*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2008. Том 49, № 4*

*УДК 512.57*

# ДИАЛГЕБРЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ТРОЙНЫЕ СИСТЕМЫ

**А. П. Пожидаев**

**Аннотация.** Изучаются некоторые алгебраические системы, приводящие к различным тройным системам, близким к ассоциативным. В качестве таких алгебраических систем рассматриваются некоторый класс алгебр, содержащий алгебры Лейбница — Пуассона, диалгебры, конформные алгебры и некоторые тройные системы. Описываются все однородные структуры тернарных алгебр Лейбница, возникающие на диалгебре. Для этого, в частности, используется структура Лейбница — Пуассона на диалгебре. В качестве следствия находится структура тройной лиевой системы на произвольной диалгебре, конформной ассоциативной алгебре и классически ассоциативной тройной системе. Также описываются на диалгебре все однородные структуры $(\varepsilon, \delta)$-Фрейденталя — Кантора тройных систем.

**Ключевые слова:** диалгебра, тернарная алгебра Лейбница, тройная лиева система, тройная система Фрейденталя — Кантора, обертывающая алгебра.

## Введение

Прошло не одно десятилетие, прежде чем проявился интерес к изучению не(анти)коммутативных алгебр Ли, так называемых алгебр Лейбница (необходимые определения см. ниже). Данный класс алгебр является довольно интересным, несмотря на отсутствие простых объектов (в классическом понимании), отличных от алгебр Ли. Как известно, для алгебр Ли существует понятие универсальной обертывающей ассоциативной алгебры. По теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта для любой алгебры Ли $L$ существует ассоциативная алгебра $A$ такая, что $L$ изоморфна некоторой подалгебре алгебры Ли $A^{(-)}$. Лодэй нашел универсальную обертывающую для алгебры Лейбница (см. [1]). Роль таких обертывающих играют диалгебры — алгебраические системы с двумя ассоциативными операциями, согласованными между собой. П. С. Колесниковым недавно показано, что любая диалгебра, в свою очередь, может быть получена из некоторой ассоциативной конформной алгебры [2].

С другой стороны, понятие алгебры Ли обобщено различными способами и авторами на случай $n$-арной алгебры. Одним из наиболее интересных является обобщение, предложенное В. Т. Филипповым [3]. Основная идея этого обобщения состоит в том, что операторы правого умножения являются дифференцированиями $n$-арной алгебры аналогично тому, что имеет место в случае алгебр Ли. Такие алгебры в настоящее время называются *алгебрами Филиппова*. Структурная теория конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00230) и СО РАН (комплексный интеграционный проект 1.9 и грант для молодых ученых, постановление Президиума №29 от 26/01/2006).

замкнутым полем характеристики 0 аналогична структурной теории алгебр Ли, хотя и значительно беднее. В частности, с точностью до изоморфизма простая такая алгебра только одна при каждом фиксированном $n > 2$ — это алгебра векторного произведения в $(n+1)$-мерном пространстве. По каждой алгебре Филиппова естественно строятся некоторая алгебра Ли и алгебра Лейбница (см. [4]). Алгебры Филиппова привлекают большое внимание также из-за их тесной связи с механикой Намбу, предложенной Намбу [5] как обобщение классической гамильтоновой механики.

Однако никакого хорошего класса алгебр, играющего роль универсальной обертывающей для алгебр Филиппова, пока не найдено. В [6] рассматривались четыре различных класса алгебр (тройных систем), играющих роль обертывающих для алгебр Филиппова. Там же было показано, что любая полупростая алгебра Филиппова при некоторых естественных ограничениях может быть получена как подалгебра в $A^{(-)}$, где $A$ либо ассоциативная алгебра, рассматриваемая как тройная система, либо тройная система с тождеством $((x,y,z),u,v) = (x,y,(z,u,v))$.

Заметим, что подобная ситуация имеет место и для полупервичных алгебр Мальцева (характеристики не 2) при рассмотрении их вложения в $A^{(-)}$ для альтернативных алгебр $A$. Однако для алгебр Мальцева универсальную обертывающую можно найти в классе гипералгебр [7]. Центры универсальной обертывающей алгебры Мальцева изучались в [8]. В [9] показано, что любую алгебру Мальцева можно изоморфно вложить в альтернативный центр некоторой неассоциативной алгебры.

Также открыт вопрос об обертывающих системах для $n$-арных алгебр Мальцева ($n$-арные алгебры Мальцева были определены в [10] как некоторый естественный класс $n$-арных алгебр, содержащий класс $n$-арных алгебр векторного произведения [11]).

Напомним некоторые определения. Пусть $\Phi$ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. *$\Omega$-алгеброй* над $\Phi$ называется унитальный модуль над $\Phi$, на котором определена система полилинейных алгебраических операций $\Omega = \{\omega_i : |\omega_i| = n_i \in \mathbb{N},\ i \in I\}$, где $|\omega_i|$ обозначает арность операции $\omega_i$. Ради краткости $\Omega$-алгебру мы порой называем просто алгеброй.

*$n$-Арной алгеброй Лейбница* называется $\Omega$-алгебра $L$ с одной $n$-арной операцией $[x_1,\dots,x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$[[x_1,\dots,x_n],y_2,\dots,y_n] = \sum_{i=1}^{n}[x_1,\dots,[x_i,y_2,\dots,y_n],\dots,x_n]. \tag{1}$$

Если при этом выполняется тождество антикоммутативности

$$[x_1,\dots,x_n] = \operatorname{sgn}(\sigma)[x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}]$$

для произвольной подстановки $\sigma$ из симметрической группы $S_n$, то такая $n$-арная алгебра Лейбница называется (*$n$-арной*) *алгеброй Филиппова*.

Если дана $\Omega$-алгебра $L$ над полем $F$ и зафиксирован элемент $a \in L$, то мы можем наделить $L$ новой системой полилинейных алгебраических редуцированных операций: $\Omega^a = \{\omega^a : \omega \in \Omega\}$, где $\omega^a(x_1,\dots,x_{n-1}) = \omega(a,x_1,\dots,x_{n-1})$ и $|\omega^a| = |\omega| - 1 = n-1$. Тогда $L$ превращается в $\Omega^a$-алгебру, которую будем обозначать через $L_a$ и называть *редуцированной алгеброй* $\Omega$-алгебры $L$.

Пусть $A$ — тернарная алгебра. Обозначим через $A^{(-)}$ тернарную алгебру с умножением

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \sum_{\sigma \in S_3} (-1)^\sigma (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

и назовем ее *коммутаторной алгеброй* алгебры $A$.

Если $L$ — $n$-арная алгебра Филиппова, то, как замечено В. Т. Филипповым [3], редуцированная алгебра $L_a$ является $(n-1)$-арной алгеброй Филиппова. (Отметим, что редуцированная алгебра $n$-арной алгебры Мальцева также является $(n-1)$-арной алгеброй Мальцева [10].) По аналогии с тернарными алгебрами Филиппова, когда редуцированная алгебра является алгеброй Ли, мы можем рассмотреть класс тройных систем $\mathscr{A}_3$, удовлетворяющий аналогичному условию: редуцированная алгебра $A_a$ алгебры $A \in \mathscr{A}_3$ должна быть ассоциативной. В [6] даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы алгебра $A^{(-)}$ для $A \in \mathscr{A}_3$ являлась тернарной алгеброй Филиппова. Там же показано, что $A^{(-)}$ не является полупростой алгеброй Филиппова для любой $A \in \mathscr{A}_3$.

В настоящей статье мы, во-первых, обращаемся к не(анти)коммутативному аналогу алгебр Филиппова — $n$-арным алгебрам Лейбница [12, 13] и приводим различные классы алгебр, дающие тернарные алгебры Лейбница при помощи введения новой операции, связанной с исходной операцией алгебры. Во-вторых, мы изучаем возможности построения различных тройных систем, близких к ассоциативным, на диалгебре.

## 1. Тернарные алгебры Лейбница

Первое преимущество, которое получают тернарные алгебры Лейбница по сравнению с алгебрами Филиппова, — это возможность получить такую алгебру, исходя непосредственно из алгебры Лейбница введением тройного умножения. (В случае алгебр Филиппова мы сразу же теряем антикоммутативность на этом пути. Однако этот путь приводит нас к тройной лиевой системе.)

**Лемма 1.** *Пусть $(L; \cdot)$ — алгебра Лейбница. Тогда $L$ относительно операции $[x, y, z] = x \cdot (y \cdot z)$ является тернарной алгеброй Лейбница.*

Доказательство. Используя тождество Лейбница $x(yz) = (xy)z - (xz)y$, мы можем привести все выражения, получаемые в (1), к левонормированному виду и убедиться в справедливости требуемого тождества. Однако мы лучше выведем эту лемму из нижеследующего предложения 1. $\square$

Определение. Векторное пространство $P$, наделенное двумя бинарными операциями $[\,,]$ и $\star$, назовем *обобщенной алгеброй Лейбница — Пуассона*, если для любых $x, y \in P$, $a, b \in P'$ выполняются равенства

$$[x \star y, a] = [x, a] \star y + x \star [y, a], \tag{2}$$

$$[[x, a], b] = [[x, b], a] + [x, [a, b]], \tag{3}$$

где через $P'$ мы обозначили квадрат алгебры $(P; \star)$.

Заметим, что любая алгебра может быть рассмотрена как некоторая обобщенная алгебра Лейбница — Пуассона: для этого достаточно вместо $\star$ рассмотреть основную операцию алгебры, а вторую операцию положить нулевой. Нетривиальным примером обобщенной алгебры Лейбница — Пуассона служит (некоммутативная) алгебра Лейбница — Пуассона (в этом случае $a, b \in P$).

**Предложение 1.** *Пусть* $(P; [,], \star)$ — *обобщенная алгебра Лейбница — Пуассона. Тогда* $P$ *относительно операции* $[x, y, z] = [x, y \star z]$ *является тернарной алгеброй Лейбница.*

Доказательство. Если левая часть (1) имеет вид $[[x, y, z], u, v]$, то, полагая $y \star z = a$, $u \star v = b$, запишем (1) следующим образом:

$$[[x, a], b] = [[x, b], a] + [x, [y, b] \star z] + [x, y \star [z, b]].$$

С учетом (2) последнее эквивалентно

$$[[x, a], b] = [[x, b], a] + [x, [a, b]],$$

что совпадает с (3). □

Теперь лемма 1 является просто частным случаем данного предложения, поскольку любая алгебра Лейбница может быть рассмотрена как обобщенная алгебра Лейбница — Пуассона в предположении, что обе операции равны исходной.

Как известно, любая алгебра Лейбница может быть получена исходя из некоторой диалгебры [1]. Напомним данную конструкцию.

Определение. *Диалгеброй* над полем $F$ называется векторное пространство с двумя ассоциативными бинарными операциями $\dashv$ и $\vdash$ такими, что

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \quad (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \quad (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z).$$

Простейшими примерами диалгебр являются ассоциативные алгебры ($a \dashv b = ab = a \vdash b$) и дифференциальные ассоциативные алгебры $(A, d)$, $d^2 = 0$, $a \dashv b = a(db)$, $a \vdash b = (da)b$.

Если $M$ — это ассоциативный $A$-бимодуль и $f : M \mapsto A$ — бимодульный гомоморфизм, то $M$ можно наделить структурой диалгебры, полагая $m_1 \dashv m_2 = m_1 f(m_2)$ и $m_1 \vdash m_2 = f(m_1)m_2$.

Тензорный квадрат ассоциативной алгебры также наделяется структурой диалгебры:

$$(a \otimes b) \dashv (a' \otimes b') = a \otimes ba'b', \quad (a \otimes b) \vdash (a' \otimes b') = aba' \otimes b'.$$

Из [1] следует, что любое слово $x_{-m} \dots x_n$ в диалгебре может быть записано в виде $x_{-m} \vdash \dots \vdash x_0 \dashv \dots \dashv x_n$, при этом расстановка скобок значения не имеет. Буква $x_0$ называется *средней* и для ее нахождения в слове $u \dashv v$ (или $v \vdash u$) достаточно перейти к подслову $u$ и продолжить процесс нахождения уже с этим подсловом. Мы будем обозначать такое слово через $x_{-m} \dots \dot{x}_0 \dots x_n$.

Если $D$ — это некоторая диалгебра, то, определяя на $D$ новую операцию $[\,,\,]$ правилом $[x, y] = \dot{x}y - y\dot{x}$, получаем алгебру Лейбница $(D, [\,,\,])$.

Более того, на диалгебре можно задать структуру алгебры Лейбница — Пуассона, полагая $x \star y$ произвольной однородной операцией на диалгебре, т. е. $x \star y = \alpha\dot{x}y + \beta x\dot{y} + \gamma\dot{y}x + \delta y\dot{x}$.

**Теорема 1.** *Пусть* $L$ — *диалгебра. Тогда* $L$ *относительно операций* $[x, y] = \dot{x}y - y\dot{x}$ *и* $x \star y = \alpha\dot{x}y + \beta x\dot{y} + \gamma\dot{y}x + \delta y\dot{x}$ *является алгеброй Лейбница — Пуассона для любых* $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}[x \star y, a] &= [\alpha\dot{x}y + \beta x\dot{y} + \gamma\dot{y}x + \delta y\dot{x}, a] \\ &= \alpha\dot{x}ya + \beta x\dot{y}a + \gamma\dot{y}xa + \delta y\dot{x}a - \alpha a\dot{x}y - \beta ax\dot{y} - \gamma a\dot{y}x - \delta ay\dot{x}.\end{aligned}$$

Аналогично

$$[x,a]\star y=\alpha\dot{x}ay-\alpha a\dot{x}y+\beta xa\dot{y}-\beta ax\dot{y}+\gamma\dot{y}xa-\gamma\dot{y}ax+\delta y\dot{x}a-\delta ya\dot{x},$$

$$x\star[y,a]=\alpha\dot{x}ya-\alpha\dot{x}ay+\beta x\dot{y}a-\beta xa\dot{y}+\gamma\dot{y}ax-\gamma a\dot{y}x+\delta ya\dot{x}-\delta ay\dot{x}.$$

Сравнивая первое равенство с последними, убеждаемся в истинности (2). $\square$

Будем говорить, что операция $\star$ *дифференцирует операцию* $*$, если

$$(x*y)\star z=(x\star z)*y+x*(y\star z).$$

Таким образом, теорема 1 дает нам пример того, что операция $[x,y]=\dot{x}y-y\dot{x}$ дифференцирует любую однородную бинарную операцию $\star$ на диалгебре. Помимо этого, как легко заметить, такая ситуация на диалгебре возможна также в следующих случаях:

$$[x,y]=\alpha(\dot{x}y-y\dot{x})+\beta(\dot{y}x-y\dot{x}),\quad x\star y=\gamma\dot{x}y+\delta\dot{y}x;$$

$$[x,y]=\alpha(\dot{x}y-y\dot{x})+\beta(x\dot{y}-y\dot{x}),\quad x\star y=\gamma x\dot{y}+\delta y\dot{x}.$$

Поэтому при $\gamma=-\delta$ мы получаем дополнительные структуры алгебры Лейбница — Пуассона на диалгебре.

Из теоремы 1 и предложения 1 вытекает следующая

**Теорема 2.** *Пусть $L$ — диалгебра. Тогда $L$ относительно операции*

$$[x,y,z]=\alpha(\dot{x}yz-yz\dot{x})+\beta(\dot{x}zy-zy\dot{x})$$

*является тернарной алгеброй Лейбница для любых $\alpha,\beta\in F$.*

**Лемма 2.** *Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированием $D$ таким, что $D^2=0$. Обозначим через $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ тернарную алгебру, полученную из $A$ введением новой операции*

$$[x,y,z]=\alpha xD(y)D(z)+\beta D(x)yD(z)+\gamma D(x)D(y)z.$$

*Тогда алгебра $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ является тернарной алгеброй Лейбница.*

Доказательство. После приведения подобных в (1) получим

$$2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha xD(y)D(z)D(u)D(v)\\ +\beta yD(x)D(z)D(u)D(v)+\gamma zD(y)D(x)D(u)D(v))=0.$$

Заметим, что для произвольных $a,b\in A$ справедливо $2D(a)D(b)=0$, что и завершает доказательство леммы.

**Лемма 3.** *Пусть $A$ — свободная ассоциативная алгебра. Тогда тройная система $(A^{\alpha},[\,,\,,])$ с операцией*

$$[x_1,x_2,x_3]=\sum_{\sigma\in S_3}\alpha_\sigma x_{\sigma1}x_{\sigma2}x_{\sigma3}$$

*является тернарной алгеброй Лейбница тогда и только тогда, когда*

$$\alpha_{(12)}=\alpha_{(132)}=0,\quad \alpha_{id}+\alpha_{(123)}=\alpha_{(23)}+\alpha_{(13)}=0.$$

Доказательство. Если левая часть (1) имеет вид $[[a,b,c],u,v]$, то слово вида $ubacv$ возникнет только в левой части и с коэффициентом $\alpha^2_{(12)}$, откуда $\alpha_{(12)}=0$. Поступая аналогично со словами вида $vcabu$, получаем $\alpha_{(132)}=0$.

Рассматривая последовательно слова *auvbc*, *avubc*, *bcuva*, *avucb* и *cbvua*, приходим соответственно к равенствам

$$\alpha_{id}(\alpha_{id}+\alpha_{(123)})=0,\quad \alpha_{id}(\alpha_{(23)}+\alpha_{(13)})=0,\quad \alpha_{(123)}(\alpha_{id}+\alpha_{(123)})=0,$$

$$\alpha_{(23)}(\alpha_{(23)}+\alpha_{(13)})=0,\quad \alpha_{(13)}(\alpha_{(23)}+\alpha_{(13)})=0.$$

Из этих равенств мы получаем требуемые соотношения, и далее доказательство состоит в непосредственной и несложной проверке тождества (1). □

Замечание. Если $A$ заменить относительно свободной ассоциативной алгеброй с тождеством $txyzt=0$, то мы также получим структуру тернарной алгебры Лейбница в случае равенства всех коэффициентов, т. е. в случае коммутативной операции. А если $A$ заменить алгеброй с тождеством $t_1xyzt_2=t_2xyzt_1$, то получим структуру тернарной алгебры Лейбница в случае антикоммутативной операции, т. е. мы приходим к тернарной алгебре Филиппова.

Далее рассмотрим довольно общую ситуацию безконстантного (или, следуя [14, 15], однородного) задания на диалгебре структуры тройной системы, т. е. тернарная операция задается на диалгебре следующим образом:

$$[x_1,x_2,x_3]=\sum_{\sigma\in S_3}\alpha_\sigma\dot{x}_{\sigma 1}x_{\sigma 2}x_{\sigma 3}+\sum_{\sigma\in S_3}\beta_\sigma x_{\sigma 1}\dot{x}_{\sigma 2}x_{\sigma 3}+\sum_{\sigma\in S_3}\gamma_\sigma x_{\sigma 1}x_{\sigma 2}\dot{x}_{\sigma 3},\tag{4}$$

где $\alpha_\sigma,\beta_\sigma,\gamma_\sigma\in F$.

Возьмем произвольный $\theta\in\{\alpha,\beta,\gamma\}$ и введем обозначения

$$\theta_{id}=\theta_1,\ \theta_{(23)}=\theta_2,\ \theta_{(12)}=\theta_3,\ \theta_{(123)}=\theta_4,\ \theta_{(132)}=\theta_5,\ \theta_{(13)}=\theta_6.$$

Нас интересуют необходимые и достаточные условия, при которых данная операция удовлетворяет тождеству (1).

**Теорема 3.** *Пусть $L$ — свободная диалгебра. Тогда $L$ относительно операции (4) является тернарной алгеброй Лейбница в том и только в том случае, когда эта операция является одной из следующих:*

$$\begin{aligned}
[x,y,z]&=\alpha(\dot{x}yz-yz\dot{x})+\beta(\dot{x}zy-zy\dot{x});\\
[x,y,z]&=\alpha(xy\dot{z}-yz\dot{x})+\beta(xz\dot{y}-zy\dot{x});\\
[x,y,z]&=\alpha(\dot{x}yz-\dot{y}zx)+\beta(\dot{x}zy-\dot{z}yx);\\
[x,y,z]&=\alpha(\dot{x}yz-x\dot{y}z+xy\dot{z}-\dot{y}zx+y\dot{z}x-yz\dot{x})\\
&\quad+\beta(\dot{x}zy-x\dot{z}y+xz\dot{y}-\dot{z}yx+z\dot{y}x-zy\dot{x})
\end{aligned}$$

*для любых $\alpha,\beta\in F$.*

Доказательство. Обозначим $\Sigma_i=\alpha_i+\beta_i+\gamma_i$, $i=1,\dots,6$. Заметим, что из леммы 3 сразу получаем следующие соотношения:

$$\Sigma_1+\Sigma_4=0,\quad \Sigma_2+\Sigma_6=0,\quad \Sigma_3=0,\quad \Sigma_5=0.\tag{5}$$

Если проверять тождество (1) с левой частью $[[x,y,z],u,v]$ для операции (4), то легко заметить, что слова вида $xyzuv$ (с любым положением верхней точки) в левой части выделяются в виде слагаемого

$$\alpha_1^2\dot{x}yzuv+\beta_1\alpha_1xyz\dot{u}v+\gamma_1\alpha_1xyzu\dot{v}+\alpha_1\beta_1x\dot{y}zuv+\beta_1^2xyz\dot{u}v$$
$$+\gamma_1\beta_1xyzu\dot{v}+\alpha_1\gamma_1xy\dot{z}uv+\beta_1\gamma_1xyz\dot{u}v+\gamma_1^2xyzu\dot{v}$$

(ради простоты такую сумму можно записывать в виде $\alpha_1\theta_1 \cdot\!\!\cdot\!\!\cdot |\beta_1\theta_1 \cdot |\gamma_1\theta_1 \cdot)$, а в правой части — в виде

$$\alpha_1\theta_1 \cdot |\beta_1\theta_1 \cdot |\gamma_1\theta_1 \cdot\!\!\cdot\!\!\cdot = \alpha_1^2\dot{x}yzuv + \beta_1\alpha_1 x\dot{y}zuv + \gamma_1\alpha_1 xy\dot{z}uv$$
$$+ \alpha_1\beta_1\dot{x}yzuv + \beta_1^2 x\dot{y}zuv + \gamma_1\beta_1 xyz\dot{u}v + \alpha_1\gamma_1\dot{x}yzuv + \beta_1\gamma_1 x\dot{y}zuv + \gamma_1^2 xyzu\dot{v},$$

откуда

$$\beta_1(\alpha_1+\beta_1)=0, \quad \gamma_1(\alpha_1+\beta_1)=0, \quad \beta_1(\beta_1+\gamma_1)=0, \quad \alpha_1(\beta_1+\gamma_1)=0.$$

Для удобства составим таблицу, в которой в первом столбце будут стоять интересующие нас слова, а строка напротив слова будет содержать интересующие нас соотношения, которые дают коэффициенты при этом слове.

**Таблица**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $xyzuv$ | $\beta_1(\alpha_1+\beta_1)=0$ | $\gamma_1(\alpha_1+\beta_1)=0$ | $\beta_1(\beta_1+\gamma_1)=0$ | $\alpha_1(\beta_1+\gamma_1)=0$ |
| $xyuvz$ | $\gamma_1(\alpha_4+\beta_4)=0$ | $\gamma_1(\beta_1+\beta_4)=0$ | | |
| $xyvuz$ | $\gamma_1(\alpha_6+\beta_6)=0$ | $\gamma_1\beta_6+\gamma_2\beta_1=0$ | $\beta_1(\beta_2+\gamma_2)=0$ | $\beta_1\beta_2+\gamma_1\alpha_6=0$ |
| $uvzyx$ | $\alpha_4(\beta_6+\gamma_6)=0$ | $\beta_4(\beta_6+\gamma_6)=0$ | $\beta_6(\alpha_4+\beta_4)=0$ | $\gamma_6(\alpha_4+\beta_4)=0$ |
| $xvuyz$ | $\alpha_1(\beta_2+\gamma_2)=0$ | $\beta_1(\alpha_6+\beta_6)=0$ | $\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_6=0$ | $\alpha_1\gamma_2+\beta_1\beta_6=0$ |
| $xzvuy$ | $\beta_2(\beta_2+\gamma_2)=0$ | $\gamma_2(\alpha_6+\beta_6)=0$ | $\gamma_2\alpha_6+\beta_2^2=0$ | $\gamma_2(\beta_2+\beta_6)=0$ |
| $xzyuv$ | $\alpha_2(\beta_1+\gamma_1)=0$ | $\beta_2(\beta_1+\gamma_1)=0$ | $\beta_1(\alpha_2+\beta_2)=0$ | $\gamma_1(\alpha_2+\beta_2)=0$ |
| $yuvzx$ | $\alpha_4(\beta_1+\gamma_1)=0$ | $\beta_4(\alpha_4+\beta_4)=0$ | $\alpha_4(\beta_1+\beta_4)=0$ | $\alpha_4\gamma_1+\beta_4^2=0$ |
| $uvyzx$ | $\alpha_4(\beta_4+\gamma_4)=0$ | $\beta_4(\beta_4+\gamma_4)=0$ | $\gamma_4(\alpha_4+\beta_4)=0$ | |
| $vuzyx$ | $\alpha_6(\beta_6+\gamma_6)=0$ | $\beta_6(\beta_6+\gamma_6)=0$ | $\gamma_6(\alpha_6+\beta_6)=0$ | $\beta_6(\alpha_6+\beta_6)=0$ |
| $zvuyx$ | $\alpha_6(\beta_2+\gamma_2)=0$ | $\alpha_6(\beta_2+\beta_6)=0$ | $\beta_6^2+\alpha_6\gamma_2=0$ | |
| $yzvux$ | $\beta_4(\beta_2+\gamma_2)=0$ | $\gamma_4(\alpha_6+\beta_6)=0$ | $\gamma_4\alpha_6+\beta_4\beta_2=0$ | $\gamma_4\beta_6+\beta_4\gamma_2=0$ |
| $xzyvu$ | $\alpha_2(\beta_2+\gamma_2)=0$ | $\beta_2(\alpha_2+\beta_2)=0$ | $\gamma_2(\alpha_2+\beta_2)=0$ | |
| $yuxvz$ | $\beta_3^2=0$ | $\gamma_3(\gamma_3+\alpha_3)=0$ | | |
| $uyvxz$ | $\alpha_3^2=0$ | | | |
| $vzxyu$ | $\beta_5^2=0$ | $\alpha_5(\alpha_5+\gamma_5)=0$ | | |
| $zxvyu$ | $\gamma_5^2=0$ | | | |

Символом $(i,j)$ далее будем обозначать соотношение, стоящее на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца данной таблицы.

Предположим теперь, что тождество (1) выполняется. Из строк (14)–(17) таблицы сразу получаем $\alpha_3=\beta_3=\gamma_3=0$ и $\alpha_5=\beta_5=\gamma_5=0$. Далее рассмотрим следующие возможности.

1. $\beta_1\neq 0$. Тогда из (1,1) следует $\alpha_1+\beta_1=0$, а из (1,3) выводим $\beta_1+\gamma_1=0$. Из (2,1) получаем $\alpha_4+\beta_4=0$, а из (2,2) вытекает, что $\beta_1+\beta_4=0$. Из (5) имеем $\gamma_1+\gamma_4=0$.

Рассматривая последовательно (3,1)–(3,4), получаем $\alpha_6+\beta_6=0$, $\gamma_2=\beta_6$, $\beta_2+\gamma_2=0$, $\beta_2=\alpha_6$. Из (4,2) имеем $\beta_6+\gamma_6=0$. В итоге

$$[x,y,z]=\alpha(\dot{x}yz-x\dot{y}z+xy\dot{z}-\dot{y}zx+y\dot{z}x-yz\dot{x})\\ +\beta(\dot{x}zy-x\dot{z}y+xz\dot{y}-\dot{z}yx+z\dot{y}x-zy\dot{x}),$$

где $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\alpha_2$. Как и в доказательстве теоремы 2, непосредственными вычислениями можем убедиться, что (1) для данной операции выполняется. Однако справедливость этого утверждения также следует из несколько более общего факта, полученного в лемме 4 и теореме 4 далее.

2. $\beta_1=0, \gamma_1\neq 0$. Из (1,4) следует $\alpha_1=0$, а из (2,2) выводим $\beta_4=0$. Теперь из (2,1) вытекает $\alpha_4=0$. Применяя (5), получаем $\gamma_1+\gamma_4=0$. Из (3,4) имеем $\alpha_6=0$, а из (3,2) — $\beta_6=0$. Далее, (6,3) дает $\beta_2=0$ и из (7,4) вытекает $\alpha_2=0$. В итоге из (5) находим $\gamma_2+\gamma_6=0$ и окончательно

$$[x,y,z]=\alpha(xy\dot{z}-yz\dot{x})+\beta(xz\dot{y}-zy\dot{x})$$

удовлетворяет тождеству (1), что легко следует из леммы 3.

3. $\beta_1=0, \gamma_1=0, \alpha_1\neq 0$. Из (5,3) и (5,4) следует $\beta_2=0=\gamma_2$. Равенство (8,4) дает $\beta_4=0$, и из (5) имеем $\alpha_1+\alpha_4+\gamma_4=0$. Более того, $\alpha_4\gamma_4=0$ по (9,3).

Если $\alpha_4\neq 0$, то $\gamma_4=0$ и $\beta_6=0=\gamma_6$ по (4,3), (4,4). Тогда из (5) выводим $\alpha_1+\alpha_4=0$ и $\alpha_2+\alpha_6=0$. По лемме 3 операция

$$[x,y,z]=\alpha(\dot{x}yz-\dot{y}zx)+\beta(\dot{x}zy-\dot{z}yx)$$

удовлетворяет тождеству (1).

Если же $\alpha_4=0$, то $\gamma_4\neq 0$ и $\beta_6=0$ по (11,3). Тогда по (12,2) $\alpha_6=0$ и из (5) получаем $\alpha_2+\gamma_6=0$, $\alpha_1+\gamma_4=0$. Таким образом, приходим к операции теоремы 2:

$$[x,y,z]=\alpha(\dot{x}yz-yz\dot{x})+\beta(\dot{x}zy-zy\dot{x}).$$

4. $\beta_1=0, \gamma_1=0, \alpha_1=0$. Из (8,4) вытекает $\beta_4=0$. Тогда (9,1) и (5) соответственно дают $\alpha_4\gamma_4=0$, $\alpha_4+\gamma_4=0$, откуда $\alpha_4=\gamma_4=0$. Далее доказательство разобьем еще на пять простых подслучаев.

(a) $\beta_2\neq 0$. Из (6,1)–(6,4) и (5) следуют $\beta_2+\gamma_2=0$, $\gamma_2+\alpha_6=0$, $\beta_2+\beta_6=0$, $\gamma_6+\alpha_2=0$. Тогда из (10,1) выводим $\gamma_6+\beta_6=0$ и окончательно

$$[x,y,z]=\alpha(\dot{x}zy-x\dot{z}y+xz\dot{y}-\dot{z}yx+z\dot{y}x-zy\dot{x}),$$

что является частным случаем операции из случая 1.

(b) $\beta_6\neq 0$. Из (10,4) следует $\alpha_6+\beta_6=0$, и (11,2) приводит нас к предыдущему случаю.

(c) $\gamma_2\neq 0$. Мы можем считать, что $\beta_2=\beta_6=0$. Тогда (11,1) дает $\alpha_6=0$, а (13,3) приводит к $\alpha_2=0$. В итоге из (5) получаем $\gamma_2+\gamma_6=0$, что является частным случаем операции из случая 2.

(d) $\gamma_6\neq 0$. В этом случае можно предполагать, что $\beta_2=\beta_6=\gamma_2=0$. Тогда (10,1) дает $\alpha_6=0$, и из (5) получаем $\gamma_6+\alpha_2=0$, что является частным случаем операции из теоремы 2.

(e) $\beta_2=\beta_6=\gamma_2=\gamma_6=0$. Из (5) получаем $\alpha_2+\alpha_6=0$, что является частным случаем операции из случая 3. $\square$

**Следствие.** *Пусть $L$ — свободная диалгебра. Тогда $L$ относительно операции (4) является тернарной алгеброй Лейбница с тождеством $[x,y,y]=0$ в том и только в том случае, когда эта операция является одной из следующих:*

$$[x,y,z]=\dot{x}yz-yz\dot{x}-\dot{x}zy+zy\dot{x};$$
$$[x,y,z]=xy\dot{z}-yz\dot{x}-xz\dot{y}+zy\dot{x};$$
$$[x,y,z]=\dot{x}yz-\dot{y}zx-\dot{x}zy+\dot{z}yx;$$
$$\begin{aligned}[x,y,z]=\dot{x}yz-x\dot{y}z+xy\dot{z}-\dot{y}zx+y\dot{z}x-yz\dot{x}\\ -\dot{x}zy+x\dot{z}y-xz\dot{y}+\dot{z}yx-z\dot{y}x+zy\dot{x}\end{aligned}$$

(здесь и далее мы опускаем общий коэффициент). *Более того, $L$ относительно операции (4) является тройной лиевой системой тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned}[x,y,z]=\dot{x}yz-x\dot{y}z+xy\dot{z}-\dot{y}zx+y\dot{z}x-yz\dot{x}-\dot{x}zy\\ +x\dot{z}y-xz\dot{y}+\dot{z}yx-z\dot{y}x+zy\dot{x}.\end{aligned}$$

Для доказательства достаточно напомнить, что тройная лиева система — это тернарная алгебра Лейбница со следующими тождествами:

$$[x,y,y]=0,\quad [x,y,z]+[y,z,x]+[z,x,y]=0.\quad\square \tag{6}$$

Замечание. Поскольку на диалгебре существует естественная структура алгебры Ли ($[x,y]=\dot{x}y-y\dot{x}$ или $[x,y]=x\dot{y}-y\dot{x}$) и антикоммутативной алгебры $[x,y]=\alpha(\dot{x}y-\dot{y}x)+\beta(x\dot{y}-y\dot{x})$, то также естественно задаться вопросом о возможности введения на диалгебре нетривиальной структуры общей тройной лиевой системы (см. определение, например, в [14, 15]) аналогично тому, как это сделано выше. Хотя ответ на этот вопрос оказывается отрицательным, на диалгебре вводится структура общей лейбницевой тройной системы (см. последнее следствие данной работы).

Благодаря результатам работы [2] мы теперь можем построить как тернарную алгебру Лейбница, так и тройную лиеву систему на произвольной конформной ассоциативной алгебре.

Определение. *Конформной алгеброй* называется векторное пространство $C$ с линейным отображением $D: C\mapsto C$ и семейством линейных бинарных операций ($n$-произведений) $(\cdot_{(n)}\cdot): C\otimes C\mapsto C$ ($n\in\mathbb{Z}^+$) таких, что

(C1) для любых $a,b\in C$ существует только конечное число элементов $n\in\mathbb{Z}^+$ таких, что $a_{(n)}b\neq 0$;

(C2) $(Da_{(n)}b)=-n(a_{(n-1)}b)$;

(C3) $(a_{(n)}Db)=D(a_{(n)}b)+n(a_{(n-1)}b)$.

Конформная алгебра называется *ассоциативной*, если

$$(a_{(n)}b)_{(m)}c=\sum_{s\geq 0}(-1)^s C_s^n a_{(n-s)}(b_{(m+s)}c).$$

Как замечено в [2], если $C$ — ассоциативная конформная алгебра, то пространство $C$ можно наделить структурой диалгебры, полагая

$$a\vdash b=a_{(0)}b,\, a\dashv b=\sum_{s\geq 0}(-1)^s\frac{D^s}{s!}(a_{(s)}b).$$

Теперь мы можем использовать теорему 3 для введения на конформной алгебре структуры тернарной алгебры Лейбница или тройной лиевой системы.

## 2. Тройные системы, близкие к ассоциативным

Далее рассмотрим класс $\mathscr{A}_1$ классически ассоциативных тройных систем, заданный тождеством

$$\{\{x,y,z\},u,v\} = \{x,\{y,z,u\},v\} = \{x,y,\{z,u,v\}\}. \tag{7}$$

**Лемма 4.** *Пусть $A$ — свободная тройная система из $\mathscr{A}_1$. Тогда тройная система $(A^\alpha,[\ ,\ ,\ ])$ с операцией*

$$[x_1,x_2,x_3] = \sum_{\sigma\in S_3} \alpha_\sigma \{x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, x_{\sigma 3}\}$$

*является тернарной алгеброй Лейбница в том и только в том случае, когда*

$$\alpha_{(12)} = \alpha_{(132)} = 0, \quad \alpha_{(id)} + \alpha_{(123)} = \alpha_{(23)} + \alpha_{(13)} = 0.$$

Доказательство следует из леммы 3, поскольку свободную ассоциативную алгебру можно рассматривать как тройную систему с операцией $\{x,y,z\} = xyz$. $\square$

**Следствие.** *Пусть $A$ — классически ассоциативная тройная система. Тогда $A$ относительно операции $[x,y,z] = \{x,y,z\} - \{x,z,y\} + \{z,y,x\} - \{y,z,x\}$ становится тройной лиевой системой.*

Доказательство состоит в применении леммы 4 и очевидной проверке тождеств (6). $\square$

Теперь рассмотрим следующие классы тройных систем, связанные с системами из [6].

1. Обозначим через $\mathscr{A}_2$ многообразие тройных систем с тождеством

$$\{\{x,y,z\},u,v\} = \{x,\{y,u,v\},z\} = \{x,u,\{z,v,y\}\} \tag{8}$$

(примером таких систем могут служить системы, получаемые из тензорной алгебры векторного пространства заданием новой операции $[x,y,z] = x\otimes z\otimes y$).

2. Обозначим через $\mathscr{A}_3$ многообразие тройных систем с тождеством

$$\{\{x,y,z\},u,v\} = \{z,\{y,u,x\},v\} = \{y,u,\{z,x,v\}\} \tag{9}$$

(примером таких систем могут служить системы, получаемые из тензорной алгебры векторного пространства заданием новой операции $[x,y,z] = y\otimes x\otimes z$).

Для тройных систем из классов $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_3$ легко устанавливаются аналоги леммы 4. Для этого в лемме 4 достаточно положить $\{x,y,z\}_{23} = \{x,z,y\}$ ($\{x,y,z\}_{12} = \{y,x,z\}$).

Более того, интересно рассмотреть и класс $\mathscr{A}$ классически ассоциативных тройных систем над полем $F$, замкнутый относительно антиизоморфизмов. В этом случае мы как раз получаем класс, заданный тождествами (7)–(9). Легко заметить, что данный класс содержится в многообразии тройных систем с редуцированными ассоциативными алгебрами [6].

**Лемма 5.** *Пусть $A$ — свободная тройная система из $\mathscr{A}$. Тогда тройная система $(A^\alpha,[\ ,\ ,])$ с операцией*

$$[x_1,x_2,x_3] = \sum_{\sigma\in S_3} \alpha_\sigma \{x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, x_{\sigma 3}\}$$

*является тернарной алгеброй Лейбница в том и только в том случае, когда либо* $\operatorname{char} F = 2$, *либо*

$$\alpha_{(id)} + \alpha_{(123)} + \alpha_{(123)^2} = 0 = \alpha_{(12)} + \alpha_{(23)} + \alpha_{(13)}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно расписать тождество (1). Заметим, что слова в этом тождестве можно выписывать, не расставляя скобок, ввиду ассоциативности. Из тождеств (5)–(9) легко вывести, что $x_{\sigma 1}x_{\sigma 2}x_{\sigma 3}x_{\sigma 4}x_{\sigma 5} = x_1x_2x_3x_4x_5 \to \sigma \in A_5$. С учетом этого тождество (1) приводит к соотношениям $2\big(\sum\limits_{\sigma\in S_3}\alpha_\sigma\big)^2 = 0$ и $2(\alpha_{(id)} + \alpha_{(123)} + \alpha_{(123)^2})^2 + 2(\alpha_{(12)} + \alpha_{(23)} + \alpha_{(13)})^2 = 0$, откуда и следует утверждение леммы. $\square$

Замечание. Как видно из леммы, данная конструкция приводит нас к алгебрам Филиппова тогда и только тогда, когда $\operatorname{char} F = 2, 3$.

Докажем аналог теоремы 3 для случая некоторых тройных систем, близких к ассоциативным, обобщающих исследованные ранее в [6] при построении обертывающих к алгебрам Филиппова.

**Теорема 4.** *Пусть $L$ — свободная диалгебра. Тогда $L$ относительно операции (4) удовлетворяет тождеству $\{\{x,y,z\},u,v\} = \{x,y,\{z,u,v\}\}$ (или $\{\{x,y,z\},u,v\} = \{x,\{y,z,u\},v\}$, или $\{\{x,u,y\},u,z\} = \{x,u,\{y,u,z\}\}$, или $\{\{u,v,x\},y,x\} = \{u,v,\{x,y,x\}\}$) в том и только в том случае, когда эта операция является одной из следующих:*

$$\{x,y,z\} = \dot{x}yz; \quad \{x,y,z\} = xy\dot{z}; \quad \{x,y,z\} = \dot{x}yz - x\dot{y}z + xy\dot{z}; \tag{10}$$

$$\{x,y,z\} = \dot{z}yx; \quad \{x,y,z\} = zy\dot{x}; \quad \{x,y,z\} = \dot{z}yx - z\dot{y}x + zy\dot{x}. \tag{11}$$

Доказательство. Будем использовать обозначения и методы теоремы 3. Рассмотрим случай тождества $\{\{x,y,z\},u,v\} = \{x,y,\{z,u,v\}\}$. Беря слова вида $uyxzv$ и $yxuzv$, получаем $\beta_3 = 0, \alpha_3 + \gamma_3 = 0$ и $\gamma_3 = 0$ соответственно. Аналогично слова $vzxyu$ и $vzuxy$ дают $\alpha_5 = \beta_5 = \gamma_5 = 0$. Далее, слова $xzyvu$ и $xuzvy$ приводят к $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, а $uvyzx$ и $yuvzx$ — к $\alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = 0$.

Для завершения рассмотрения этого случая осталось получить соотношения $\alpha_1\Sigma_6 = \beta_1\Sigma_6 = 0$, $\gamma_1\alpha_6 = \gamma_1\beta_6 = \gamma_1\gamma_6 = 0$ (рассматривая слова $xyvuz$) и заметить, что мы вправе воспользоваться сейчас соотношениями из строк 1 и 10 таблицы. Например, если $\beta_1 \neq 0$, то $\alpha_1 \neq 0$ и $\gamma_1 \neq 0$, а потому $\alpha_6 = \beta_6 = \gamma_6 = 0$ и мы приходим к операции $\{x,y,z\} = \dot{x}yz - x\dot{y}z + xy\dot{z}$. Если $\beta_1 = 0, \gamma_1 \neq 0$, то $\{x,y,z\} = xy\dot{z}$, и т. д. Случай тождеств $\{\{x,u,y\},u,z\} = \{x,u,\{y,u,z\}\}$ и $\{\{u,v,x\},y,x\} = \{u,v,\{x,y,x\}\}$ исследуется аналогично.

Рассмотрим случай тождества $\{\{x,y,z\},u,v\} = \{x,\{y,z,u\},v\}$. Беря слова вида $xzyvu$, получаем $\beta_2\Sigma_2 = 0$, $\gamma_2\Sigma_2 = 0$, $\alpha_2^2 = 0$, откуда $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 + \gamma_2 = 0$. Слова $xvyuz$ дают $\gamma_2^2 = 0$, т. е. $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$.

Аналогично слова $zuyvx$ и $uvyzx$ дают $\alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = 0$, а $vzxyu$ и $vxuyz$ — $\alpha_5 = \beta_5 = \gamma_5 = 0$. Рассматривая слова $uyxzv$ и $zyuxv$, приходим к $\alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 = 0$. Далее, слова $vuxyz$ приводят к $\alpha_6\Sigma_1 = \beta_6\Sigma_1 = 0$, $\gamma_6\alpha_1 = \gamma_6\beta_1 = \gamma_6\gamma_1 = 0$, $xyzuv$ — к $\alpha_1(\beta_1 + \gamma_1) = \beta_1(\alpha_1 + \beta_1) = 0$; $vuzyx$ — к $\beta_6(\beta_6 + \gamma_6) = \gamma_6(\alpha_6 + \beta_6) = 0$. Теперь уже несложно видеть, что мы приходим к тем же операциям, что и в случае предыдущего тождества. Проверка того, что данные операции удовлетворяют указанным тождествам, тривиальна. Проверим, к примеру, это для последней операции:

$$\begin{aligned}
&\{\{x,y,z\},u,v\} = \{\dot{z}yx - z\dot{y}x + zy\dot{x}, u, v\}\\
=&\dot{v}uzyx - v\dot{u}zyx + vu\dot{z}yx - vuz\dot{y}x + vuzy\dot{x}\\
=&\{x, \dot{u}zy - u\dot{z}y + uz\dot{y}, v\} = \{x,\{y,z,u\},v\}\\
=&\{x,y,\dot{v}uz - v\dot{u}z + vu\dot{z}\} = \{x,y,\{z,u,v\}\}. \quad \square
\end{aligned}$$

Замечание. Задавая на диалгебре операции (10), (11), мы приходим к классически ассоциативным тройным системам. Далее, пользуясь леммой 4, вводим на диалгебре структуру тернарной алгебры Лейбница и получаем вторую, третью и четвертую операции из теоремы 3.

Аналог теоремы 4 справедлив для алгебр, заданных тождествами

$$\{u,\{v,x,y\},z\} = \{u,x,\{v,y,z\}\}$$

(или $\{\{x,y,u\},z,v\} = \{u,\{y,z,x\},v\}$, или $\{u,\{u,x,y\},z\} = \{u,x,\{u,y,z\}\}$), а также $\{\{x,z,y\},z,y\} = \{x,\{z,v,u\},y\}$ (или $\{\{x,z,y\},v,u\} = \{x,v,\{y,u,z\}\}$, или $\{\{x,y,u\},z,u\} = \{x,\{y,z,u\},u\}$). Это легко получить из доказанного введением новых операций: $\{x,y,z\}_{12} = \{y,x,z\}$, $\{x,y,z\}_{23} = \{x,z,y\}$.

**Следствие.** *Операция* (4) *задает на свободной диалгебре структуру слабо альтернативной тройной системы тогда и только тогда, когда эта операция является одной из операций* (10), (11).

Доказательство. Для доказательства достаточно напомнить, что слабо альтернативная тройная система — это по определению тройная система с тождествами $\{\{u,v,x\},y,x\} = \{u,v,\{x,y,x\}\}$, $\{\{x,y,x\},y,z\} = \{x,y,\{x,y,z\}\}$. $\square$

Однако нетривиальную структуру альтернативной тройной системы или ассоциативной тройной системы второго типа операция (4) на свободной диалгебре не задает. Напомним, что альтернативная тройная система — это слабо альтернативная система с тождеством

$$\{u,v,\{x,y,z\}\} + \{x,y,\{u,v,z\}\} = \{\{u,v,x\},y,z\} + \{x,\{v,u,y\},z\},$$

а ассоциативная тройная система второго типа — это система с тождествами

$$\{u,v,\{x,y,z\}\} = \{u,\{y,x,v\},z\} = \{\{u,v,x\},y,z\}.$$

Поэтому по теореме 4 нам надо проверить в обоих случаях выполнение тождества $\{x,y,\{u,v,z\}\} = \{x,v,\{u,y,z\}\}$ для операций (10), (11). Легко видеть, что это тождество будет справедливо только в тривиальном случае.

Используя классификацию тождеств степени 2, т. е. тождеств вида

$$\sum_{\sigma\in S_5} \alpha_\sigma[[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}], x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}] = 0,$$

антикоммутативных тернарных алгебр, полученную в [16], мы можем описать также все однородные структуры антикоммутативных тернарных алгебр на свободной диалгебре. Но поскольку диалгебры были введены для потери антикоммутативности в алгебрах Ли, то и в тернарном случае антикоммутативность с тождеством степени 2 возможна только в исключительных случаях, а именно в характеристике 3.

Очевидно, что для антикоммутативности (4) должно иметь вид

$$[x_1,x_2,x_3] = \sum_{\sigma\in S_3} (-1)^\sigma \alpha\dot{x}_{\sigma1}x_{\sigma2}x_{\sigma3} + \beta x_{\sigma1}\dot{x}_{\sigma2}x_{\sigma3} + \gamma x_{\sigma1}x_{\sigma2}\dot{x}_{\sigma3}. \tag{12}$$

**Теорема 5.** *Операция* (12) *наделяет свободную диалгебру структурой антикоммутативной тернарной алгебры с тождеством степени* 2 *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{char} F = 3$, $\alpha = -\beta = \gamma$ (*или* $\beta = 0$, $\alpha\gamma = 0$) *и тождество имеет вид*

$$\sum (-1)^{\sigma} [[x_{\sigma 1}, x_{\sigma 2}, x_{\sigma 3}], x_{\sigma 4}, x_{\sigma 5}] = 0, \tag{13}$$

*где суммирование берется по всем* $\sigma \in S_5$ *таким, что* $\sigma 1 < \sigma 2 < \sigma 3$, $\sigma 4 < \sigma 5$.

Доказательство. Следуя [16], достаточно рассмотреть (1), (13) и тождества

$$[[a,b,c],d,e] = 0, \quad [[a,b,d],c,d] = 0, \quad [a,b,[a,b,c]] = 0,$$
$$[[a,b,c],d,e] + [[b,c,d],e,a] + [[c,d,e],a,b] + [[d,e,a],b,c] + [[e,a,b],c,d] = 0,$$
$$[[a,b,d],c,d] + [[b,c,d],a,d] + [[c,a,d],b,d] = 0. \tag{14}$$

Как и в теоремах 3, 4, легко показать, что последние тождества могут быть только с тривиальной операцией. Например, в случае тождества (14) достаточно всего лишь взять слова *cbade* и *cbaed* (в тождестве (14) мы провели линеаризацию $d \mapsto d + e$). Тождество (1) рассмотрено в теореме 3. Используя (13), от слова $x_1x_2x_3x_4x_5$ мы сразу же приходим к соотношениям

$$\alpha^2 + 2\alpha\Sigma = 0,\ 2\alpha\beta + \beta\Sigma = 0,\ \beta^2 + 2\alpha\gamma = 0,\ \beta\Sigma + 2\beta\gamma = 0,\ \gamma^2 + 2\gamma\Sigma = 0,$$

где $\Sigma = \alpha + \beta + \gamma$, откуда сразу же следуют требуемые ограничения на характеристику поля и на коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma$. Справедливость (13) в этом случае сразу вытекает из свободы диалгебры, антикоммутативности операции и того, что данное тождество инвариантно под действием $S_5$ — все это обеспечивает то, что указанные соотношения на коэффициенты дают полный набор соотношений. □

Замечание. Тождество (14) (вместе с антикоммутативностью) определяет класс, обобщающий алгебры Филиппова и характеризующийся тем свойством, что редуцированные алгебры для алгебр из данного класса являются алгебрами Ли. Тождество (13) характеризует $n$-алгебры Шлезингера — Сташефа, а также некоторый класс тройных систем из [17].

Далее мы посмотрим, когда операция (4) наделяет диалгебру структурой $(\epsilon, \delta)$-Фрейденталя — Кантора тройной системы (см., например, [18]).

Напомним определение таких систем. Пусть $\varepsilon = \pm 1$, $\delta = \pm 1$. Определим на тройной системе $(A; (\,,\,))$ операторы $L(x,y)z := (x,y,z)$, $K(x,y)z := (x,z,y) - \delta(y,z,x)$. Тройная система $A$ называется *системой* $(\epsilon, \delta)$-*Фрейденталя — Кантора*, если для любых $x, y, u, v \in A$ выполняются равенства

$$[L(u,v), L(x,y)] = L((u,v,x),y) + \varepsilon L(x,(v,u,y)), \tag{15}$$

$$K((x,y,u),v) + K(u,(x,y,v)) + \delta K(x, K(u,v)y) = 0. \tag{16}$$

**Лемма 6.** *Операция* (4) *наделяет свободную диалгебру структурой тройной системы с тождеством* (15) *тогда и только тогда, когда операция является одной из следующих* ($\kappa = \pm 1$)*:*

$$[x,y,z] = \dot{x}yz - \varepsilon\dot{z}yx, \quad [x,y,z] = xy\dot{z} - \varepsilon zy\dot{x},$$

$$[x,y,z] = (\dot{x}yz - x\dot{y}z + xy\dot{z}) - \varepsilon(\dot{z}yx - z\dot{y}x + zy\dot{x}),$$

$$[x,y,z] = (\dot{x}yz - \dot{z}xy) + \varepsilon(\dot{y}xz - \dot{z}yx), \quad [x,y,z] = (xy\dot{z} - \dot{z}xy) + \varepsilon(yx\dot{z} - \dot{z}yx),$$

$$[x,y,z] = (xy\dot{z} - zx\dot{y}) + \varepsilon(yx\dot{z} - zy\dot{x}), \quad [x,y,z] = xy\dot{z} - \varepsilon\dot{z}yx,$$

$$[x,y,z] = (\dot{x}yz - x\dot{y}z + xy\dot{z} - \dot{z}xy) - \varepsilon(\dot{z}yx - z\dot{y}x + zy\dot{x} - yx\dot{z}) + \kappa(\dot{y}xz - y\dot{x}z - yz\dot{x} + \varepsilon(z\dot{x}y - zx\dot{y})).$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущих теорем. Мы дадим только схему доказательства, а именно укажем слова, получаемые из тождества

$$(u,v,(x,y,z)) = ((u,v,x),y,z) + \varepsilon(x,(v,u,y),z) + (x,y,(u,v,z)),$$

которые необходимо рассмотреть для получения достаточных соотношений на коэффициенты.

Рассматривая слова $vxuzy, xuzvy$ и $yzvxu, yvzux$, сразу получаем, что коэффициенты с индексами 2 и 4 равны нулю.

В случае $\beta_1 \neq 0$, $\gamma_3 \neq 0$ достаточно рассмотреть слова $uvxyz$, $zyxvu$, $xvuyz$, $vuyxz$, $vuxyz$, $uvyxz$, $yvuxz$. Заметим, что в этом случае получаем все коэффициенты ненулевыми (кроме вышеуказанных).

В случае $\beta_1 \neq 0$, $\gamma_3 = 0$ достаточно еще рассмотреть слово $zvuxy$.

В случае $\beta_1 = 0$ имеем $\alpha_1\gamma_1 = 0$ и при $\alpha_1 \neq 0$, $\gamma_1 = 0$ достаточно еще рассмотреть $zyuvx$, $uvzxy$, $yxuvz$, а при $\alpha_1 = 0$, $\gamma_1 \neq 0$ — $zyxuv$, $zxuvy$.

В случае $\beta_1 = \alpha_1 = \gamma_1 = 0$ уже рассмотренные слова и $zxyvu$ приводят к тривиальной операции.

Доказательство того, что полученные операции действительно удовлетворяют тождеству (15), проведем только для случая первых трех операций, поскольку именно они нам понадобятся в дальнейшем. Для этих операций имеем $[x,y,z] = \{x,y,z\} - \varepsilon\{z,y,x\}$, где $\{\ ,\ ,\ \}$ — одна из классически ассоциативных тернарных операций (10), определенных в теореме 4. Поэтому (15) в данном случае эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned}&\{u,v,\{x,y,z\}\} - \varepsilon\{\{x,y,z\},v,u\} - \varepsilon\{u,v,\{z,y,x\}\} + \{\{z,y,x\},v,u\}\\ &\quad = \{\{u,v,x\},y,z\} - \varepsilon\{\{x,v,u\},y,z\} - \varepsilon\{z,y,\{u,v,x\}\} + \{z,y,\{x,v,u\}\}\\ &\quad + \varepsilon\{x,\{v,u,y\},z\} + \varepsilon\{z,\{y,u,v\},x\} - \{x,\{y,u,v\},z\} - \{z,\{v,u,y\},x\}\\ &\quad\quad + \{x,y,\{u,v,z\}\} + \{\{z,v,u\},y,x\} - \varepsilon\{x,y,\{z,v,u\}\} - \varepsilon\{\{u,v,z\},y,x\}.\end{aligned}$$

Последнее тождество справедливо в силу ассоциативности операции $\{\ ,\ ,\ \}$. $\square$

**Теорема 6.** *Операция* (4) *наделяет свободную диалгебру нетривиальной структурой* $(\varepsilon,\delta)$*-Фрейденталя — Кантора тройной системы тогда и только тогда, когда* $\varepsilon = -\delta$ *и операция является одной из следующих:*

$$[x,y,z] = \dot{x}yz - \varepsilon\dot{z}yx, \quad [x,y,z] = xy\dot{z} - \varepsilon zy\dot{x},$$

$$[x,y,z] = (\dot{x}yz - x\dot{y}z + xy\dot{z}) - \varepsilon(\dot{z}yx - z\dot{y}x + zy\dot{x}).$$

Доказательство. Тождество (16) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned}&((x,y,u),z,v) - (x,z,(v,y,u)) + (u,z,(x,y,v)) - ((u,y,v),z,x)\\ &\quad = \delta(((x,y,v),z,u) - (x,z,(u,y,v)) + (v,z,(x,y,u)) - ((v,y,u),z,x))).\end{aligned}$$

Рассматривая слово $xyuzv$, получаем, например, соотношения $\alpha_1\gamma_1 = \delta\alpha_6\gamma_1$, $\alpha_1^2 = \delta\alpha_1\alpha_6$ и $\gamma_1\Sigma_1 = \delta\gamma_6\Sigma_1$. Рассматривая слово $zyxuv$, имеем $\beta_3 = \alpha_3 + \gamma_3 = 0$. Эти соотношения и лемма 6 завершают доказательство теоремы. Заметим только, что условие $\epsilon = -\delta$ и справедливость равенства $[x,y,z] = -\varepsilon[z,y,x]$ обеспечивают выполнение (16). $\square$

**Следствие.** *Однородная операция наделяет свободную ассоциативную алгебру (или свободную ассоциативную тройную систему) нетривиальной структурой* $(\varepsilon,\delta)$*-Фрейденталя — Кантора тройной системы тогда и только тогда, когда* $\varepsilon=-\delta$ *и операция имеет вид* $[x,y,z]=xyz-\varepsilon zyx$.

Замечание. На самом деле мы получаем на диалгебре структуру $(\varepsilon,\delta)$-йордановой тройной системы (это случай $K(x,y)=0$) при $\varepsilon=-\delta$. Стандартные йордановы тройные системы — это случай $\varepsilon=-1,\delta=1$. Тройные системы с элементом $e$ таким, что $(e,x,e)=x$ для любого $x$, представляют особый интерес. А именно, вводя на такой системе операцию $x\star y=(x,e,y)$, мы в случае йордановых тройных систем приходим к йордановым алгебрам с единицей $e$, а в случае $(\pm1,-1)$-йордановых тройных систем — к алгебрам Ли [18]. Как известно, на йордановой алгебре и алгебре Ли мы можем определить структуру лиевой тройной системы, определяя операцию как ассоциатор и тройное произведение соответственно.

Наконец, найдем пары бинарных и тернарных однородных операций на диалгебре, которые дифференцируют друг друга. (Для двух бинарных операций это сделано в замечании после теоремы 1, а для двух совпадающих тернарных операций — в теореме 3.) В качестве следствия получаем дифференциально связанные операции на ассоциативной алгебре. В одну сторону доказательство нижеследующей теоремы проводится легкой проверкой, в то время как в другую сторону оно аналогично предыдущим доказательствам, и потому мы опускаем детали.

**Теорема 7.** *Однородная тернарная операция на свободной диалгебре дифференцирует однородную бинарную операцию, т. е.* $[x\star y,u,v]=[x,u,v]\star y+x\star[y,u,v]$*, тогда и только тогда, когда либо* $[x,y,z]=\alpha(\dot{x}yz-yz\dot{x})+\beta(\dot{x}zy-zy\dot{x})$*, либо*

$$\begin{aligned}
[x,y,z]&=\alpha_1(\dot{x}yz-\dot{y}zx)+\beta_1(\dot{x}yz-y\dot{z}x)+\gamma_1(\dot{x}yz-yz\dot{x})\\
&\quad+\alpha_2(\dot{x}zy-\dot{z}yx)+\beta_2(\dot{x}zy-z\dot{y}x)+\gamma_2(\dot{x}zy-zy\dot{x}),\\
x\star y&=\alpha\dot{x}y+\beta\dot{y}x;\\
[x,y,z]&=\alpha_1(\dot{x}yz-yz\dot{x})+\beta_1(x\dot{y}z-yz\dot{x})+\gamma_1(xy\dot{z}-yz\dot{x})\\
&\quad+\alpha_2(\dot{x}zy-zy\dot{x})+\beta_2(x\dot{z}y-zy\dot{x})+\gamma_2(xz\dot{y}-zy\dot{x}),\\
x\star y&=\alpha x\dot{y}+\beta y\dot{x},\quad \alpha_{(i)},\beta_{(i)},\gamma_i\in F.
\end{aligned}$$

*Однородная бинарная операция на свободной диалгебре дифференцирует однородную тернарную операцию, т. е.* $[x,y,z]\star v=[x\star v,y,z]+[x,y\star v,z]+[x,y,z\star v]$*, тогда и только тогда, когда либо* $x\star y=\dot{x}y-y\dot{x}$*, либо*

$$[x_1,x_2,x_3]=\sum_{\sigma\in S_3}\alpha_\sigma x_{\sigma1}x_{\sigma2}\dot{x}_{\sigma3},\quad x\star y=\alpha(\dot{x}y-y\dot{x})+\beta(x\dot{y}-y\dot{x});$$

$$[x_1,x_2,x_3]=\sum_{\sigma\in S_3}\alpha_\sigma \dot{x}_{\sigma1}x_{\sigma2}x_{\sigma3},\quad x\star y=\alpha(\dot{x}y-y\dot{x})+\beta(\dot{y}x-y\dot{x}).$$

**Следствие.** *Бинарная и тернарная операции на свободной диалгебре взаимно дифференцируют друг только в любом из следующих случаев:*

$$[x,y,z]=\alpha(\dot{x}yz-yz\dot{x})+\beta(\dot{x}zy-zy\dot{x}),\quad x\star y=\dot{x}y-y\dot{x},$$

$$[x,y,z]=\alpha(xyz-yzx)+\beta(xzy-zyx),\quad x\star y=xy-yx.$$

*Пара операций $[x,y,z] = (\dot{x}yz - yz\dot{x}) - (\dot{x}zy - zy\dot{x})$, $x \star y = \dot{x}y - y\dot{x}$ вводит на диалгебре структуру общей лейбницевой тройной системы, т. е. $[\ ,\ ,\ ]$ дифференцирует себя и операцию $\star$,*

$$[x,y,y] = 0, \quad [x,y,z] + [z,x,y] + [y,z,x] = [x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]],$$

$$[z,y,wx] + [z,w,xy] + [z,x,yw] = 0.$$

*Более того, $\star$ дифференцирует себя и операцию $[\ ,\ ,\ ]$.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Loday J.-L., Frabetti A., Chapoton F., Goichot F.* Dialgebras and related operads. Berlin: Springer-Verl., 2001. (Lecture Notes in Math.; N 1763).
2. *Kolesnikov P. S.* Многообразия диалгебр и конформные алгебры // Сиб. мат. журн. 2008. V. 49, N 2. P. 322–339.
3. *Филиппов В. Т.* $n$-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 126–140.
4. *Daletskii Y. L., Takhtajan L. A.* Leibniz and Lie algebra structures for Nambu algebra // Lett. Math. Phys. 1997. V. 39, N 2. P. 127–141.
5. *Nambu Y.* Generalized Hamiltonian mechanics // Phys. Rev. 1973. V. D(3), N 7. P. 2405–2412.
6. *Pojidaev A. P.* Enveloping algebras of Filippov algebras // Commun. Algebra. 2003. V. 31, N 2. P. 883–900.
7. *Perez-Izquierdo J. M., Shestakov I. P.* An envelope for Malcev algebras // J. of Algebra. 2004. V. 272, N 1. P. 379–393.
8. *Желябин В. Н., Шестаков И. П.* Теоремы Шевалле и константа для алгебр Мальцева // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 560–584.
9. *Perez-Izquierdo J. M.* Algebras, hyperalgebras, nonassociative bialgebras and loops // Adv. Math. 2007. V. 208, N 2. P. 834–876.
10. *Пожидаев А. П.* $n$-Арные алгебры Мальцева // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 3. С. 309–329.
11. *Brown R. B., Gray A.* Vector cross products // Comment. Math. Helv. 1967. V. 42. P. 222–236.
12. *Pojidaev A. P.* Solvability of the finite-dimensional commutative $n$-ary Leibniz algebras of characteristic 0 // Commun. Algebra. 2003. V. 31, N 1. P. 197–215.
13. *Casas J. M., Loday J.-L., Pirashvili T.* Leibniz $n$-algebras // Forum Math. 2002. V. 14, N 2. P. 189–207.
14. *Sagle A. A.* On anti-commutative algebras and general Lie triple systems // Pacif. J. Math. 1965. V. 15, N 1. P. 281–291.
15. *Филиппов В. Т.* Однородные тройные системы // Исследования по теории колец и алгебр. Новосибирск: Наука, 1989. С. 164–183. (Тр. Ин-та математики СО АН СССР; Т. 16).
16. *Bremner M.* Varieties of anticommutative $n$-ary algebras // J. of Algebra. 1997. V. 191, N 1. P. 76–88.
17. *Bremner M, Hentzel I.* Invariant nonassociative algebra structures on irreducible representations of simple Lie algebras // Exp. Math. 2004. V. 13, N 2. P. 231–256.
18. *Okubo S., Kamiya N.* Composition triple systems and realization of triple products in terms of bilinear algebras // Czech. J. Phys. 2003. V. 53, N 11. P. 1093–1099.


*Статья поступила 28 февраля 2007 г.*

Пожидаев Александр Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru