Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 519.633

К СИММЕТРИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. К. Годунов, И. М. Пешков

Аннотация. Описывается способ записи нелинейной системы газовой динамики в квазилинейной форме с симметричными матрицами коэффициентов и, кроме того, с положительно определенной матрицей при производной по времени.

Ключевые слова: газовая динамика, термодинамическая согласованность, симметрическая гиперболическая система.

Светлой памяти
Сергея Львовича Соболева
посвящается

Введение

В работах [1–3] первого из авторов предложены специфические модели уравнений математической физики, с помощью которых вводились диссипативные слагаемые для моделирования тонкой структуры разрывных решений. Обзору этих работ и обсуждению их возможных применений для выработки понятия обобщенного решения был посвящен доклад на Всесоюзном математическом съезде в июне 1961 г. (Ленинград), опубликованный в 1962 г. [4]. В нем была предложена процедура симметризации уравнений газовой динамики, когда нелинейную систему уравнений газовой динамики можно записать в квазилинейной форме с симметричными матрицами коэффициентов и, кроме того, положительно определенной матрицей при производной по времени. Другими словами, указаны переменные, в которых система будет симметрической t-гиперболической (по Фридрихсу). Однако в [4] не вычислены сами матрицы коэффициентов. В настоящей статье мы приводим окончательные формулы, по которым могут быть вычислены эти матрицы. Мы надеемся, что эти формулы будут полезны при различных исследованиях системы уравнений газовой динамики, например, при разработке численных методов.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–9019.2006.1) и заказного междисциплинарного проекта № 5 Президиума СО РАН.

§ 1. Формулировка основного результата

Будем рассматривать полную систему уравнений газовой динамики (без массовых сил и притоков тепла):

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}=0,\\ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i u_j+\delta_{ij}\rho^2 E_\rho)}{\partial x_j}=0,\quad i,j=1,2,3,\\ \frac{\partial\rho(E+u_k u_k/2)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u_j(E+\rho E_\rho+u_k u_k/2)\right)}{\partial x_j}=0,\end{gathered}\tag{1}$$

вместе с дополнительным законом сохранения, выполненным на гладких решениях этой системы, законом сохранения энтропии:

$$\frac{\partial\rho S}{\partial t}+\frac{\partial(\rho S u_j)}{\partial x_j}=0.\tag{2}$$

Здесь u_i, $i=1,2,3$, — компоненты скорости частицы, E — внутренняя энергия единицы массы газа, S — энтропия, $\rho=1/V$ — плотность, V — удельный объем, δ_{ij} — символ Кронекера. По двойному индексу предполагается суммирование, если не оговорено противное.

Для рассматриваемого газа мы также включим в рассмотрение уравнение состояния, представляющее соотношение для внутренней энергии: $E=E(V,S)$ (эта зависимость предполагается известной). Величина $\mathscr{E}=E+u_iu_i/2$ является полной (внутренней и кинетической) энергией единицы массы газа. Ниже везде предполагается выпуклость функции $E(V,S)$. Заметим, что следствием этого будет выпуклость функции $\mathscr{E}$ по переменным u_i, V, S, $i=1,2,3$ (для краткости под выпуклостью всюду в этой работе мы подразумеваем строгую выпуклость).

Используя схему, описанную в [1], можно подобрать такие переменные $\mathbf{q}=(q_1,q_2,q_3,q_4,q)$, что система (1) в этих переменных перепишется в квазилинейном виде

$$\mathbf{A}\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}+\mathbf{B}_k\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial x_k}=0,\tag{3}$$

где матрицы $\mathbf{A}=\mathbf{A}(q)$ и $\mathbf{B}_k=\mathbf{B}_k(\mathbf{q})$ симметричны, а матрица $\mathbf{A}$ к тому же положительно определена:

$$\mathbf{A}^*=\mathbf{A}>0,\quad \mathbf{B}_k^*=\mathbf{B}_k.$$

В следующем параграфе будет показано, что матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_k$ можно вычислять по формулам

$$\mathbf{A}=\rho T\mathbf{Q}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Q}^*,\quad \mathbf{B}_k=u_k\mathbf{A}+\rho T(\mathbf{A}_k+u_k\mathbf{C}_k),\tag{4}$$

где

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1&0&0&\rho u_1&0\\0&1&0&\rho u_2&0\\0&0&1&\rho u_3&0\\0&0&0&\rho&0\\u_1&u_2&u_3&\rho H&T\end{pmatrix},\quad \mathbf{J}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&E_{VV}&E_{VS}\\0&0&0&E_{VS}&E_{SS}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_k=\begin{pmatrix}0&0&0&0&u_1\\0&0&0&0&u_2\\0&0&0&0&u_3\\0&0&0&0&1\\u_1&u_2&u_3&1&2Hu_k\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 2u_1 & u_2 & u_3 & 1 & H \\ u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 2u_2 & u_3 & 1 & H \\ 0 & u_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & 2u_3 & 1 & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$T = E_S$ — температура, $H = E + \rho E_\rho + u_i u_i/2$ — энтальпия. В определении потенциала H учтена не только внутренняя энергия единицы массы газа, но и кинетическая энергия.

§ 2. Вывод формул

В этом параграфе мы подробно опишем, как получены формулы (4). Начнем с того, что кратко опишем схему симметризации, предложенную в [2].

Система уравнений (1), (2) является переопределенной, поэтому естественно предположить, что одно из этих уравнений является следствием других. Пусть это будет уравнение (2). Рассмотрим линейную комбинацию остальных уравнений с коэффициентами q_i, q, $i = 1{,}2{,}3{,}4$ (пока неопределенными), и подберем их так, что

$$q_i \left\{ \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j + \delta_{ij}\rho^2 E_\rho)}{\partial x_j} \right\} + q_4 \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} \right\}$$
$$+ q \left\{ \frac{\partial \rho(E + u_k u_k/2)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u_j(E + \rho E_\rho + u_k u_k/2)\right)}{\partial x_j} \right\} \equiv \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \frac{\partial(\rho S u_j)}{\partial x_j}.$$

Можно показать, что это тождество будет выполнено, если в качестве q_i, q взять следующие выражения:

$$q_i = -\frac{u_i}{T},\ i = 1, 2, 3, \quad q_4 = -\frac{E - VE_V - SE_S - u_i u_i/2}{T} \equiv -\frac{\Phi}{T}, \quad q = \frac{1}{T},$$

где через Φ обозначен химический потенциал $E - VE_V - SE_S - u_i u_i/2$, в аргументы которого введены компоненты q_i.

Далее, если мы введем порождающие потенциалы $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathbf{q})$ и $\mathscr{B}_k = \mathscr{B}_k(\mathbf{q})$ по формулам

$$\mathscr{A} = -qp, \quad \mathscr{B}_k = q_k p, \tag{5}$$

где $p = -E_V$ — давление газа, то будут верны равенства

$$d\mathscr{A} = \rho u_i\, dq_i + \rho\, dq_4 + \rho(E + u_i u_i/2)\, dq,$$

$$d\mathscr{B}_k = (\rho u_i u_k + \delta_{ik}\rho^2 E_\rho + u_j u_j/2)\, dq_i + \rho u_k\, dq_4 + \rho u_k(E + \rho E_\rho + u_j u_j/2)\, dq.$$

Поэтому система (1) может быть записана в виде системы

$$\frac{\partial \mathscr{A}_{q_i}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathscr{B}_k)_{q_i}}{\partial x_k} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$
$$\frac{\partial \mathscr{A}_q}{\partial t} + \frac{\partial(\mathscr{B}_k)_q}{\partial x_k} = 0,$$

которая, в свою очередь, может быть переписана в квазилинейном виде:

$$\mathscr{A}_{\mathbf{qq}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + (\mathscr{B}_k)_{\mathbf{qq}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_k} = 0 \tag{6}$$

или

$$\mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{B}_k\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x_k} = 0. \tag{7}$$

Таким образом, матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_k$ являются матрицами вторых производных от потенциалов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}_k$ по новым переменным q_i, q, $i = 1, 2, 3, 4$. К вычислению этих матриц мы сейчас и приступим, но предварительно сделаем последнее замечание к процедуре симметризации.

Симметричность матриц системы (7) очевидна, однако, для того чтобы эта система была симметрической t-гиперболической, необходима еще положительная определенность матрицы $\mathbf{A}$, которая будет следовать из выводимых формул, если предполагать, что $E(V, S)$ — выпуклая функция.

Далее мы приводим вывод формул (4). В газовой динамике давление p связано уравнением состояния с пятью независимыми переменными: тремя скоростями u_i, $i = 1, 2, 3$, и еще двумя параметрами среды. В качестве двух последних параметров мы можем выбрать, например, Φ и T. Поэтому считаем, что $p = p(u_1, u_2, u_3, \Phi, T)$. Тогда формула (5) для потенциала $\mathscr{A}$ может быть переписана так:

$$\mathscr{A}(q_1, q_2, q_3, q_4, q) = -qp\left(-\frac{q_1}{q}, -\frac{q_2}{q}, -\frac{q_3}{q}, -\frac{q_4}{q}, \frac{1}{q}\right).$$

Теперь, дважды дифференцируя последнее выражение по переменным q_i, q, $i = 1, 2, 3$, получим следующие формулы (по повторяющемуся индексу k суммирования нет):

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}_{q_iq_j} &= -q^{-1}p_{v_iv_j},\\
\mathscr{A}_{q_iq} &= -q^{-1}\left(p_{v_iv}v + p_{v_iv_j}v_j\right),\\
\mathscr{A}_{qq} &= -q^{-1}\left(p_{vv}v^2 + 2p_{v_jv}v_jv + p_{v_jv_j}v_j^2 + 2\sum_{i=1,j>i}^{i=3,j=4} p_{v_iv_j}v_iv_j\right),\\
(\mathscr{B}_k)_{q_kq_k} &= -q^{-1}v_kp_{v_kv_k} - 2q^{-1}p_{v_k},\\
(\mathscr{B}_k)_{q_kq_m} &= -q^{-1}v_kp_{v_kv_m} - q^{-1}p_{v_m},\\
(\mathscr{B}_k)_{q_mq_n} &= -q^{-1}v_kp_{v_mv_n},\\
(\mathscr{B}_k)_{q_kq} &= -q^{-1}v_k\left(p_{v_kv}v + p_{v_kv_j}v_j\right) - q^{-1}(p_vv + p_{v_k}v_k + p_{v_j}v_j),\\
(\mathscr{B}_k)_{q_mq} &= -q^{-1}v_k(p_{v_mv}v + p_{v_mv_j}v_j) - q^{-1}v_kp_{v_m}, \quad m \neq k,\\
(\mathscr{B}_k)_{qq} &= -q^{-1}v_k\left(p_{vv}v^2 + 2p_{v_jv}v_jv + p_{v_jv_j}v_j^2 + 2\sum_{i=1,j>i}^{i=3,j=4} p_{v_iv_j}v_iv_j\right)\\
&\qquad - 2q^{-1}v_k(p_vv + p_{v_j}v_j).
\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$, $v_3 = u_3$, $v_4 = \Phi$, $v = T$. Эти равенства можно переписать в матричном виде. Для этого введем матрицу

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & \Phi & T \end{pmatrix}$$

и матрицу $\mathbf{P}$, состоящую из вторых производных давления p по переменным u_i, Φ, T, $i = 1, 2, 3$. Непосредственным перемножением матриц можно проверить, что для $\mathbf{A}$ будет верно равенство

$$\mathbf{A} = -T\mathbf{RPR}^*. \tag{8}$$

Следовательно, надо показать, как можно вычислить матрицу $\mathbf{P}$, не зная явной формулы для давления p как функции переменных u_i, Φ, T (отметим, что при решении практических задач мы можем рассчитывать только на явную формулу уравнения состояния).

Поскольку $\Phi - E - pV + ST + u_i u_i/2 = 0$, можно определить неявно заданную функцию $p = p(u_1, u_2, u_3, \Phi, T)$. Значит, задача об отыскании матрицы $\mathbf{P}$ является задачей об отыскании вторых производных неявно заданной функции. Решение этой задачи из математического анализа и формализацию ее на языке матриц мы вынесли в приложение. Для $\mathbf{P}$ удалось получить следующее матричное представление (см. приложение):

$$\mathbf{P} = -\rho\mathbf{WFW}^*, \tag{9}$$

где $\mathbf{F}$ — матрица вторых производных Φ по переменным u_i, p, T, а матрица $\mathbf{W}$ имеет вид

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \rho u_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \rho u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho S & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя выражение для $\mathbf{P}$ в (8), приходим к формуле

$$\mathbf{A} = \rho T\mathbf{RWFW}^*\mathbf{R}^*. \tag{10}$$

Таким образом, остается показать, как вычислять вторые производные функции Φ по переменным u_i, T, p. Для этого рассмотрим выпуклую функцию $\mathscr{E} = E(V, S) + u_i u_i/2$ аргументов u_i, V, S и заметим, что ее преобразование Лежандра равняется $-\Phi$:

$$V\mathscr{E}_V + S\mathscr{E}_S + u_i\mathscr{E}_{u_i} - \mathscr{E} = VE_V + SE_S + u_i u_i/2 - E = -\Phi,$$

поэтому

$$u_i = -\Phi_{u_i}, \quad V = \Phi_p, \quad S = -\Phi_T. \tag{11}$$

Следовательно, матрица $\mathbf{F}$ не что иное, как матрица Якоби нелинейной системы (11) — преобразования переменных u_i, p, T в переменные u_i, V, S соответственно. В силу выпуклости функции $-\Phi$ (преобразование Лежандра сохраняет выпуклость) матрица $\mathbf{F}$ невырожденна. Таким образом,

$$\mathbf{F} = -\begin{pmatrix} \mathscr{E}_{u_1u_1} & \mathscr{E}_{u_1u_2} & \mathscr{E}_{u_1u_3} & \mathscr{E}_{u_1V} & \mathscr{E}_{u_1S} \\ \mathscr{E}_{u_2u_1} & \mathscr{E}_{u_2u_2} & \mathscr{E}_{u_2u_3} & \mathscr{E}_{u_2V} & \mathscr{E}_{u_2S} \\ \mathscr{E}_{u_3u_1} & \mathscr{E}_{u_3u_2} & \mathscr{E}_{u_3u_3} & \mathscr{E}_{u_3V} & \mathscr{E}_{u_3S} \\ \mathscr{E}_{Vu_1} & \mathscr{E}_{Vu_2} & \mathscr{E}_{Vu_3} & \mathscr{E}_{VV} & \mathscr{E}_{VS} \\ \mathscr{E}_{Su_1} & \mathscr{E}_{Su_2} & \mathscr{E}_{Su_3} & \mathscr{E}_{SV} & \mathscr{E}_{SS} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{VV} & E_{VS} \\ 0 & 0 & 0 & E_{SV} & E_{SS} \end{pmatrix}^{-1} = -\mathbf{J}^{-1}, \tag{12}$$

где через $\mathbf{J}$ мы обозначили матрицу вторых производных по переменным u_i, V, S от функции $\mathscr{E}$.

Обозначив $\mathbf{Q} = \mathbf{RW}$, приходим к (4), но с обратным знаком:

$$\mathbf{A} = -\rho T\mathbf{Q}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Q}^*.$$

Нетрудно видеть, что непосредственно из формул вторых производных функции $\mathscr{B}_k$ получим следующие матричные представления для матриц $\mathbf{B}_k$:

$$\mathbf{B}_k = -\rho T\mathbf{Q}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{Q}^* u_k - \rho T(\mathbf{A}_k + u_k\mathbf{C}_k).$$

Здесь матрицы $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{C}_k$ такие, как были приведены при формулировке результата этой работы (см. § 1).

Из предположения о выпуклости функции $E(V,S)$ очевидно, что функция $\mathscr{E} = E(V,S) + u_iu_i/2$ также будет выпукла по переменным u_i, V, S. Таким образом, из формулы (12) для матрицы $\mathbf{J}$ вытекает, что $\mathbf{J}$ будет отрицательно определенной. Поэтому отрицательно определенной будет вместе с ней и матрица $\mathbf{A}$ (см. (4)). Но для того чтобы система (6) была симметрической гиперболической по Фридрихсу, матрица $\mathbf{A}$ должна быть положительно определенной. Поскольку ничто нам не мешает домножить систему (3) на -1, окончательно можем написать

$$\mathbf{A} = \rho T\mathbf{Q}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Q}^*, \quad \mathbf{B}_k = \rho T(u_k\mathbf{Q}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{Q}^* + \mathbf{A}_k).$$

В заключение сделаем два замечания. В реальных физических задачах в качестве уравнения состояния не обязательно предполагается использование внутренней энергии, также могут использоваться: $H = H(p,S) = E + pV$ — энтальпия, $F = F(V,T) = E - ST$ — свободная энергия Гельмгольца (или просто свободная энергия), $G = G(p,T) = E - ST + pV$ — потенциал Гиббса (или свободная энтальпия). Для адаптации наших формул для этих случаев достаточно выразить вторые производные E_{VV}, E_{VS}, E_{SS} через вторые производные (по соответствующим переменным) только что приведенных функций, используемых в качестве уравнения состояния, и подставить в (12).

Второе замечание заключается в том, что в данной работе в качестве «лишнего» уравнения было взято уравнение закона сохранения энтропии, но ничто не мешает вместо него выбрать на эту роль закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial\rho(E + u_ku_k/2)}{\partial t} + \frac{\partial\left(\rho u_j(E + \rho E_\rho + u_ku_k/2)\right)}{\partial x_j} = 0.$$

Например, такая симметризация была сделана для нелинейной системы уравнений теории упругости [5].

§ 3. Приложение

Приведем формализацию на языке матриц задачи о вычислении вторых производных неявно заданной функции, которая используется в формуле (9). Рассуждения проведем для случая трех переменных, т. е. $\Phi = \Phi(x_1, x_2, p)$, обобщение на случай большего количества переменных очевидно.

Начнем с анализа соотношения $d\Phi = \Phi_{x_1}\,dx_1 + \Phi_{x_2}\,dx_2 + \Phi_p\,dp$, которое перепишем в векторной форме:

$$d\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Phi_{x_1} & \Phi_{x_2} & \Phi_p \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p \end{pmatrix}.$$

Еще одна эквивалентная запись того же соотношения:

$$d\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_p} & -\frac{\Phi_{x_2}}{\Phi_p} & \frac{1}{\Phi_p} \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \Phi \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Отсюда получаем равенства

$$p_\Phi = \frac{1}{\Phi_p}, \quad p_{x_1} = -\frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_p}, \quad p_{x_2} = -\frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_p},$$

из которых вытекают соотношения для дифференциалов

$$d\begin{pmatrix} p_{x_1} \\ p_{x_2} \\ p_\Phi \end{pmatrix} = -\frac{1}{\Phi_p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_p} \\ 0 & 1 & -\frac{\Phi_{x_2}}{\Phi_p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Phi_p} \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} \Phi_{x_1} \\ \Phi_{x_2} \\ \Phi_p \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя последний вектор и используя (13), это равенство перепишем так:

$$d\begin{pmatrix} p_{x_1} \\ p_{x_2} \\ p_\Phi \end{pmatrix} = -\frac{1}{\Phi_p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_p} \\ 0 & 1 & -\frac{\Phi_{x_2}}{\Phi_p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Phi_p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_{x_1x_1} & \Phi_{x_1x_2} & \Phi_{x_1p} \\ \Phi_{x_2x_1} & \Phi_{x_2x_2} & \Phi_{x_2p} \\ \Phi_{px_1} & \Phi_{px_2} & \Phi_{pp} \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ p \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\Phi_p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_p} \\ 0 & 1 & -\frac{\Phi_{x_2}}{\Phi_p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Phi_p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_{x_1x_1} & \Phi_{x_1x_2} & \Phi_{x_1p} \\ \Phi_{x_2x_1} & \Phi_{x_2x_2} & \Phi_{x_2p} \\ \Phi_{px_1} & \Phi_{px_2} & \Phi_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_p} & -\frac{\Phi_{x_2}}{\Phi_p} & \frac{1}{\Phi_p} \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \Phi \end{pmatrix}.$$

В результате мы пришли к равенству, связывающему матрицы вторых производных функций $p(x_1, x_1, \Phi)$ и $\Phi(x_1, x_2, p)$ по соответствующим переменным:

$$\begin{pmatrix} p_{x_1x_1} & p_{x_1x_2} & p_{x_1\Phi} \\ p_{x_2x_1} & p_{x_2x_2} & p_{x_2\Phi} \\ p_{\Phi x_1} & p_{\Phi x_2} & p_{\Phi\Phi} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{\Phi_p}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_p} \\ 0 & 1 & -\frac{\Phi_{x_2}}{\Phi_p} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Phi_p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_{x_1x_1} & \Phi_{x_1x_2} & \Phi_{x_1p} \\ \Phi_{x_2x_1} & \Phi_{x_2x_2} & \Phi_{x_2p} \\ \Phi_{px_1} & \Phi_{px_2} & \Phi_{pp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_p} & -\frac{\Phi_{x_2}}{\Phi_p} & \frac{1}{\Phi_p} \end{pmatrix},$$

которое доказывает справедливость формулы (9). Отметим еще тот факт, что из этого матричного равенства при условии выпуклости функции $\Phi = \Phi(x_1, x_2, p)$ и дополнительного условия $\Phi_p < 0$ следует выпуклость функции $p = p(x_1, x_2, \Phi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С. К.* О понятии обобщенного решения // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 6. С. 1279–1282.

2. *Годунов С. К.* Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 3. С. 521–523.

3. *Годунов С. К.* О неединственности «размазывания» разрывов в решениях квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 3. С. 272–273.

4. *Годунов С. К.* Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 3. С. 147–159.

5. *Годунов С. К., Пешков И. М.* Симметрические гиперболические уравнения нелинейной теории упругости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 6. С. 1034–1056.

Статья поступила 22 января 2008 г.

Годунов Сергей Константинович, Пешков Илья Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
godunov@math.nsc.ru, peshkov@math.nsc.ru