4 содержит ненулевой инъективный подмодуль, что противоречит лемме 3.6. $\square$

В работах Бачелло [16], Гудерла [2] и ряда других авторов приведены примеры полуартинова регулярного не правого SV-кольца и правого SV-кольца, который не является левым SV-кольцом. Из предыдущей теоремы непосредственно вытекают следующие необходимые и достаточные условия, при которых указанные классы колец совпадают между собой.

Следствие 3.8. *Для полуартинова регулярного кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R — правое SV-кольцо;*

(2) *каждый правый R-модуль является слабо регулярным.*

Следствие 3.9. *Для правого SV-кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R — левое SV-кольцо;*

(2) *каждый левый R-модуль является слабо регулярным.*

Замечание. Из предыдущего следствия получаем, что для произвольного кольца R из слабой регулярности всех правых R-модулей, вообще говоря, не следует слабой регулярности всех левых R-модулей. Действительно, рассмотрим бесконечномерное векторное пространство V над некоторым полем K и идеал $J = \{x \in \mathrm{End}_K(V) \mid \dim_K(xV) < \infty\}$ в алгебре $\mathrm{End}_K(V)$. Тогда из [2, с. 68] следует, что кольцо $R = K + J$ является правым SV-кольцом, но не является левым SV-кольцом.

Правый R-модуль M называется *полурегулярным*, если каждый его циклический подмодуль лежит над прямым слагаемым модуля M. Легко видеть, что каждый полурегулярный модуль является слабо регулярным.

Теорема 3.10. *Для модуля M над полусовершенным кольцом R следующие условия равносильны:*

(1) *модуль M является слабо регулярным;*

(2) *модуль M является полурегулярным.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Докажем от противного. Тогда над полусовершенным кольцом R найдется слабо регулярный неполурегулярный модуль M и, следовательно, в модуле M найдется такой элемент x, что циклический подмодуль xR не лежит над прямым слагаемым модуля M. Ясно, что xR не является косущественным в M. Поскольку модуль M слабо регулярен, в подмодуле xR мы можем выбрать такой ненулевой циклический подмодуль x_1R, что для некоторого подмодуля M_1 выполнено равенство $M = x_1R \oplus M_1$. Допустим, что для каждого натурального $i \leq n$ мы выбрали такие ненулевые элементы $x_1, \dots, x_i$ модуля xR и подмодули $M_1, \dots, M_i$, что выполнено равенство $M = x_1R \oplus \dots \oplus x_iR \oplus M_i$. Поскольку подмодуль xR не лежит над прямым слагаемым модуля M, модуль $xR \cap M_n$ не является косущественным в M_n. Так как подмодуль $xR \cap M_n$ — прямое слагаемое модуля xR, он циклический. Следовательно, в силу леммы 2.1 подмодуль $xR \cap M_n$ будет содержать в себе ненулевое прямое слагаемое $x_{n+1}R$ модуля M_n и для некоторого подмодуля M_{n+1} модуля M_n имеет место равенство $M = x_1R \oplus \dots \oplus x_{n+1}R \oplus M_{n+1}$. Таким образом, для каждого натурального числа n циклический модуль xR имеет вид $xR = x_1R \oplus \dots \oplus x_nR \oplus xR \cap M_n$, где для каждого $i \leq n$ подмодуль x_iR не является нулевым.

Поскольку кольцо R полусовершенно, модуль xR/xJ имеет вид $xR/xJ = P_1 \oplus \dots \oplus P_k$, где для каждого $i \leq k$ модуль P_i простой. С другой стороны, имеем следующее соотношение:

$$xR/xJ \cong x_1R/x_1J \oplus \dots \oplus x_{k+1}R/x_{k+1}J \oplus (xR \cap M_{k+1})/((xR \cap M_{k+1})J),$$

где для каждого $i \leq k + 1$ полупростой модуль x_iR/x_iJ не является нулевым. Это противоречит однозначности разложения полупростого модуля в прямую сумму простых модулей. $\square$

Теорема 3.11. *Для произвольного кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *над кольцом R каждый правый модуль полурегулярен;*

(2) *кольцо R артиново полуцепное и $J^2(R) = 0$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Согласно [3, 42.11] кольцо $R/J(R)$ регулярно. Поскольку над кольцом $R/J(R)$ каждый модуль слабо регулярен, из теоремы 3.7

следует, что $R/J(R)$ — правое V-кольцо. Тогда из [1, теорема 9.7.1] вытекает, что над кольцом $R/J(R)$ каждый правый модуль имеет нулевой радикал Джекобсона. Так как над кольцом $R/J(R)$ каждый правый модуль полурегулярен и, следовательно, регулярен, каждый циклический модуль над $R/J(R)$ выделяется в виде прямого слагаемого в своей инъективной оболочке. Таким образом, каждый правый циклический модуль над кольцом $R/J(R)$ инъективен, и, следовательно, согласно [15, лемма 10] кольцо $R/J(R)$ классически полупростое. Поскольку по следствию 2.15 идеал $J(R)$ нильпотентен, то R — полусовершенное кольцо. Тогда из теоремы 3.2 следует, что кольцо R является артиновым полуцепным и $J^2(R) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Импликация непосредственно вытекает из теоремы 3.2 и следствия 3.9. $\square$

Лемма 3.12. *Если над нормальным кольцом R каждый правый модуль слабо регулярен, то оно полуартиново справа.*

Доказательство. Поскольку согласно следствию 2.15 $J(R)_R$ является полупростым модулем и идемпотенты поднимаются по модулю $J(R)$, то без ограничения общности можно считать, что радикал Джекобсона кольца R равен нулю. Предположим, что $L(R) \neq R$, и обозначим через S кольцо $R/L(R)$. Так как согласно теореме 1.3 идеал $L(R)$-регулярен, из [3, лемма 1.1] следует, что кольцо S нормально. Из равенства $L(S) = 0$ и следствия 2.15 вытекает, что $J(S) = 0$. Поскольку над кольцом S каждый правый S-модуль слабо регулярен и модуль S_S не является полупростым, теорема 3.4 гарантирует существование ненулевого идемпотента e кольца S, для которого идеал eS является инъективным модулем. Из [2, теорема 1.22] получаем, что кольцо eS нормально, самоинъективно справа и регулярно. Тогда из [2, теорема 6.18] вытекает, что оно является V-кольцом. Следовательно, согласно теореме 3.5 кольцо eS является SV-кольцом, что противоречит равенству $L(S) = 0$. $\square$

Теорема 3.13. *Для нормального кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *над кольцом R все правые модули слабо регулярны;*

(2) *над кольцом R каждый правый модуль либо полупрост, либо содержит в себе ненулевой инъективный подмодуль;*

(3) *$R/I(R)$ — конечное прямое произведение локальных цепных колец длины два.*

Доказательство. Ввиду теоремы 3.4 достаточно доказать импликации (1) $\Rightarrow$ (3) и (3) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (3) Рассмотрим нормальное кольцо R, над которым каждый правый модуль слабо регулярен. Согласно лемме 3.12 кольцо R полуартиново. Из теоремы 1.3 и следствия 2.15 вытекает, что $\mathrm{Soc}(R/I(R)) = J(R/I(R))$. Обозначим через S кольцо $R/I(R)$. Так как согласно лемме 1.1 идеал $I(R)$ регулярен, из [3, лемма 1.1] следует нормальность кольца S. Покажем, что кольцо S полусовершенно. Допустим противное. Рассмотрим фактор-кольцо $S/J(S)$, которое мы можем рассматривать и как $S/J(S)$-модуль, и как S-модуль, причем структуры подмодулей у $(S/J(S))_{S/J(S)}$ и $(S/J(S))_S$, очевидно, совпадают. Согласно предположению $S/J(S)$ не является полупростым и, следовательно, ввиду равносильности предыдущих двух условий модуль $(S/J(S))_S$ содержит в себе инъективный подмодуль, который без ограничения общности мы можем считать простым и имеющим вид eS, где e — примитивный идемпотент кольца

$S/J(S)$. Согласно теореме 11.5.3 из [1] в кольце S существует идемпотент f, для которого выполнено условие $e = f + J(S)$ и который, очевидно, является локальным. Поскольку $J(S) = \mathrm{Soc}(S)$, то fS в силу теоремы 3.2 является локальным цепным длины два. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент вида fj, где $j \in J(S)$. Поскольку $\mathrm{Ann}(f) \subset \mathrm{Ann}(fj)$, имеет место гомоморфизм g из fS в fjS, при котором $g(f) = fj$, и ядро этого гомоморфизма равно $fJ(S) = fjS$. Тогда $fJ(S) \cong fS/fJ(S) \cong eS$ и тем самым eS не может быть инъективным. Полученное противоречие показывает, что кольцо $R/I(R)$ полусовершенно, так что согласно теореме 3.2 является прямым произведением конечного числа локальных цепных колец длины два.

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть R — нормальное кольцо, которое удовлетворяет условию (3) исходной теоремы. Если $R \neq I(R)$, то рассмотрим произвольный примитивный идемпотент e кольца $R/I(R)$. Покажем, что eR является инъективным модулем. Ясно, что eR — цепной подмодуль модуля $(R/I(R))_R$ длины два. Если $E(eR)I(R) \neq 0$, то найдется такое ординальное число α, что $E(eR)I_\alpha = 0$ и $E(eR)I_{\alpha+1} \neq 0$. Тогда для некоторого примитивного идемпотента e_0 идеала $I_{\alpha+1}(R)/I_\alpha(R)$ имеет место неравенство $E(eR)e_0 \neq 0$. Следовательно, согласно лемме 1.1 модуль $E(eR)$ содержит в себе инъективный простой подмодуль, что противоречит однородности и непростоте модуля $E(eR)$. Таким образом, $E(eR)I(R) = 0$, и поскольку eR инъективен как $R/I(R)$, то $eR = E(eR)$.

Пусть M — произвольный правый R-модуль. Если $MI(R) = 0$, то модуль M можно рассматривать как модуль над кольцом $R/I(R)$ и, следовательно, согласно теореме 3.2 он является прямой суммой цепных модулей длины не больше двух. Следовательно, он либо полупрост, либо согласно рассуждениям, проведенным выше, содержит в себе инъективный цепной подмодуль длины два. Рассмотрим случай, когда $MI(R) \neq 0$. Пусть α — наименьшее ординальное число, для которого имеет место неравенство $MI_\alpha \neq 0$. Ясно, что α — непредельное ординальное число и для некоторого ординального числа α_0 имеет место равенство $\alpha = \alpha_0 + 1$. Тогда модуль M мы можем рассматривать как R/I_{α_0}-модуль и, следовательно, для некоторого примитивного идемпотента e кольца R/I_{α_0} имеет место неравенство $Me \neq 0$, т. е. в этом случае согласно лемме 1.1 модуль M содержит в себе инъективный простой подмодуль. Таким образом, каждый модуль над кольцом R либо полупрост, либо содержит в себе инъективный подмодуль. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каш Ф.* Модули и кольца. М.: Мир, 1981.
2. *Goodearl K. R.* Von Neumann regular rings. Malabar, FL: Krieger, 1991.
3. *Baccella G.* Exchange property and the natural preorder between simple modules over semi-Artinian rings // J. Algebra. 2002. V. 253, N 1. P. 133–166.
4. *Nastasescu C., Popescu N.* Anneaux semi-artiniens // Bull. Soc. Math. Franc. 1968. V. 96. P. 357–368.
5. *Wisbauer R.* Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
6. *Anderson F. W., Fuller K. R.* Rings and categories of modules. New York: Spriger-Verl., 1991.
7. *Nickolson W. K.* I-rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 207. P. 361–373.
8. *Hamza H.* I_0-rings and I_0-modules // Okayama Univ. 1998. V. 40, N 1. P. 91–97.
9. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1979. Т. 2.
10. *Keskin D., Lomp C.* On lifting LE-modules // Vietnam J. Math. 2002. V. 30, N 2. P. 167–176.
11. *Hamsher R. M.* Commutative rings over which every module has a maximal submodule // Proc. Amer. Math. Soc. 1967. V. 18, N 6. P. 1133–1137.
12. *Hirano Y.* On rings over which each module has a maximal submodule // Comm. Algebra. 1998. V. 26, N 10. P. 3435–3445.

13. *Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R.* Extending modules. London: Pitman, 1994.

14. *Vanaja N., Purav V. M.* Characterization of generalized uniserial rings in terms of factor rings // Comm. Algebra. 1992. V. 20, N 8. P. 2253–2270.

15. *Dung N. V., Smith P. F.* On Semiartinian V-modules // J. Pure Appl. Algebra. 1992. V. 82, N 1. P. 27–37.

16. *Baccella G.* Semi-Artinian V-rings and semi-Artinian Von Neumann regular rings // J. Algebra. 1995. V. 173, N 3. P. 587–612.

Статья поступила 26 января 2007 г.

Абызов Адель Наилевич
НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, отдел алгебры и математической логики,
ул. Профессора Нужина, 17, Казань 420008
aabyzov@ksu.ru