*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2008. Том 49, № 4*

*УДК 512.565.7*

# ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР И ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР

**А. Г. Пинус**

**Аннотация.** Найден критерий элементарной эквивалентности решеток подалгебр свободных алгебр регулярных многообразий. Рассмотрен вопрос об элементарной эквивалентности групп автоморфизмов подобных алгебр.

**Ключевые слова:** решетка подалгебр, группа автоморфизмов, свободная алгебра, регулярное многообразие, унар.

Вопрос о классификации алгебраических систем с помощью их производных структур и элементарных теорий производных структур достаточно естествен и традиционен. Более подробно обсуждение этих вопросов и обзор известных результатов см. в [1]. В частности, представляет интерес исследование отношений $\equiv_{\mathrm{Sub}}^{\mathscr{M}}$ на классе всех конечных кардиналов для различных многообразий $\mathscr{M}$ универсальных алгебр. Напомним, что для бесконечных кардиналов $k, \lambda$ отношение $k \equiv_{\mathrm{Sub}}^{\mathscr{M}} \lambda$ имеет место тогда и только тогда, когда элементарно эквивалентны решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(k)$ и $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\lambda)$, где $\mathrm{Sub}\,\mathscr{A}$ — решетка подалгебр алгебры $\mathscr{A}$, а $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ — свободная $\mathscr{M}$-алгебра, свободно порожденная множеством $X$.

Всюду далее рассматриваются многообразия не более чем счетной сигнатуры. В обзоре [1] указан ряд многообразий $\mathscr{M}$, для которых отношение $\equiv_{\mathrm{Sub}}^{\mathscr{M}}$ совпадает с отношениями $\nabla$ либо $\equiv_2$, и отмечен ряд многообразий $\mathscr{M}$, описание отношения $\equiv_{\mathrm{Sub}}^{\mathscr{M}}$ для которых представляет естественный интерес. Здесь $\nabla$ — универсальное (единичное) отношение эквивалентности на классе бесконечных кардиналов, а $\equiv_2$ — отношение эквивалентности бесконечных кардиналов в полной логике второго порядка. В настоящей работе получено некоторое усиление результата из [2], позволяющее дать ответ на один из вопросов работы [1]: будут указаны достаточные условия на многообразие $\mathscr{M}$, при которых отношение $\equiv_{\mathrm{Sub}}^{\mathscr{M}}$ совпадает с отношением $\equiv_2$.

В качестве первого условия на многообразие $\mathscr{M}$ рассмотрим следующее:

(1) существует элементарная формула $\psi(u)$ решеточной сигнатуры такая, что для любого $B \in \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$

$$\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X) \models \psi(B) \iff B = \langle x \rangle \text{ для некоторого } x \in X.$$

Для любой алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любого $C \subseteq A$ через $\langle C \rangle$ обозначим подалгебру алгебры $\mathscr{A}$, порожденную множеством $C$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00159–а).

В качестве еще одного условия на решетки подалгебр свободных алгебр $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ рассмотрим следующее:

(2) существует $B \in \operatorname{Sub}\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\{x,y\})$ такая, что $\langle y\rangle \subset B$ и $B \cap \langle x\rangle = \varnothing$, т. е. существует терм $t(x,y)$ сигнатуры многообразия $\mathscr{M}$ такой, что $t(x,y) \notin \langle y\rangle$ и $\langle t(x,y), y\rangle \cap \langle x\rangle = \varnothing$.

**Теорема.** *Если нетривиальное конечно базируемое многообразие $\mathscr{M}$ таково, что решетки $\operatorname{Sub}\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), то отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ на классе бесконечных кардиналов совпадает с отношением $\equiv_2$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ — многообразие, удовлетворяющее условиям теоремы, и $X$ — бесконечное множество. Через $\operatorname{Part} X$ обозначим решетку разбиений множества $X$. Пусть $\theta_0$ — некоторое разбиение множества $X$ на двухэлементные подмножества. Через $\operatorname{Part} X \restriction\geq \theta_0$ обозначим фильтр решетки $\operatorname{Part} X$, порожденный разбиением $\theta_0$. Очевидно, что

$$\operatorname{Part} X \cong \operatorname{Part} X \restriction\geq \theta_0.$$

Пусть теперь $\theta \in \operatorname{Part} X \restriction\geq \theta_0$. Через $B_\theta$ обозначим подалгебру алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, порожденную множеством $C_\theta = \{t(x,y) \mid x,y \in X, x \neq y \text{ и } \theta(x,y)\}$, здесь $t(u,v)$ — терм из условия (2).

Покажем, что для любых $x,y \in X$ отношение $B_\theta \cap (\langle x\rangle \vee \langle y\rangle) \neq \varnothing$ равносильно отношению $\theta(x,y)$. Действительно, если $\theta(x,y)$, то $t(x,y) \in B_\theta \cap (\langle x\rangle \vee \langle y\rangle)$. Допустим теперь, что терм $q(u,v)$ таков, что $q(x,y) \in B_\theta \cap (\langle x\rangle \vee \langle y\rangle)$, и имеет место $\neg\theta(x,y)$. Тогда найдется терм $p$ сигнатуры многообразия $\mathscr{M}$, построенный из порождающих, которые входят в $C_\theta$, такой, что на $\mathscr{M}$ истинно тождество $q(x,y) = p$. Таким образом,

$$p = p(x,y,\bar{u}) = h(t(x,u_1),\dots,t(y,u_k),\dots,t(u_s,u'_s),\dots),$$

здесь $u_i, u'_i \in X$ и те элементы $x, y, u_i, u'_i$, которые входят как переменные в какое-либо из вхождений терма $t$ в $h$, попарно различны, но $\theta$-эквивалентны. Итак, на $\mathscr{M}$ истинно тождество

$$q(x,y) = h(t(x,u_1),\dots,t(y,u_k),\dots,t(u_s,u'_s),\dots).$$

Подставляя в это тождество вместо элемента $y$ элемент $x$, а затем вместо всех $u_i$, $u'_i$ — элемент $y$, получаем равенство (в алгебре $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$)

$$q(x,x) = h(t(x,y),\dots,t(x,y),\dots,t(y,y),\dots),$$

в правой части которого в силу отношения $\neg\theta(x,y)$ нет вхождений элементов $t(x,x)$. Данное равенство противоречит условию (2).

Тем самым равносильность отношений $\theta(x,y)$ и $B_\theta \cap (\langle x\rangle \vee \langle y\rangle) \neq \varnothing$ доказана.

В силу условия (1) множество $\{\langle x\rangle \mid x \in X\}$ выделяется в решетке $\operatorname{Sub}\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ элементарной формулой $\psi(u)$ решеточной сигнатуры. Пусть элементарная формула $\psi_1(u)$ выделяет в решетке $\operatorname{Sub}\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ такие подалгебры $B$, что отношение $B \cap (\langle x\rangle \vee \langle y\rangle) \neq \varnothing$ является разбиением на множестве $\{\langle x\rangle \mid x \in X\}$, а формула $\psi_2(u)$ — те $B$, для которых это разбиение является разбиением на двухэлементные подмножества. Тогда для любой элементарной формулы $\phi$ решеточной сигнатуры и любого бесконечного множества $X$

$$\operatorname{Part}(X) \models \phi \Longleftrightarrow \operatorname{Sub}\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X) \models \forall B(\psi_2(B) \longrightarrow \phi_B),$$

где $\phi_B$ — релятивизация формулы $\phi$ по переменным, удовлетворяющим формуле $\psi_1(u)\&u \geq B$. Тем самым для любых бесконечных кардиналов $k, \lambda$

$$\mathrm{Part}(k) \not\equiv \mathrm{Part}(\lambda) \Longrightarrow \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(k) \not\equiv \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\lambda).$$

В работе [3] доказано, что для любых бесконечных кардиналов $k$ и $\lambda$ отношения $k \equiv_2 \lambda$ и $\mathrm{Part}(k) \equiv \mathrm{Part}(\lambda)$ равносильны.

Таким образом, для подобных кардиналов $k, \lambda$

$$k \not\equiv \lambda \Longrightarrow \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(k) \not\equiv \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\lambda).$$

Обратная импликация, как отмечено в [1, 2], имеет место в силу конечной базируемости многообразия $\mathscr{M}$. Теорема доказана.

Очевидно, что теорема работы [2] является частным случаем доказанной выше теоремы. В качестве примера многообразий $\mathscr{M}$, удовлетворяющих условиям данной теоремы и не удовлетворяющих условиям теоремы из [2], укажем класс регулярных многообразий, вопрос об описании отношений $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$, для которых сформулирован в [1]. Напомним, что многообразие $\mathscr{M}$ называется *регулярным*, если переменные, входящие в левую и правую части любого тождества, истинного на $\mathscr{M}$, совпадают. Понятие регулярного многообразия введено в работе Плонки [4]. Йонссоном и Нельсоном [5] доказано, что многообразие регулярно тогда и только тогда, когда оно аксиоматизируемо регулярными тождествами. Более подробно о регулярных многообразиях см. [6].

Заметим, что любое нетривиальное регулярное многообразие $\mathscr{M}$ удовлетворяет условию (1).

Для любой алгебры $\mathscr{A}$ и любого ее элемента $a$ через $M_a$ будем обозначать произвольную из подалгебр алгебры $\mathscr{A}$, максимальных относительно свойства «подалгебра, не содержащая элемента $a$». Существование подалгебр вида $M_a$ следует из леммы Цорна. Для любого нетривиального многообразия $\mathscr{M}$, любого множества $X$ и любого $x \in X$ по крайней мере одна из подалгебр алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ вида $M_x$ является коатомом в решетке $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$. Действительно, $x \notin \langle X\backslash\{x\}\rangle$, и тем самым найдется подалгебра вида $M_x$, включающая в себя подалгебру $\langle X\backslash\{x\}\rangle$, которая и будет искомым коатомом. С другой стороны, отсюда очевидно, что $M_x$ для $x \in X$ можно выбирать попарно различными для различных $x$ из $X$.

Пусть теперь $\mathscr{M}$ — нетривиальное регулярное многообразие и для некоторого $x \in X$ подалгебры $B_1, B_2$ алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ являются коатомами решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, не содержащими элемент $x$. Тогда для любого $a_1 \in B_1\backslash B_2$ имеет место равенство $\langle\{a_1\} \cup B_2\rangle = \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ и, значит, элемент $x$ допускает запись в виде значения термальной функции на элементе $a_1$ и элементах из $B_2$. Но в силу регулярности $\mathscr{M}$ это означает, что $a_1 = t(x)$ для некоторого терма $t$ сигнатуры многообразия $\mathscr{M}$, т. е. имеют место включения $B_1\backslash B_2, B_2\backslash B_1 \subseteq \langle x\rangle$. Отсюда также очевидно, что $B_1 \cap B_2 \supseteq \langle X\backslash\{x\}\rangle$. Пусть теперь $B$ — произвольный коатом решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ и $t(x_1, \ldots, x_n) \notin B$, где $t$ — терм сигнатуры многообразия $\mathscr{M}$ и $x_i \in X$. Тогда $x \notin B$ для некоторого $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ввиду коатомности $B$ такой $x \in X$ единствен. Так как $x$ можно выразить в виде значения термальной функции от $t(x_1, \ldots, x_n)$ и элементов из $B$, в силу регулярности $\mathscr{M}$ на самом деле $t(x_1, \ldots, x_n)$ зависит только от $x$, т. е. $t(x_1, \ldots, x_n) = t(x)$, откуда $\langle t(x)\rangle \subseteq \langle x\rangle$ и $B \supseteq \langle X\backslash\{x\}\rangle$. Пусть $K$ — совокупность всех коатомов решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$. На $K$ определим отношение эквивалентности $\sim$: для $B_1, B_2 \in K$ пусть $B_1 \sim B_2$ означает, что существуют $C_1, C_2 \in \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, для которых

$C_1 \subseteq B_1 \cap B_2, C_1 \cap C_2 = \varnothing, C_1 \vee C_2 = \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, и для любой $D \in \operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ если $D \vee B_1$ (либо $D \vee B_2$) совпадает с $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}$, то существует $D_1 \subseteq D$ такое, что $D_1 \subseteq C_2$ и $D_1 \vee B_1$ (либо соответственно $D_1 \vee B_2$) совпадает с $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$.

Отношение $\sim$ на $K$ и совокупность $K$ формульны (в логике первого порядка) в решетке $\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$. При этом, как замечено выше, роль соответствующих подалгебр $C_1$ и $C_2$ для коатомов $B_1, B_2$, связанных отношением $\sim$, играют подалгебры $\langle X \backslash \{x\} \rangle$ и $\langle x \rangle$ для некоторого $x \in X$ соответственно. Тем самым существует формула $\psi(u)$ решеточной сигнатуры такая, что для любого $B \in \operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$

$$\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X) \models \psi(B) \iff B = \langle x \rangle \text{ для некоторого } x \in X,$$

т. е. нетривиальные регулярные многообразия удовлетворяют условию (1).

Очевидно также, что любое нетривиальное регулярное многообразие неунарной сигнатуры удовлетворяет условию (2). В [7] доказано, что для нетривиальных унарных многообразий $\mathscr{M}$ (многообразий, сигнатурные функции которых одноместны) отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ совпадает с отношением $\triangledown$. Таким образом, из доказанной выше теоремы вытекает полная классификация отношений $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ для регулярных многообразий.

**Следствие 1.** *Для любого нетривиального регулярного многообразия $\mathscr{M}$ отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ совпадает с отношением $\triangledown$ в случае унарности сигнатуры $\mathscr{M}$ и совпадает с отношением $\equiv_2$ в противном случае.*

Очевидно, что регулярными многообразиями полугрупп являются многообразия всех полугрупп и всех коммутативных полугрупп.

Большое число иных регулярных многообразий полугрупп (в иной терминологии, уравновешенных и гомотопных многообразий) приведено в обзоре Л. Н. Шеврина и М. В. Волкова [8].

Наконец, остановимся на отношении $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Aut}}$ на бесконечных кардиналах для регулярных многообразий $\mathscr{M}$ и многообразий унаров. Напомним, что для кардиналов $k$ и $\lambda$ отношение $k \equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Aut}} \lambda$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(k) \equiv \operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\lambda)$. Здесь $\operatorname{Aut} \mathscr{A}$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$.

Любой автоморфизм $\varphi$ алгебры $\mathscr{A}$ естественным образом индуцирует автоморфизм $\overline{\varphi}$ решетки $\operatorname{Sub} \mathscr{A}$. Если $\mathscr{M}$ — регулярное нетривиальное многообразие, то в силу замеченной выше формульности совокупности подалгебр $\mathscr{B} = \{\langle x \rangle \mid x \in X\}$ в решетке $\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ для любого автоморфизма $\varphi$ алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ индуцированный $\varphi$ автоморфизм $\overline{\varphi}$ решетки $\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ определяется своим ограничением на $\mathscr{B}$, т. е. группа $\{\overline{\varphi} \mid \varphi \in \operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)\}$ изоморфна полной симметрической группе $\operatorname{Sym} X$ на множестве $X$. Таким образом, очевидно, что группа $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ оказывается изоморфной сплетению $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(1) \wr \operatorname{Sym}(X)$ группы $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(1)$ с группой $\operatorname{Sym}(X)$ всех подстановок на множестве $X$.

Напомним, что алгебра, не имеющая нетождественных автоморфизмов, называется *жесткой*. Истинность отношения $\equiv_p$ на бесконечных кардиналах $k$ и $\lambda$ означает элементарную эквивалентность групп $\operatorname{Sym}(k)$ и $\operatorname{Sym}(\lambda)$. В частности, имеет место

**Следствие 2.** *Если $\mathscr{M}$ — нетривиальное регулярное многообразие с жесткой однопорожденной свободной алгеброй, то отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Aut}}$ совпадает с отношением $\equiv_p$.*

Аналогичная ситуация имеет место для унарных многообразий. Действительно, если $\mathscr{M}$ — нетривиальное унарное многообразие, то для любого множества $X$ совокупность $\{\langle x\rangle \mid x \in X\}$ подалгебр алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ является совокупностью максимальных однопорожденных подалгебр этой алгебры. Тем самым индуцированный любым автоморфизмом $\varphi$ алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ автоморфизм $\overline{\varphi}$ решетки $\operatorname{Sub}\mathscr{F}_M(X)$ является перестановкой на множестве $\{\langle x\rangle \mid x \in X\}$. В силу этого, как и выше, для регулярных многообразий имеет место изоморфизм $\operatorname{Aut}\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X) \cong \operatorname{Aut}\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(1) \wr \operatorname{Sym}(X)$. В частности, имеем

**Следствие 3.** *Если $\mathscr{M}$ — нетривиальное унарное многообразие с жесткой однопорожденной свободной алгеброй, то отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Aut}}$ совпадает с отношением $\equiv_p$.*

В связи со следствиями 2, 3 представляет интерес следующий открытый

**Вопрос.** *Верно ли, что для любой счетной группы $G$ и любых бесконечных кардиналов $k$ и $\lambda$ следующие условия эквивалентны:*
(1) $\operatorname{Sym}(k) \equiv \operatorname{Sym}(\lambda)$,
(2) $G \wr \operatorname{Sym}(k) \equiv G \wr \operatorname{Sym}(\lambda)$.

При положительном ответе на этот вопрос в формулировках следствий 2 и 3 условие жестокости однопорожденной алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(1)$ становится излишним.

По поводу отношений $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ и $\equiv^{M}_{Con}$ для унарных многообразий см. [7].

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Важенин Ю. М., Пинус А. Г.* Элементарная эквивалентность и разрешимость теорий производных структур // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 3. С. 3–40.
2. *Пинус А. Г., Роуз Г.* Элементарная эквивалентность решеток подалгебр свободных алгебр // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 595–601.
3. *Пинус А. Г.* Элементарная эквивалентность решеток разбиений // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 3. С. 211–212.
4. *Plonka J.* On a method of construction of abstract algebras // Fund. Math. 1967. V. 61, N 2. P. 183–189.
5. *Jonsson B., Nelson E.* Relatively free products in regular varieties // Algebra Univ. 1974. V. 4, N 1. P. 14–19.
6. *Graczynska E.* Operators on varieties. Opole: Politechnika Opolska Wydawnicza, 1998.
7. *Пинус А. Г.* Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унаров и групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 730–747.
8. *Шеврин Л. Н., Волков М. В.* Тождества полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1985. № 11. С. 3–47.


*Статья поступила 15 июня 2006 г.*

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru