Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 517.518.17+517.97

КЛАССЫ ОТОБРАЖЕНИЙ СОБОЛЕВА НА ПРОСТРАНСТВАХ КАРНО — КАРАТЕОДОРИ. РАЗЛИЧНЫЕ НОРМИРОВКИ И ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

С. К. Водопьянов, Н. Н. Романовский

Аннотация. Доказывается эквивалентность различных определений классов Соболева и BV-классов отображений, определенных на области пространства Карно — Каратеодори со значениями в произвольном метрическом пространстве. Кроме того, доказаны существование и единственность решения одной вариационной задачи.

Ключевые слова: пространство Карно — Каратеодори, классы отображений Соболева, вариационная задача.

Посвящается 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева

Введение

В работах последних лет активно изучаются классы Соболева отображений со значениями в метрическом пространстве и их свойства (см. [1–12]). Основная мотивировка состоит в том, что в соответствующих классах удается находить решения ряда вариационных задач и строить «гармонические» отображения, принимающие наперед заданные граничные значения (см., например, [1, 5, 13–18]). Известно, что гармонические функции минимизируют функционал энергии

$$\operatorname{En}(u,\Omega) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^2\,dx.$$

Для отображений со значениями в метрическом пространстве (X,d) также можно определить аналог функционала энергии (см. [5])

$$F_2(u,\Omega) = \limsup_{f\in C_0(\Omega),0\le f\le 1}\ \limsup_{h\to 0} \frac{1}{|B(y,h)|}\int\limits_{\Omega}\ \int\limits_{B(y,h)} \frac{d[u(x),u(y)]^2}{h^2} f(y)\,dxdy.$$

В работе [5] показано, что для $X=\mathbb{R}$, $u\in W_2^1(\Omega)$ функционалы $\operatorname{En}(u,\Omega)$ и $F_2(u,\Omega)$ совпадают. Естественно говорить, что отображения u и w со значениями в метрическом пространстве (X,d) принимают одинаковые граничные

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06–01–00735–а), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ 5682.2008.1).

значения, если $d(u,w) \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Таким образом, можно назвать «гармоническим» отображение со значениями в метрическом пространстве, минимизирующее функционал энергии среди всех отображений, принимающих заданные граничные значения. В работах [1, 5, 13–18] доказаны существование, единственность и регулярность «гармонических» отображений со значениями в метрическом пространстве. В работе [5] сформулированная задача поставлена и решена для отображений, заданных в области риманова пространства, со значениями в сепарабельном метрическом пространстве неположительной кривизны по Александрову. В последующих работах данные результаты обобщаются на случай отображений, заданных в областях римановых пространств с особенностями [3, 16], римановых симплексов [1, 2, 15] и некоторых других метрических пространствах [6, 12], а также для отображений со значениями в сепарабельном метрическом пространстве с кривизной по Александрову, ограниченной сверху [11, 15].

Определение классов Соболева $W_p^1(\Omega; X)$, состоящих из отображений, заданных в области Ω евклидова пространства, со значениями в произвольном метрическом пространстве X, для $p > 1$ было дано в работе [5], для $p = 1$ — в работе [8] (см. также [9]), класса $BV(\Omega, X)$ — в работе [19]. Альтернативное определение классов $W_p^1(\Omega; X)$ для $p > 1$ дано в работе [8]. В [9] доказана эквивалентность определений классов $W_p^1(\Omega; X)$ из [5] и [8] для сепарабельного пространства X. В настоящей работе в отличие от большинства предыдущих работ рассматриваются отображения, заданные не в области риманова пространства, а в области произвольного пространства Карно — Каратеодори. Кроме того, мы несколько изменяем определение классов Соболева: по аналогии с классическими работами [20, 21] мы определяем их через «разностные отношения» для отображений, заданных в области пространства Карно — Каратеодори со значениями в метрическом пространстве (см. [22]). Применяемый в настоящей работе подход позволяет значительно упростить доказательство корректности вариационной задачи для соответствующего функционала энергии и дает возможность рассмотреть более широкий класс вариационных задач. Далее, мы более подробно сравнительно с предшествующими работами изучаем случай $p = 1$. При этом мы используем некоторые идеи и подходы идущие от классической работы [23], в которой изучаются функции одной переменной, и развитые впоследствии для функций многих переменных в [24]. Наш подход позволяет определять также классы $W_p^2(\Omega; X)$ дважды обобщенно дифференцируемых отображений со значениями в метрическом пространстве.

Перейдем к основным определениям. *Пространством Карно — Каратеодори* [25] будем называть C^∞-гладкое риманово многообразие M с выделенным набором C^∞-гладких векторных полей X_i, $i = 1, \dots, n$, со следующими свойствами.

1. Для каждой точки $m \in M$ система векторов $X_1(m), \dots, X_n(m)$ линейно независима.

2. Обозначим через V_i касательное подрасслоение, порожденное векторными полями X_j и их коммутаторами порядка не выше i. Размерность векторного пространства $V_i(m)$ не зависит от точки $m \in M$.

3. Для некоторого N подрасслоение V_N совпадает с касательным расслоением TM многообразия M.

Классом Соболева $W_p^1(\Omega)$ функций, заданных в области Ω пространства Карно — Каратеодори, называется пространство, состоящее из функций $f \in$

$L_p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $X_i f \in L_p(\Omega)$ вдоль векторных полей X_i, $i = 1, \dots, n$, и норму

$$\|f\|_{W_p^1(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\Omega,\mathbb{R}^n)},$$

где $\nabla_{\mathscr{L}} f = (X_1 f, \dots, X_n f)$ — субградиент функции f, а

$$\|\nabla_{\mathscr{L}} f\|_{L_p(\Omega,\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{i=1}^n \|X_i f\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Расстояние Карно — Каратеодори между двумя точками равно инфимуму длин кусочно гладких кривых, соединяющих эти точки и таких, что касательные векторы к этим кривым принадлежат касательному подрасслоению V_0, порождаемому векторными полями X_i, $i = 1, \dots, n$. Мера множества $E \subset M$ определяется стандартным образом как мера Лебега на римановом многообразии. Известно, что для шара в метрике Карно — Каратеодори $B(x, r)$ справедливо $C_1 r^\nu \le |B(x, r)| \le C_2 r^\nu$, где $\nu = n + \sum\limits_{i=0}^{N-1} (i+2) \dim(V_{i+1} \setminus V_i)$, а x принадлежит некоторому компактному множеству $K \subset M$ (C_1 и C_2 зависят от K), $r \le r_0$.

Класс $L_p(\Omega, X)$ состоит из отображений $u : \Omega \to X$ таких, что для всякой точки $z \in X$ функция $u_z(\cdot) = d(z, u(\cdot))$ принадлежит классу $L_p(\Omega)$. На $L_p(\Omega, X)$ естественно ввести метрику, полагая $\rho_{L_p}(u, v) = \|d(u, v)\|_{L_p(\Omega)}$.

Имеются два определения классов Соболева $W_p^1(\Omega, X)$, $1 < p < \infty$, отображений, заданных в области Ω евклидова пространства, со значениями в метрическом пространстве X (см. [5, 8]). В работе [9] доказана эквивалентность этих определений при условии, что $p > 1$ и X — полное сепарабельное метрическое пространство. Переформулируем эти определения для отображений, заданных в ограниченной области $\Omega \subset M$ пространства Карно — Каратеодори.

Определение 1 [26]. Пусть Ω — область пространства Карно — Каратеодори, (X, d) — произвольное метрическое пространство. *Класс Соболева* $W_p^1(\Omega, X)$ состоит из отображений $u : \Omega \to X$ таких, что для всякой точки $z \in X$ функция $u_z(\cdot) = d(z, u(\cdot))$ принадлежит классу Соболева $W_p^1(\Omega)$, причем существуют функции $w_i \in L_p(\Omega)$ такие, что для всех $z \in X$ выполняется неравенство $|X_i u_z(x)| \le w_i(x)$ для почти всех точек $x \in \Omega$, $i = 1, \dots, n$. Множество вектор-функций $(w_1, \dots, w_n)$ обозначим через $M(u)$. Определим величину

$$\|u\|_{L_p^1(\Omega,X)} = \inf\{\|w\|_{L_p(\Omega,\mathbb{R}^n)} \mid w \in M(u)\}.$$

Определение 2. Пусть Ω — ограниченная область пространства Карно — Каратеодори, (X, d) — произвольное метрическое пространство. Положим

$$E_p(u, \Omega) = \limsup_{h \to 0} \frac{1}{h^{\nu+p}} \int\limits_{\Omega_h} \int\limits_{B(y,h)} d[u(x), u(y)]^p \, dx dy,$$

где $\Omega_h = \{x \in \Omega \mid B(x, h) \subset \Omega\}$. Пусть $1 < p < \infty$. *Класс Соболева* $W_p^1(\Omega, X)$ состоит из отображений u класса $L_p(\Omega, X)$, для которых величина $E_p(u, \Omega)$ конечна.

Отметим, что для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ функционалы $E_p(u, \Omega)$ и $F_p(u, \Omega)$ (где F_p определяется по аналогии с F_2) совпадают. Таким образом, последнее определение эквивалентно определению класса $W_p^1(\Omega, X)$ из [5].

Сформулируем еще одно определение классов Соболева через «разностные отношения» (см. [22]) для отображений, заданных в области пространства Карно — Каратеодори со значениями в метрическом пространстве.

Определение 3. Положим

$$\mathscr{E}_p(u,\Omega) = \left(\left(\mathscr{E}_p^1(u)\right)^p + \dots + \left(\mathscr{E}_p^n(u)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\mathscr{E}_p^i(u) = \lim\limits_{h\to 0}\bigl\|h^{-1}d\bigl(u\bigl(\gamma_h^i(x)\bigr),u(x)\bigr)\bigr\|_{L_p(\Omega_h^i)}$, $h\mapsto\gamma_h^i(x)$ — интегральная линия векторного поля X_i, удовлетворяющая условию $\gamma_0^i(x)=x$, $\Omega_h^i=\bigl\{x\mid\gamma_t^i(x)\in\Omega,$ $t\in[0,h]$, если $h>0$, $t\in[h,0]$, если $h<0\bigr\}$. Пусть $1<p<\infty$. Определим *класс Соболева* $W_p^1(\Omega,X)$ как множество отображений из $L_p(\Omega,X)$, для которых величина $\mathscr{E}_p(u,\Omega)$ конечна.

Отметим, что в отличие от пространств Соболева $W_p^1(\Omega)$ вещественнозначных функций классы Соболева отображений со значениями в метрическом пространстве представляют собой не нормированное пространство, а метрическое пространство с метрикой

$$\rho(u,v) = \Biggl(\int\limits_\Omega (d[u(x),v(x)])^p\,dx\Biggr)^{\frac{1}{p}} + \Biggl(\sum_{i=1}^n \limsup_{h\to 0}\int\limits_{\Omega_h^i}\bigl|h^{-1}\bigl(d\bigl(u\bigl(\gamma_h^i(x)\bigr),u(x)\bigr)-d\bigl(v\bigl(\gamma_h^i(x)\bigr),v(x)\bigr)\bigr)\bigr|^p\,dx\Biggr)^{\frac{1}{p}}.$$

В настоящей работе мы доказываем, в частности, что для полного сепарабельного метрического пространства X конечность одной из величин $\|u\|_{L_p^1(\Omega,X)}$, $E_p(u,\Omega)$ и $\mathscr{E}_p(u,\Omega)$ влечет конечность остальных двух при $p>1$ (таким образом проверяется эквивалентность трех вышеприведенных определений при $p>1$). Сравнительно с работой [9] мы получаем новые доказательства эквивалентности определений 1 и 2 даже в том случае, когда Ω — область евклидова пространства. Более того, мы доказываем, что величины $\|u\|_{L_p^1(\Omega,X)}$ и $\mathscr{E}_p(u,\Omega)$ для $p>1$ совпадают.

Для $p=1$ конечность одной из двух величин $E_p(u,\Omega)$ и $\mathscr{E}_p(u,\Omega)$ влечет конечность другой, однако не обязательно влечет конечность $\|u\|_{L_p^1(\Omega,X)}$. Более того, для случая вещественнозначных функций $X=\mathbb{R}$ (см. [23, 24]) неравенство $\mathscr{E}_1(u,\Omega)<\infty$ определяет пространство функций ограниченной вариации $BV(\Omega)$.

По аналогии с [19] сформулируем определение класса $BV(\Omega,X)$ отображений ограниченной вариации, заданных в области Ω пространства Карно — Каратеодори, со значениями в сепарабельном метрическом пространстве X.

Определение 4 (см. также [19]). 1. *Пространство* $BV(\Omega)$ состоит из функций $f\in L_1(\Omega)$, обобщенные производные которых совпадают с некоторыми регулярными ограниченными на Ω зарядами μ^i, $i=1,\dots,n$. Норма в $BV(\Omega)$ определяется следующим образом:

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L_1(\Omega)} + \sum_i \operatorname{Var}_\Omega(\mu^i).$$

Будем обозначать векторный заряд $(\mu^1,\dots,\mu^n)$ через $\nabla_{\mathscr{L}} f$.

2. Класс $BV(\Omega,X)$ состоит из отображений $u\in L_1(\Omega,X)$ таких, что для всех точек x метрического пространства X функция $u_x(\cdot)=d(x,u(\cdot))$ принадлежит

классу $BV(\Omega)$, причем для некоторой регулярной конечной меры w выполняется неравенство $\mathrm{Var}_E(\nabla_{\mathscr{L}} u_x) \le w(E)$ для всех борелевских множеств $E \subset \Omega$.

В настоящей работе показано, что отображение $u \in L_1(\Omega; X)$ принадлежит классу $BV(\Omega, X)$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{E}_1(u, \Omega) < \infty$. При этом на метрическое пространство X накладываются некоторые дополнительные условия.

Также в настоящей работе получен критерий того, когда отображение $u \in L_1(\Omega; X)$ принадлежит классу $W_1^1(\Omega, X)$, где X — произвольное сепарабельное метрическое пространство.

Отметим, что предложенный в настоящей работе подход позволяет определить классы $W_p^2(\Omega; X)$, $1 \le p < \infty$, состоящие из дважды обобщенно дифференцируемых отображений со значениями в метрическом пространстве.

Определение 5. Предположим, что для любых двух точек метрического пространства X существует единственная кратчайшая, соединяющая эти точки. Определим *класс* $W_p^2(\Omega; X)$, $1 \le p < \infty$, как множество отображений из $W_p^1(\Omega; X)$, для которых конечны величины

$$\limsup_{h\to 0} \big\| h^{-2} d\big(\theta_h^i u(x), u(x)\big)\big\|_{L_p(\Omega_h^i \cap \Omega_{-h}^i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\theta_h^i u(x)$ — середина кратчайшей, соединяющей точки $u\big(\gamma_{-h}^i(x)\big)$ и $u\big(\gamma_h^i(x)\big)$.

Известно, что в метрическом пространстве кривизны неположительной по Александрову для любых двух точек всегда существует единственная кратчайшая, соединяющая эти точки.

Во второй части работы доказывается корректность вариационной задачи, соответствующей функционалу $\mathscr{E}_2(u, \Omega)$. Аналогичные задачи для функционала $F_2(u, \Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) и их многочисленные модификации рассмотрены в работах [1, 5, 13–18]. Легко видеть, что в случае, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{E}_2(u, \Omega)^2$ и $F_2(u, \Omega)$ совпадают с функционалом энергии, уравнением Эйлера для которого является уравнение Лапласа. В случае, когда область значений рассматриваемых отображений лежит не в $\mathbb{R}$, а в произвольном метрическом пространстве, функционалы $\mathscr{E}_2(u, \Omega)^2$ и $F_2(u, \Omega)$ не совпадают. Предлагаемое в работе доказательство корректности вариационной задачи для функционала $\mathscr{E}_2(u, \Omega)$, опирающееся на следствие из теоремы 1, значительно проще по сравнению с доказательством корректности вариационной задачи для функционала $F_2(u, \Omega)$ из работы [5].

1. Классы Соболева отображений со значениями в метрическом пространстве

Везде далее через Ω будем обозначать ограниченную область пространства Карно — Каратеодори.

Предложение 1 [27]. *Пусть* $1 \le p < \infty$. *Множество гладких функций* $C^\infty(\Omega)$ *плотно в пространстве Соболева* $W_p^1(\Omega)$.

Пусть функция f задана в области Ω. *Разностным отношением функции* f относительно векторного поля X_i будем называть величину

$$\Delta_h^i f(x) = \frac{f\big(\gamma_h^i(x)\big) - f(x)}{h}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $h \mapsto \gamma_h^i(x)$ — интегральная линия векторного поля X_i, удовлетворяющая условию $\gamma_0^i(x) = x$ (ее называют *однопараметрической группой, соответствующей векторному полю* X_i).

Функция $\Delta_h^i f(x)$ определена в области $\Omega_h^i = \{x \mid \gamma_t^i(x) \in \Omega,\ t \in [0,h]$, если $h > 0$, $t \in [h,0]$, если $h < 0\}$. Поскольку замыкание области Ω компактно, $\gamma_h^i(x)$ определена для всех $x \in \Omega$ и всех $h \in (-h_0, h_0)$, где $h_0 = h_0(\Omega)$ — некоторое положительное число.

Фиксируем гладкую функцию f. Тогда для всех $x \in \Omega_h^i$ имеем

$$\Delta_h^i f(x) = \frac{1}{h} \int\limits_0^h X_i f\bigl(\gamma_z^i(x)\bigr)\, dz, \tag{1}$$

где для отрицательных h интеграл $\int\limits_0^h g(x)\, dx$ в (1) и везде далее полагаем равным $-\int\limits_h^0 g(x)\, dx$.

Предложение 2. *Пусть функция f принадлежит пространству Соболева $W_1^1(\Omega)$. Тогда для почти всех точек $x \in \Omega_h^i$, $h \in (-h_0, h_0)$, выполняется равенство* (1).

Доказательство. По предложению 1 существует последовательность f^k гладких функций, сходящаяся в норме пространства Соболева к функции f. В силу теоремы Фубини для почти всех $x \in \Omega_h^i$, $|h| \le h_0$, ограничения функции $X_i f$ на линии $\gamma(x) = \{\gamma_t^i(x) \mid t \in [0,h]$ для $h > 0,\ t \in [h,0]$ для $h < 0\}$ принадлежат классу $L_1([0,h])$ для $h > 0$ или классу $L_1([h,0])$ для $h < 0$, причем выполняется

$$\int\limits_{\Omega_h^i} \|X_i f - X_i f^k\|_{L_1(\gamma(x))}\, dx \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что для почти всех $x \in \Omega_h^i$

$$\|X_i f - X_i f^k\|_{L_1(\gamma(x))} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

С другой стороны, переходя еще раз, если необходимо, к подпоследовательности, получаем

$$\Delta_h^i f^k(x) \to \Delta_h^i f(x) \quad \text{при } m \to \infty$$

для почти всех точек $x \in \Omega_h^i$.

Для всякой точки $x \in \Omega_h^i$ в силу равенства (1) имеем

$$\Delta_h^i f^k(x) = \frac{1}{h} \int\limits_0^h X_i f^k\bigl(\gamma_z^i(x)\bigr)\, dz.$$

Переходя в правой и левой частях последнего равенства к пределу при $k \to \infty$, получаем требуемое утверждение.

Лемма 1. *Для любых функций $f \in C^\infty(\Omega)$ и $\varphi \in C_0^\infty\bigl(\Omega_h^i\bigr)$ выполняется соотношение*

$$\int\limits_\Omega \Delta_h^i f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega \Delta_{-h}^i \varphi(x) \cdot f(x)\, dx + \int\limits_\Omega \frac{1}{h}\bigl(1 - \bigl|\det\bigl(D\gamma_h^i(x)\bigr)\bigr|\bigr) f\bigl(\gamma_h^i(x)\bigr)\varphi(x)\, dx \tag{2}$$

(функцию $\Delta_h^i f \cdot \varphi$ можно считать определенной и равной нулю вне Ω_h^i), причем $h^{-1}\bigl|1-\bigl(\det(D\gamma_h^i(x)\bigr)\bigr|$ не превосходит положительной постоянной $C(X_1,\dots,X_n)$, не зависящей от h.

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_\Omega \bigl(\Delta_h^i f(x)\cdot\varphi(x)-\Delta_{-h}^i\varphi(x)\cdot f(x)\bigr)\,dx = \int\limits_\Omega \frac{\bigl(f\bigl(\gamma_h^i(x)\bigr)-f(x)\bigr)\varphi(x)}{h}\,dx - \int\limits_\Omega \frac{\bigl(\varphi(x)-\varphi\bigl(\gamma_{-h}^i(x)\bigr)\bigr)f(x)}{h}\,dx.$$

В силу того, что $\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega_h^i$, получаем

$$\int\limits_\Omega \bigl(\Delta_h^i f(x)\cdot\varphi(x)-\Delta_{-h}^i\varphi(x)\cdot f(x)\bigr)\,dx = \int\limits_\Omega \frac{f\bigl(\gamma_h^i(x)\bigr)\varphi(x)}{h}\,dx - \int\limits_{\gamma_h^i(\Omega)} \frac{f(x)\varphi\bigl(\gamma_{-h}^i(x)\bigr)}{h}\,dx.$$

После замены переменной интегрирования во втором интеграле получаем требуемое равенство. Оценка $\frac{1}{h}\bigl|\bigl|\det\bigl(D\gamma_h^i(x)\bigr)\bigr|-1\bigr|\le C(X_1,\dots,X_n)$ следует из того, что при $h\to 0$ выражение $h^{-1}\bigl(\det\bigl(D\gamma_h^i(x)\bigr)-1\bigr)$ стремится к $\operatorname{tr}\bigl(\frac{\partial}{\partial h}D\gamma_h^i(x)\bigr)=\operatorname{div}(X_i)$, см. доказательство т. Лиувилля в [28].

Для случая евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, групп Гейзенберга, групп Карно, а также многообразий Лежандра имеем $\det\bigl(D\gamma_h^i(x)\bigr)=1$ и соответственно равенство

$$\int\limits_\Omega \bigl(\Delta_h^i f(x)\cdot\varphi(x)-\Delta_{-h}^i\varphi(x)\cdot f(x)\bigr)\,dx = 0.$$

Введем обозначение для формально сопряженного дифференциального оператора к векторному полю X_i: $X_i^* f = X_i f + \operatorname{div}(X_i) f$. Обобщенная производная $X_i f$ функции $f\in L_p(\Omega)$ определяется как локально суммируемая функция g_i такая, что для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется соотношение

$$\int\limits_\Omega g_i(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_\Omega f(x)X_i^*\varphi(x)\,dx.$$

Лемма 2. *Пусть $f\in L_p(\Omega)$, $p\in(1,\infty)$. Тогда условие $f\in W_p^1(\Omega)$ равносильно условию*

$$\liminf_{h\to 0}\bigl\|\Delta_h^i f\bigr\|_{L_p(\Omega_h^i)}<\infty,\quad i=1,\dots,n.$$

Далее, при выполнении хотя бы одного из этих условий имеет место сходимость

$$\bigl\|\Delta_h^i f - X_i f\bigr\|_{L_p(\Omega_h^i)}\to 0\quad \text{при } h\to 0,$$

в частности, $\|X_i f\|_{L_p(\Omega)}=\lim\limits_{h\to 0}\bigl\|\Delta_h^i f\bigr\|_{L_p(\Omega_h^i)}$, $i=1,\dots,n$.

Доказательство. Пусть

$$\liminf_{h\to 0}\bigl\|\Delta_h^i f\bigr\|_{L_p(\Omega_h^i)}<\infty,\quad i=1,\dots,n.$$

Обозначим через $\Delta_{h_k}^i f$ последовательность, предел которой равен записанному выше нижнему пределу. Множество $\Delta_{h_k}^i f$ ограничено в L_p. Ограниченные в L_p множества слабо компактны. Следовательно, существует слабо сходящаяся подпоследовательность $\Delta^i_{h_{k_l}} f$. Обозначим ее слабый предел через g_i. Далее, принимая во внимание равенство (2) и то, что $\Delta^i_h\varphi$ равномерно стремится к $X_i\varphi$ при $h \to 0$ для любой гладкой финитной функции φ, получаем, что g_i есть обобщенная производная функции f. В силу свойств полунепрерывности нормы пространства L_p относительно слабой сходимости имеем

$$\|g_i\|_{L_p(\Omega)} \le \liminf_{h\to 0} \bigl\|\Delta^i_h f\bigr\|_{L_p(\Omega^i_h)}.$$

Обратно, в силу предложения 2 для почти всех $x \in \Omega^i_h$ можно написать

$$\Delta^i_h f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h X_i f\bigl(\gamma^i_z(x)\bigr)\,dz.$$

Интегрируя левую и правую части последнего равенства и применяя неравенство Минковского, получаем

$$\bigl\|\Delta_h f\bigr\|_{L_p(\Omega^i_h)} = \left\|\frac{1}{h}\int\limits_0^h X_i f\bigl(\gamma^i_z(x)\bigr)\,dz\right\|_{L_p(\Omega^i_h)}$$
$$\le \frac{1}{h}\int\limits_0^h \sup_{|t|\le h}\bigl\|X_i f\circ\gamma^i_t(x)\bigr\|_{L_p(\Omega^i_h)}\,dz \le C\|X_i f\|_{L_p(\Omega^i_h)}.$$

Аналогично, используя неравенство $\bigl|1-\det\bigl(D\gamma^i_h(x)\bigr)\bigr| \le Ch$ из леммы 1, выводим

$$\bigl\|\Delta^i_h f - X_i f\bigr\|_{L_p(\Omega^i_h)} = \left\|\frac{1}{h}\int\limits_0^h \bigl(X_i f\bigl(\gamma^i_z(x)\bigr) - X_i f(x)\bigr)\,dz\right\|_{L_p(\Omega^i_h)}$$
$$\le \frac{1}{h}\int\limits_0^h \sup_{|t|\le h}\bigl\|X_i f\circ\gamma^i_t(x) - X_i f(x)\bigr\|_{L_p(\Omega^i_h)}\,dz \to 0 \text{ при } h\to 0,$$

что завершает доказательство.

Лемма 3. *Пусть $f \in L_1(\Omega)$. Условие*

$$M_i = \liminf_{h\to 0}\bigl\|\Delta^i_h f\bigr\|_{L_1(\Omega^i_h)} < \infty, \quad i = 1,\dots,n,$$

необходимо и достаточно для того, чтобы функция f принадлежала классу $BV(\Omega)$. При этом

$$\operatorname{Var}_\Omega |X^i f| \le M_i, \quad i = 1,\dots,n.$$

Обратно,

$$M_i \le \operatorname{Var}_\Omega |X^i f| + C\|f\|_{L_1(\Omega)}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Доказательство. Имеем $\bigl\|\Delta^i_{h_j} f\bigr\|_{L_1(\Omega^i_h)} \to M_i$ для некоторой последовательности $h_j \to 0$. Рассмотрим последовательность зарядов

$$\mu^i_j(E) = \int\limits_E \Delta^i_{h_j} f(x)\,dx, \quad E \subset \Omega.$$

В силу известных свойств интеграла Лебега эти заряды регулярны и ограничены, при этом

$$\mathrm{Var}_\Omega\bigl|\mu_j^i\bigr| = \int\limits_\Omega \bigl|\Delta_{h_j}^i f(x)\bigr|\,dx = \bigl\|\Delta_{h_j}^i f\bigr\|_{L_1(\Omega)}.$$

Рассмотрим пространство $V(\Omega)$ регулярных ограниченных зарядов μ на Ω с нормой $\|\mu\| = \mathrm{Var}_\Omega(\mu)$. В силу известной теоремы Ф. Рисса пространство $V(\Omega)$ можно отождествить с сопряженным к пространству $C_0(\Omega)$. Так как шар сопряженного пространства компактен в слабой топологии, то для некоторой последовательности индексов j_k и заряда μ^i

$$\int\limits_\Omega \psi(x)\,d\mu_{j_k}^i \to \int\limits_\Omega \psi(x)\,d\mu^i \quad \text{при } k\to\infty$$

для любой функции $\psi \in C_0(\Omega)$, $i = 1,\dots,n$.

В силу теоремы Радона — Никодима имеем $d\mu_j^i = \Delta_{h_j}^i f(x)\,dx$. Следовательно,

$$\int \Delta_{h_{j_k}}^i f(x)\psi(x)\,dx \to \int\limits_\Omega \psi(x)\,d\mu^i \quad \text{при } k\to\infty.$$

Если $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, то начиная с некоторого j (см. лемму 1)

$$\int\limits_\Omega \Delta_{h_j} f(x)\psi(x)\,dx = \int\limits_\Omega \bigl(f(x)\Delta_{-h_j}\psi(x) + f\bigl(\gamma_h^i(x)\bigr)$$

$$\times\, h^{-1}\bigl(1 - \bigl|\det\bigl(D\gamma_h^i(x)\bigr)\bigr|\bigr)\psi(x)\bigr)\,dx \to -\int f(x)X_i^*\psi(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int \psi(x)\,d\mu^i = -\int f(x)X_i^*\psi(x)\,dx,$$

т. е. μ^i есть обобщенная производная функции f. Используя полунепрерывность нормы относительно слабой сходимости, получаем

$$\mathrm{Var}_\Omega(\mu^i) = \|\mu\| \le \liminf_{j\to\infty}\bigl\|\mu_j^i\bigr\| = M_i.$$

Обратно, пусть обобщенная производная функции f есть регулярный ограниченный заряд μ^i. Отметим, что если функция ψ принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$, то при достаточно малом $|h|$ функция

$$\psi_h(x) = \frac{1}{h}\int\limits_0^h \psi\bigl(\gamma_t^i(x)\bigr)\,dt$$

также принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$. Так как в силу предположения справедливо тождество

$$\int\limits_\Omega f(x)X_i^*\psi(x)\,dx = -\int\limits_\Omega \psi(x)\,d\mu^i,$$

то, подставляя в него $\psi_{-h}(x)$ вместо $\psi(x)$ и учитывая (1), получим

$$-\int\limits_\Omega f(x)\bigl(\Delta_{-h}^i\psi(x)\bigr)\,dx = \int\limits_\Omega \psi_{-h}(x)d\mu^i + \int\limits_\Omega f(x)\,\mathrm{div}(X_i)\psi_{-h}(x)\,dx$$

для достаточно малых $|h|$. Легко видеть, что $\sup\limits_x |\psi_{-h}(x)| \le \sup\limits_x |\psi(x)|$. Следовательно, в силу гладкости векторных полей X_i и ограниченности области Ω

$$\left| \int\limits_{\Omega_h^i} \Delta_h^i f(x)\psi(x)\, dx \right| \le \mathrm{Var}_\Omega(\mu^i) \sup_x |\psi(x)| + C\|f\|_{L_1(\Omega)} \sup_x |\psi(x)|. \tag{3}$$

Обозначим через $\chi_{h,\varepsilon}(x)$ функцию, равную $\mathrm{sign}\big(\Delta_h^i f(x)\big)$ на $\Omega_{h,\varepsilon}^i$ и нулю на $\Omega \setminus \Omega_{h,\varepsilon}^i$, где $\Omega_{h,\varepsilon}^i = \big\{x \in \Omega_h^i \mid d\big(x, \partial\Omega_h^i\big) > \varepsilon\big\}$. Через $\chi_{h,\varepsilon,j}(x)$ обозначим последовательность сверток функции $\chi_{h,\varepsilon}(x)$ с ядрами $(2j/\varepsilon)^{-1}K(2jx/\varepsilon)$, где K — сглаживающее ядро с носителем, содержащимся в единичном шаре, сглаживание ведется только вдоль интегральных линий векторного поля X_i. Другими словами,

$$\chi_{h,\varepsilon,j}(x) = \int\limits_{-(2j/\varepsilon)^{-1}}^{(2j/\varepsilon)^{-1}} \chi_{h,\varepsilon}\big(\gamma_t^i(x)\big)(2j/\varepsilon)^{-1}K(2jt/\varepsilon)\, dt,$$

где $K \in C_0^\infty([-1,1])$, $\int K(x)\, dx = 1$. Функции $\chi_{h,\varepsilon,j}$ являются гладкими только вдоль интегральных линий векторного поля X_i, однако, учитывая аналог предложения 1 для пространства $BV(\Omega)$ (см. [27]) легко видеть, что формула (3) останется верной, если в ней заменить ψ на $\chi_{h,\varepsilon,j}$.

Подставляя $\chi_{h,\varepsilon,j}(x)$ вместо ψ в формулу (3) и переходя к пределу при $j \to \infty$, получаем

$$\big\|\Delta_h^i f\big\|_{L_1(\Omega_{h,\varepsilon}^i)} \le \mathop{\mathrm{Var}}_\Omega |\mu| + C\|f\|_{L_1(\Omega)} \le C\|f\|_{BV(\Omega)} \tag{4}$$

для $|h| < c(\varepsilon)$ (поскольку формула (3) верна только для $|h|$, не превосходящих некоторого положительного числа, зависящего от носителя ψ).

Докажем, что в действительности неравенство (4) верно для любого h. Для этого покажем, что

$$\big\|\Delta_h^i f\big\|_{L_1(\Omega_{h,\varepsilon}^i)} \le C(h)\big\|\Delta_{h/m}^i f\big\|_{L_1(\Omega_{h/m,\varepsilon}^i)} \tag{5}$$

для любого натурального числа m, где $C(h) \to 1$ при $h \to 0$. Действительно,

$$\begin{aligned}\Delta_h^i f(x) = \frac{f\big(\gamma_h^i(x)\big) - f(x)}{h} &= \frac{f\big(\gamma_{h/m}^i(x)\big) - f(x)}{h} \\ &+ \frac{f\big(\gamma_{2h/m}^i(x)\big) - f\big(\gamma_{h/m}^i(x)\big)}{h} + \dots + \frac{f\big(\gamma_h^i(x)\big) - f\big(\gamma_{(m-1)h/m}^i(x)\big)}{h}.\end{aligned}$$

Используя неравенство треугольника и интегрируя по x, получаем

$$\begin{aligned}\big\|\Delta_h^i f\big\|_{L_1(\Omega_h^i)} \le \frac{1}{m}\Big(\big\|\Delta_{h/m}^i f\big\|_{L_1(\Omega_h^i)} &+ \big\|\Delta_{h/m}^i f \circ \gamma_{h/m}^i(x)\big\|_{L_1(\Omega_h^i)} + \\ &\dots + \big\|\Delta_{h/m}^i f \circ \gamma_{(m-1)h/m}^i(x)\big\|_{L_1(\Omega_h^i)}\Big).\end{aligned}$$

Отсюда, вычисляя якобиан отображения $x \mapsto \gamma_{jh/m}^i(x)$, $j = 1, \dots, m-1$, выводим оценку (5).

В итоге из (5) следует, что неравенство (4) выполняется для любого h. Переходя в (4) к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к оценке

$$\big\|\Delta_h^i f\big\|_{L_1(\Omega_h)} \le C(h)\|f\|_{BV(\Omega)}$$

для любого $h < h_0$, где $C(h) \to C$ при $h \to 0$.

Лемма 4. *Пусть $f \in L_1(\Omega)$ и $h_j \to 0$ $(j \to \infty)$ — некоторая последовательность чисел. Для того чтобы обобщенные производные функции f существовали в $L_1(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы равномерно по $h = h_j$ $(1 \leq j < \infty)$ выполнялось соотношение*

$$\lim_{|E|\to 0} \bigl\|\Delta_h^i f\bigr\|_{L_1(E\cap\Omega_h^i)} = 0 \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n.$$

Доказательство. Покажем достаточность сформулированного условия. В силу известной теоремы функционального анализа (см., например, [29]) множество $\Delta_{h_j}^i f$, $j = 1, 2, \dots$, слабо компактно в $L_1(\Omega)$. Следовательно, существуют функция $g_i \in L_1(\Omega)$ и последовательность индексов j_k такие, что

$$\int_\Omega \Delta_{h_{j_k}}^i f(x)\varphi(x)\,dx \to \int_\Omega g_i(x)\varphi(x)\,dx$$

для любой $\varphi \in L_\infty(\Omega)$.

Далее доказательство почти дословно совпадает с соответствующим фрагментом доказательства леммы 2.

Покажем необходимость сформулированного условия. Пусть обобщенная производная существует в $L_1(\Omega)$. Тогда для $h \geq 0$ и любого измеримого множества $E \subset \Omega$ в силу соотношения (1) имеем

$$\|\Delta_h f\|_{L_1(E\cap\Omega_h^i)} = \left\| \frac{1}{h}\int_0^h X_i f\bigl(\gamma_z^i(x)\bigr)\,dz \right\|_{L_1(E\cap\Omega_h^i)}$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_0^h \sup_{|t|\leq h} \bigl\|X_i f \circ \gamma_t^i(x)\bigr\|_{L_1(E)}\,dz \leq C\|X_i f\|_{L_1(E)}.$$

Абсолютная непрерывность интеграла Лебега приводит к требуемой оценке.

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$. Пусть метрическое пространство X сепарабельно. Отображение $u \in L_p(\Omega, X)$ принадлежит классу $W_p^1(\Omega, X)$ в смысле определения 1 в том и только том случае, если*

$$\max_i \liminf_{h\to 0} \bigl\|h^{-1} d\bigl(u\bigl(\gamma_h^i(x)\bigr), u(x)\bigr)\bigr\|_{L_p(\Omega_h^i)} < \infty,$$

при этом величина $\|u\|_{L_p^1(\Omega,X)}$ равна $\bigl(\bigl(\mathscr{E}_p^1\bigr)^p + \dots + \bigl(\mathscr{E}_p^n\bigr)^p\bigr)^{\frac{1}{p}}$, где

$$\mathscr{E}_p^i = \liminf_{h\to 0} \bigl\|h^{-1} d\bigl(u\bigl(\gamma_h^i(x)\bigr), u(x)\bigr)\bigr\|_{L_p(\Omega_h^i)}.$$

Доказательство. Зададим функцию $d_h^i u(y) = \frac{1}{h} d\bigl(u\bigl(\gamma_h^i(y)\bigr), u(y)\bigr)$. Пусть

$$\max_i \liminf_{h\to 0} \int_{\Omega_h^i} \frac{d\bigl(u\bigl(\gamma_h^i(y)\bigr), u(y)\bigr)^p}{h^p}\,dy < \infty.$$

Положим $u_x(y) = d(x, u(y))$. Из неравенства треугольника легко выводим, что

$$d_h^i u(y) \geq \bigl|\Delta_h^i u_x(y)\bigr|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{6}$$

для всех $x \in X$ и для всех $y \in \Omega_h^i$.

Из леммы 2 получаем, что для всех $x \in X$ функции u_x принадлежат классу $W_p^1(\Omega)$, причем

$$\|X_i u_x\|_{L_p(\Omega)} \le \liminf_{h\to 0} \big\|h^{-1} d\big(u\big(\gamma_h^i(y)\big), u(y)\big)\big\|_{L_p(\Omega_h^i)}.$$

Рассмотрим поточечный нижний предел

$$d^i u(y) := \liminf_{h\to 0} d_h^i u(y).$$

Эта функция измерима. В силу полунепрерывности L_p-нормы получаем

$$\|d^i u\|_{L_p(\Omega)} \le \liminf_{h\to 0} \big\|h^{-1} d\big(u\big(\gamma_h^i(x)\big), u(x)\big)\big\|_{L_p(\Omega_h^i)}. \tag{7}$$

Пусть $h_k \to 0$ — последовательность, на которой реализуется описанный нижний предел. Далее, легко видеть, что $\Delta_h^i u_x \to X_i u_x$, когда $h \to 0$ в норме пространства $L_p(\Omega)$. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность $h_{k_l} \to 0$ такую, что для всех точек x счетного всюду плотного в X множества последовательность функций $\Delta_{h_{k_l}}^i u_x$ сходится почти всюду к $X_i u_x$. В силу неравенства (6) получаем, что для всех $x \in X$

$$d^i u(y) \ge |X_i u_x(y)| \quad \text{для почти всех } y \in \Omega.$$

Для того чтобы доказать первую часть теоремы, остается взять в качестве функций w_i из определения 1 функции $d^i u$ и учесть неравенство (7), $i = 1, \dots, n$.

Обратно, предположим, что отображение u принадлежит классу $W_p^1(\Omega)$ в смысле определения 1.

В силу предложения 2 для любой точки $x \in X$ для всех точек $y \in \Omega_h^i$, не принадлежащих множеству нулевой меры E_x, выполняется

$$\frac{1}{h}\big|u_x\big(\gamma_h^i(y)\big) - u_x(y)\big| \le \frac{1}{h}\int_0^h \big|X_i u_x\big(\gamma_z^i(y)\big)\big|\, dz \le \frac{1}{h}\int_0^h w\big(\gamma_z^i(y)\big)\, dz.$$

Выберем счетный всюду плотный набор точек $\{x_k\}$ в пространстве X. Обозначим $E = \bigcup E_{x_k}$. Взяв точку x_k из фиксированного набора достаточно близкой к $u(y)$, для всех $y \in \Omega_h^i \setminus E$ имеем

$$\frac{1}{h} d\big(u\big(\gamma_h^i(y)\big), u(y)\big) \le \frac{1}{h}\int_0^h w\big(\gamma_z^i(y)\big)\, dz.$$

Проинтегрировав левую и правую части последнего неравенства и применив неравенство Минковского, получим

$$\frac{1}{h}\big\|d\big(u\big(\gamma_h^i(y)\big), u(y)\big)\big\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{1}{h}\int_0^h \sup_{|t|\le|h|} \big\|w \circ \gamma_t^i(y)\big\|_{L_p(\Omega)}\, dz.$$

Отсюда окончательно

$$\frac{1}{h}\big\|d\big(u\big(\gamma_h^i(\cdot)\big), u(\cdot)\big)\big\|_{L_p(\Omega)} \le \frac{1}{h}\sup_{|t|\le|h|} \big\|w \circ \gamma_t^i(y)\big\|_{L_p(\Omega)} \int_0^h dz \le C\|w\|_{L_p(\Omega)}.$$

Кроме того,

$$\limsup_{h\to 0} \frac{1}{h}\big\|d\big(u\big(\gamma_h^i(\cdot)\big), u(\cdot)\big)\big\|_{L_p(\Omega)} \le \|w\|_{L_p(\Omega)}.$$

Следствие. *Пусть $1 < p < \infty$. Тогда*
$$\mathscr{E}_p^i = \liminf_{h\to 0}\left\|h^{-1}d\big(u\big(\gamma_h^i(x)\big), u(x)\big)\right\|_{L_p(\Omega_h^i)} = \limsup_{h\to 0}\left\|h^{-1}d\big(u\big(\gamma_h^i(x)\big), u(x)\big)\right\|_{L_p(\Omega_h^i)}.$$

Определение 6. В дальнейшем функционал $\mathscr{E}_p(u,\Omega) = \big(\big(\mathscr{E}_p^1\big)^p + \dots + \big(\mathscr{E}_p^n\big)^p\big)^{\frac{1}{p}}$ будем называть *функционалом p-энергии.*

Теорема 2. *Предположим, что для всякого $\varepsilon > 0$ можно построить счетное конечнократное покрытие метрического пространства X шарами радиуса ε, причем кратность этих покрытий не зависит от ε. Пусть u — отображение класса $L_1(\Omega, X)$. Определим величину $\mathscr{E}_1(u,\Omega)$ так же, как в теореме 1. Неравенство $\mathscr{E}_1(u,\Omega) < \infty$ эквивалентно тому, что отображение u принадлежит классу $BV(\Omega, X)$ в смысле определения 4.*

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть $\mathscr{E}_1(u,\Omega) < \infty$. Так же, как при доказательстве теоремы 1, определим функции $d_h^i u$. Из леммы 3 получаем, что для всех $x \in X$ функции u_x принадлежат классу $BV(\Omega)$. Рассмотрим поточечный нижний предел
$$d^i u := \liminf_{h\to 0} d_h^i u.$$
Эта функция измерима. В силу полунепрерывности L_1-нормы получаем
$$\int\limits_{\Omega} d^i u(y)\,dy \le \mathscr{E}_1^i.$$
Далее, используя лемму 3, для всех $x \in X$ имеем
$$\operatorname{Var}_E X_i u_x \le \liminf_{h\to 0} \int\limits_E \big|\Delta_h^i u_x(y)\big|\,dy$$
для всякого измеримого множества $E \subset \Omega$. Отсюда, принимая во внимание неравенство (6), приходим к неравенству
$$\operatorname{Var}_E X_i u_x \le \int\limits_E d^i u(y)\,dy.$$
Таким образом, $u \in BV(\Omega, X)$.

Обратно, предположим, что $u \in BV(\Omega, X)$. По аналогии с (4) для любой точки $x \in X$
$$\int\limits_E |\Delta_h^i u_x(y)|\,dy \le \operatorname{Var}_E |X_i u_x| + C\int\limits_E |u_x(y)|\,dy \le \int\limits_E w(y)\,dy + C\|u\|_{L_1(E,X)}$$
для любого измеримого множества $E \subset \Omega_h^i$. Рассмотрим покрытие пространства X, свойства которого были сформулированы в условии теоремы. Возьмем в качестве множества $E = E_k$ в предыдущем неравенстве прообраз при отображении u k-го шара из фиксированного покрытия. Выбрав $\varepsilon > 0$ достаточно малым по сравнению с h и взяв $x \in u(E) = B(x_k, \varepsilon)$, получим
$$\int\limits_{E_k} d_h^i u(y)\,dy \le \int\limits_{E_k} w(y)\,dy + C\|u\|_{L_1(E_k,X)}.$$
Просуммировав левую и правую части последнего неравенства по всем k, учитывая конечнократность покрытия $B(x_k, \varepsilon)$ и соответственно покрытия E_k, приходим к требуемому неравенству.

Замечание. Примерами метрических пространств, удовлетворяющих условию теоремы 2, являются пространства однородного типа.

Теорема 3. *Пусть метрическое пространство X сепарабельно. Отображение u принадлежит классу $W_1^1(\Omega, X)$ в том и только том случае, если для всех $i = 1, \dots, n$ выполняется*

$$\lim_{|M|\to 0} \liminf_{h\to 0} \left\| d_h^i u \right\|_{L_1(\Omega\cap M, X)} = 0.$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1, за исключением того, что в нем следует использовать лемму 4 вместо леммы 2.

Лемма 5. *Пусть метрическое пространство X сепарабельно. Предположим, что отображение u области пространства Карно — Каратеодори Ω в метрическое пространство X принадлежит $L_p(\Omega; X)$, $1 < p < \infty$. Имеют место неравенства*

$$\limsup_{r\to 0} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^\nu} \int\limits_{B(y,r)} \frac{d(u(x), u(y))^p}{r^p}\, dxdy \le C \max_i \liminf_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} \frac{d\big(u\big(\gamma_h^i(x)\big), u(x)\big)^p}{h^p}\, dx,$$

$$\limsup_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} \frac{d\big(u\big(\gamma_h^i(x)\big), u(x)\big)^p}{h^p}\, dx \le C \limsup_{r\to 0} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^\nu} \int\limits_{B(y,r)} \frac{d(u(x), u(y))^p}{r^p}\, dxdy,$$

где $i = 1, \dots, n$, $B(y, r)$ — шар в метрике Карно — Каратеодори с центром в точке y радиуса r.

Доказательство. Докажем первое неравенство. Пусть

$$\max_i \liminf_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} \frac{d\big(u\big(\gamma_h^i(x)\big), u(x)\big)^p}{h^p}\, dx < \infty.$$

В силу теоремы 1 отображение u принадлежит классу $W_p^1(\Omega, X)$ и выполняется неравенство

$$\|u\|^p_{L_p^1(\Omega)} \le C \max_i \liminf_{h\to 0} \int\limits_{\Omega} \frac{d\big(u\big(\gamma_h^i(x)\big), u(x)\big)^p}{h^p}\, dx.$$

Повторяя буквально вторую часть доказательства теоремы 1, выводим

$$\limsup_{r\to 0} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{r^\nu} \int\limits_{B(y,r)} \frac{d(u(x), u(y))^p}{r^p}\, dxdy \le C \|u\|^p_{L_p^1(\Omega)}.$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

Докажем второе неравенство. Из неравенства треугольника имеем

$$d\big(u\big(\gamma_h^i(x)\big), u(x)\big)^p \le c(p)\big(d(u(x), u(y))^p + d\big(u\big(\gamma_h^i(x)\big), u(y)\big)^p\big).$$

Пусть $h = h_j = 2^{-j}$, $r_j = h_j$. Проинтегрируем последнее неравенство по y, отстоящим от x на расстоянии, не большем, чем r_j. Получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{c(p)} |B(x, r_j)| d\big(u\big(\gamma_{h_j}^i(x)\big), u(x)\big)^p &\le \int\limits_{B(x,r_j)} d(u(x), u(y))^p\, dy \\ &+ \int\limits_{B(x,r_j)} d\big(u\big(\gamma_{h_j}^i(x)\big), u(y)\big)^p\, dy \le \int\limits_{B(x,r_{j-1})} d(u(x), u(y))^p\, dy \\ &+ \int\limits_{B(\gamma_{h_j}^i(x), r_{j-1})} d\big(u\big(\gamma_{h_j}^i(x)\big), u(y)\big)^p\, dy. \qquad (8)\end{aligned}$$

Поделим левую и правую части неравенства (8) на h_j^p и проинтегрируем их на области $\Omega_{h_{j-1}}$ по переменной x. Получим

$$\int\limits_{\Omega_{h_{j-1}}} \frac{d\big(u\big(\gamma^i_{h_j}(x)\big), u(x)\big)^p}{h_j^p}\,dx \le Cr_{j-1}^{-\nu} \int\limits_{\Omega_{r_{j-1}}} \int\limits_{B(x,r_{j-1})} \frac{d(u(x),u(y))^p}{r_{j-1}^p}\,dxdy.$$

Переходя к пределу при $j \to \infty$, выводим требуемую оценку.

2. Вариационная задача

В настоящем разделе мы формулируем и доказываем корректность одной вариационной задачи для отображений со значениями в метрическом пространстве. Для случая, когда область значений рассматриваемых отображений лежит в $\mathbb{R}$, формулируемая вариационная задача совпадает с классической задачей, эквивалентной задаче Дирихле для уравнения Лапласа (см., например, [30]). В противном случае рассматриваемая постановка не совпадает с постановкой вариационной задачи из [5], однако во многом аналогична ей. При доказательстве корректности формулируемой вариационной задачи мы следуем подходу из [5].

Лемма 6 (о нижней полунепрерывности функционала энергии). *Пусть $1 < p < \infty$, Ω — ограниченная область пространства Карно — Каратеодори, метрическое пространство X сепарабельно. Предположим, что отображения последовательности $\{u_k\}$ принадлежат классу $W_p^1(\Omega, X)$, причем $\|u_k\|_{W_p^1(\Omega,X)} < C$, где C не зависит от k. Пусть $u_k \to u$ при $k \to \infty$ в смысле $L_p(\Omega, X)$. Тогда отображение u принадлежит классу $W_p^1(\Omega, X)$ и имеет место неравенство*

$$\|u\|_{L_p^1(\Omega,X)} \le \liminf \|u_k\|_{L_p^1(\Omega,X)}.$$

Доказательство. В силу неравенства (5) и следствия теоремы 1 имеем

$$\big\|d_h^i u_k\big\|_{L_p(\Omega)} \le C(h) \lim_{s\to 0} \big\|d_s^i u_k\big\|_{L_p(\Omega)} \quad \text{для } i = 1, \dots, n,$$

где $C(h) \to 1$ при $h \to 0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$\big\|d_h^i u\big\|_{L_p(\Omega)} \le C(h) \liminf_{k\to\infty} \lim_{s\to 0} \big\|d_s^i u_k\big\|_{L_p(\Omega)}.$$

Из последнего неравенства вытекают все требуемые утверждения.

Будем говорить, что отображения u и v класса $W_p^1(\Omega, X)$ *совпадают на границе области* Ω, если функция $d(u, v)$ принадлежит классу $W_0^{1,p}(\Omega)$. Будем обозначать класс отображений $u \in W_p^1(\Omega, X)$, совпадающих с некоторым фиксированным отображением $\varphi \in W_p^1(\Omega, X)$ на границе области Ω, через $W_\varphi^{1,p}(\Omega, X)$.

Рассмотрим следующую вариационную задачу: *отыскать отображение u класса $W_\varphi^{1,2}(\Omega, X)$, минимизирующее функционал энергии $\mathscr{E}_2(u, \Omega)$.*

Будем говорить, что метрическое пространство X *имеет неположительную кривизну по Александрову* (см. [31, 32]), если для любых двух точек пространства X существует кратчайшая, соединяющая эти точки, причем для любых трех точек $P, Q, R \in X$ выполняется неравенство

$$d^2(P, Q_\lambda) \le (1-\lambda)d^2(P, Q) + \lambda d^2(P, R) - \lambda(1-\lambda)d^2(Q, R),$$

где $0 < \lambda < 1$, Q_λ — точка на кратчайшей, соединяющей точки Q и R, такая, что $d(Q_\lambda, Q) = \lambda d(Q,R)$, $d(Q_\lambda, R) = (1-\lambda)d(Q,R)$ (см. [5]).

Нетрудно доказать, что кратчайшая единственна. Рассмотрим точки u_1, v_1, u_2, $v_2 \in X$. Пусть $u_{1,t}$, $u_{2,t}$ — точки, делящие в отношении t $(0 < t < 1)$ кратчайшие, соединяющие соответственно точки u_1, v_1 и точки u_2, v_2. Тогда имеет место неравенство

$$d^2(u_{1,t}, u_{2,t}) \le (1-t)d^2(u_1,u_2) + td^2(v_1,v_2) - t(1-t)(d(u_2,v_2) - d(u_1,v_1))^2 \quad (9)$$

(см. [5]).

Выписанное неравенство вместе с леммой о полунепрерывности функционала энергии позволяют доказать существование и единственность сформулированной вариационной задачи для отображений со значениями в метрическом пространстве неположительной кривизны по Александрову. Действительно, рассмотрим произвольную последовательность отображений $u_k \in W^{1,2}_\varphi(\Omega, X)$, минимизирующую функционал энергии. Фиксируем два произвольных индекса k_1, k_2. Обозначим через w_{k_1,k_2} отображение, переводящее точку $x \in \Omega$ в середину геодезической, соединяющей точки $u_{k_1}(x), u_{k_2}(x) \in X$, через f_{k_1,k_2} — функцию, равную $d(u_{k_1}(x), u_{k_2}(x))$. В силу неравенства (9), взяв $t = \frac{1}{2}$, имеем

$$2d^2\big(w_{k_1,k_2}\big(\gamma^i_h(x)\big), w_{k_1,k_2}(x)\big) \le d^2\big(u_{k_1}\big(\gamma^i_h(x)\big), u_{k_1}(x)\big) + d^2\big(u_{k_2}\big(\gamma^i_h(x)\big), u_{k_2}(x)\big) - \frac{1}{2}\big(f_{k_1,k_2}\big(\gamma^i_h(x)\big) - f_{k_1,k_2}(x)\big)^2.$$

Поделив левую и правую части последнего неравенства на h^2, проинтегрировав результат по области Ω^i_h и устремив h к 0, получаем, что $w_{k_1,k_2} \in W^{1,2}_\varphi(\Omega, X)$ и

$$\int\limits_\Omega (X_i f_{k_1,k_2}(x))^2\,dx \le 2\Big(\big(\mathscr{E}^i_2(u_{k_1})\big)^2 + \big(\mathscr{E}^i_2(u_{k_2})\big)^2 - 2\big(\mathscr{E}^i_2(w_{k_1,k_2})\big)^2\Big).$$

Отсюда, учитывая, что $f_{k_1,k_2} \in W^{1,2}_0(\Omega)$, имеем

$$\|f_{k_1,k_2}\|^2_{W^1_2(\Omega)} \le 2C(\mathscr{E}_2(u_{k_1},\Omega)^2 + \mathscr{E}_2(u_{k_2},\Omega)^2 - 2\mathscr{E}_2(w_{k_1,k_2},\Omega)^2). \quad (10)$$

Поэтому последовательность $\{u_k\}$ сходится в смысле $L_2(\Omega, X)$ к некоторому отображению u. В силу леммы 6 оно принадлежит классу $W^1_2(\Omega, X)$ и на нем достигается минимум функционала энергии. Кроме того, из (10) следует, что $u \in W^{1,2}_\varphi(\Omega, X)$. Таким образом, существование отображения, минимизирующего функционал энергии в классе $W^{1,2}_\varphi(\Omega, X)$, показано. Докажем его единственность. Пусть v — некоторое отличное от u отображение класса $W^{1,2}_\varphi(\Omega, X)$, минимизирующее функционал энергии $\mathscr{E}_2$. Обозначим через u_t отображение, переводящее произвольную точку $x \in \Omega$ в точку, делящую геодезическую, соединяющую точки $u(x)$ и $v(x)$, в отношении t, $0 < t < 1$. Из неравенства (9) получаем

$$d^2(u_t(x), u_t(y)) \le (1-t)d^2(u(x),u(y)) + td^2(v(x),v(y)) - t(1-t)(d(u(y),v(y)) - d(u(x),v(x)))^2.$$

Отсюда следует, что $u_t \in W^{1,2}_\varphi(\Omega, X)$ и

$$\mathscr{E}_2(u_t,\Omega)^2 \le (1-t)\mathscr{E}_2(u,\Omega)^2 + t\mathscr{E}_2(v,\Omega)^2 - t(1-t)\int\limits_\Omega |\nabla_{\mathscr{L}} d(u,v)|^2 < \mathscr{E}_2^{\min}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство неположительной кривизны по Александрову, Ω — ограниченная область пространства Карно — Каратеодори. Тогда для любого отображения $\varphi \in W_2^1(\Omega, X)$ существует единственное «гармоническое» отображение, совпадающее с φ на границе Ω и минимизирующее функционал энергии $\mathscr{E}_2$.*

Авторы выражают благодарность рецензенту за ряд полезных замечаний и предложений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eells J., Fuglede B.* Harmonic maps between Riemannian polyhedra. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. (Cambridge Tract.; N 142).
2. *Fuglede B.* Finite energy maps from Riemannian polyhedra to metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2003. V. 28, N 2. P. 433–458.
3. *Gregory G.* Sobolev spaces and harmonic maps between singular spaces // Calc. Var. Partial Differ. Equat. 1998. V. 7, N 1. P. 1—18.
4. *Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingan N., Tyson T.* Sobolev classes of banach space-valued functions and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. 2001. V. 85, N 1. P. 87–139.
5. *Korevaar N. J., Schoen R. M.* Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets // Comm. Anal. Geom. 1993. V. 1, N 4. P. 561–659.
6. *Kuwae K., Shioya T.* Sobolev and Dirichlet spaces over maps between metric spaces // J. Reine Angew. Math. 2003. V. 555, N 1. P. 39–75.
7. *Ohta S.-I.* Cheeger type Sobolev spaces for metric space targets // Potential Anal. 2004. V. 20, N 2. P. 149–175.
8. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. I // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
9. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. II // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 843–857.
10. *Решетняк Ю. Г.* К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 146–168.
11. *Serbinowski T.* Harmonic maps into metric spaces with curvature bounded above: Thes. Univ. Utah, 1995.
12. *Jost J.* Generalized harmonic maps between metric spaces // Geometric Analysis and Calculus of Variations. Cambridge, Mass.: Internat. Press, 1996. P. 143–174.
13. *Jost J.* Generalized Dirichlet forms and harmonic maps // Calc. Var. Partial Differ. Equat. 1997. V. 5, N 1. P. 1-19.
14. *Водопьянов С. К.* Геометрия пространств Карно — Каратеодори, квазиконформный анализ и геометрическая теория меры // Владикавказ. мат. журн. 2003. Т. 5, № 1. С. 1–14.
15. *Fuglede B.* Hölder continuity of harmonic maps from Riemannian polyhedra to spaces of upper bounded curvature // Calc. Var. Partial Differ. Equat. 2003. V. 16, N 4. P. 375–403.
16. *Korevaar N. J., Schoen R. M.* Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces // Comm. Anal. Geom. 1997. V. 5, N 2. P. 204–310.
17. *Ohta S.-I.* Totally geodesic maps into metric spaces // Math. Z. 2003. Bd 244. S. 47–65.
18. *Serbinowski T.* Boundary regularity of harmonic maps to nonpositively metric spaces // Comm. Anal. Geom. 1994. V. 2, N 1. P. 1–15.
19. *Ambrosio L.* Metric space valued functions of bounded variation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sc. (4). 1990. V. 17, N 2. P. 439–478.
20. *Дезин А. А.* К теоремам вложения и задаче о продолжении функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 5. С. 741–743.
21. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
22. *Водопьянов С. К., Романовский Н. Н.* Отображения классов Соболева на пространствах Карно — Каратеодори // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 2. С. 154–158.
23. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. I // Math. Z. 1928. Bd 27. S. 565–606.
24. *Брудный Ю. А.* Критерии существования производных в L_p // Мат. сб. 1967. Т. 73, № 1. С. 42–65.

25. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.

26. *Водопьянов С. К., Исангулова Д. В.* Дифференцируемость отображений пространств Карно — Каратеодори в топологии Соболева и BV-топологии // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 46–67.

27. *Garofalo N., Nhieu D.-M.* Isoperemetric and Sobolev inequalities for Carnot — Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 49, N 10. P. 1081–1144.

28. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.

29. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

30. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

31. *Александров А. Д.* Теорема о треугольнике в метрическом пространстве и некоторые ее приложения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1951. Т. 38. С. 5–23.

32. *Alexandrov A. D.* Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie // Schr. Forschungsinst. Math. Berlin, 1957. S. 33–84.

Статья поступила 22 марта 2007 г., окончательный вариант — 22 ноября 2007 г.

Водопьянов Сергей Константинович, Романовский Николай Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru, nnrom@math.nsc.ru