*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5*

*УДК 517.13+510.635*

# О ТЕОРИИ ГРОСС–ЕДИНИЦЫ

**А. Е. Гутман, С. С. Кутателадзе**

**Аннотация.** Дана тривиальная формализация неформальных рассуждений серии работ Я. Д. Сергеева о позиционной системе счисления с бесконечно большим основанием (гросс-единицей), произвольно противопоставленной ее автором классическому нестандартному анализу.

**Ключевые слова:** нестандартный анализ, инфинитезимальный анализ, позиционная система счисления.

*К 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева*

В последние годы Я. Д. Сергеев опубликовал ряд работ [1–5], в которых выдвигается некоторая позиционная система счисления, связанная с понятием гросс-единицы. Свою систему Я. Д. Сергеев противопоставляет нестандартному анализу, считая ее основанной на иных математических, философских и прочих принципах. Цель настоящей заметки — правильно позиционировать работы Я. Д. Сергеева по разработке числовых систем. Оказывается, что в качестве модели системы Я. Д. Сергеева можно взять начальный отрезок $\{1, 2, \ldots, \nu!\}$ нестандартного натурального ряда, продолженный до факториала $\nu!$ какого-нибудь (все равно какого) актуально бесконечного натурального числа $\nu$. Такой факториал и служит моделью гросс-единицы Я. Д. Сергеева, показывая место предлагаемой им числовой системы.

В качестве основного источника мы выбрали статью [4], наиболее позднюю из доступных нам работ Я. Д. Сергеева и содержащую детальное описание его основных идей.

> [4]: ... the approach used in this paper is different also with respect to the nonstandard analysis ... and built using Cantor's ideas.

В данной заметке мы намерены показать, что вопреки ожиданиям автора [4] предложенные им невнятные определения гросс-единицы и сопутствующих понятий допускают предельно адекватную и тривиальную формализацию в рамках классического нестандартного анализа.

> [4]: The infinite radix of the new system is introduced as the number of elements of the set $\mathbb{N}$ of natural numbers expressed by the numeral ① called *grossone*.

Воспользуемся формализмом теории внутренних множеств IST Нельсона [6] или любой из классических теорий внешних множеств, например, теории EXT Хрбачека [7] или теории NST Каваи [8] (см. также монографии [9,10]). Как обычно, символом ${}^{\circ}X$ обозначается стандартное ядро множества $X$, т. е. совокупность всех стандартных элементов $X$. В частности, ${}^{\circ}\mathbb{N}$ — совокупность всех конечных (стандартных) натуральных чисел. Зафиксируем произвольное бесконечно большое натуральное число $\nu$ и обозначим его факториал символом ①:

$$① = \nu!\,, \quad \text{где } \nu \in \mathbb{N},\ \nu \approx \infty.$$

Покажем, что ① обладает всеми свойствами «гросс-единицы» (как постулируемыми, так и неявно предполагаемыми в [4]).

Один из возможных подходов к адекватной (в смысле [4]) формализации понятия «числа элементов» произвольного множества $A$ стандартных натуральных чисел (т. е. внешнего подмножества $A \subset {}^\circ\mathbb{N}$) состоит в сопоставлении всякому такому множеству $A$ натурального числа

$$\|A\| = |{}^*A \cap \{1, 2, \ldots, ①\}|,$$

где ${}^*A$ — стандартизация $A$, $|X|$ — число элементов (в обычном смысле) внутреннего множества $X$. В этом случае, разумеется, $\|{}^\circ\mathbb{N}\| = ①$, что согласуется с цитированным выше «определением» гросс-единицы. Отметим также, что благодаря принципу внешней индукции функция $A \mapsto \|A\|$ обладает (предполагаемым в [4]) свойством аддитивности: $\left\| \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \right\| = \sum\limits_{k=1}^{n} \|A_k\|$ для любого семейства попарно дизъюнктных множеств $A_1, \ldots, A_n \subset {}^\circ\mathbb{N}$, $n \in {}^\circ\mathbb{N}$.

Другой (более тривиальный и значительно более близкий к предлагаемому в [4]) подход к введению понятия числа элементов заключается в «замене» множества ${}^\circ\mathbb{N}$ начальным отрезком натурального ряда

$$\mathscr{N} = \{1, 2, \ldots, ①\}$$

и рассмотрении обычного числа элементов $|A| \in \mathbb{N}$ для всякого внутреннего множества $A \subset \mathscr{N}$. В этом случае мы вновь имеем $|\mathscr{N}| = ①$, а аддитивность считающей меры $A \mapsto |A|$ уже не нуждается в каком-либо обосновании.

> [4]: The new numeral ① allows us to write down the set, $\mathbb{N}$, of natural numbers in the form
>
> $$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ ① - 2,\ ① - 1,\ ①\}$$
>
> because *grossone has been introduced as the number of elements of the set of natural numbers* (similarly, the number 3 is the number of elements of the set $\{1, 2, 3\}$). Thus, grossone is the biggest natural number ...

Отдавая должное этой смелой экстраполяции свойств натурального числа 3, мы тем не менее не можем принять предлагаемое соглашение — хотя бы потому, что множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел (в общепринятом осмыслении этого фундаментального понятия) не имеет наибольшего элемента (относительно классического отношения порядка). Решив все же сохранить за символом $\mathbb{N}$ его традиционный смысл (и руководствуясь «Postulate 3. *The part is less than the whole*» из [4]), мы не стали обозначать этим символом собственное подмножество $\{1, 2, \ldots, ①\} \subset \mathbb{N}$ и ввели для последнего менее радикальное обозначение $\mathscr{N}$.

> [4]: *The Infinite Unit Axiom* consists of the following three statements:
>
> *Infinity.* For any finite natural number $n$ it follows $n < ①$.
>
> *Identity.* The following relations link ① to identity elements 0 and 1
>
> $$0 \cdot ① = ① \cdot 0 = 0, \quad ① - ① = 0, \quad \frac{①}{①} = 1, \quad ①^0 = 1, \quad 1^① = 1, \quad 0^① = 0.$$
>
> *Divisibility.* For any finite natural number $n$ sets $\mathbb{N}_{k,n}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, being the $n$th parts of the set, $\mathbb{N}$, of natural numbers have the same number of elements indicated by the numeral $\frac{①}{n}$, where
>
> $$\mathbb{N}_{k,n} = \{k,\ k+n,\ k+2n,\ k+3n,\ \ldots\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad \bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{N}_{k,n} = \mathbb{N}.$$

Будучи бесконечно большим, число ① $= \nu!$ удовлетворяет *Infinity*. Утверждение *Identity* справедливо для любого натурального числа и, в частности, для ①. Являясь факториалом бесконечно большого натурального числа, ① делится на любое стандартное натуральное число. Кроме того, если $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ и

$$\begin{aligned} {}^{\circ}\mathbb{N}_{k,n} &= \{k + (m-1)n \,:\, m \in {}^{\circ}\mathbb{N}\}, \\ \mathscr{N}_{k,n} &= \mathscr{N} \cap \{k + (m-1)n \,:\, m \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

то $\|{}^{\circ}\mathbb{N}_{k,n}\| = |\mathscr{N}_{k,n}| = \frac{①}{n}$, а значит, ① удовлетворяет *Divisibility*.

> [4]: It is worthy to emphasize that, since the numbers $\frac{①}{n}$ have been introduced as numbers of elements of sets $\mathbb{N}_{k,n}$, they are integer.

Число, объявленное натуральным, безусловно, не может не оказаться натуральным. Дабы развеять все сомнения, предлагаем строгое и подробное обоснование выполнимости этого постулата: для всякого $n \in {}^{\circ}\mathbb{N}$ мы имеем $n < \nu$, поэтому

$$\text{число } \frac{①}{n} = \frac{\nu!}{n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot \ldots \cdot \nu}{n} \text{ является целым.}$$

> [4]: The introduction of grossone allows us to obtain the following interesting result: the set $\mathbb{N}$ is not a monoid under addition. In fact, the operation ① $+ 1$ gives us as the result a number grater than ①. Thus, by definition of grossone, ① $+ 1$ does not belong to $\mathbb{N}$ and, therefore, $\mathbb{N}$ is not closed under addition and is not a monoid.

Действительно, $① \in \{1, 2, \ldots, ①\} = \mathscr{N}$, но $① + 1 \notin \{1, 2, \ldots, ①\} = \mathscr{N}$. (Впрочем, учитывая, что $\mathscr{N}$ не является множеством всех натуральных чисел, это тривиальное наблюдение едва ли можно счесть «интересным».)

> [4]: ... adding the Infinite Unit Axiom to the axioms of natural numbers defines the set of extended natural numbers indicated as $\widehat{\mathbb{N}}$ and including $\mathbb{N}$ as a proper subset
>
> $$\widehat{\mathbb{N}} = \{1,\ 2,\ \ldots,\ ① - 1,\ ①,\ ① + 1,\ \ldots,\ ①^2 - 1,\ ①^2,\ ①^2 + 1,\ \ldots\}.$$

В самом деле, ${}^{\circ}\mathbb{N}$ и $\mathscr{N}$ являются собственными подмножествами множества $\mathbb{N}$ *всех* натуральных чисел. (Как известно, радикальный формализм IST избавляет от необходимости рассматривать «расширенные числа».)

Мы позволим себе оставить без внимания другие имеющиеся в [4] многочисленные описания свойств гросс-единицы и сопутствующих понятий, поскольку их анализ совершенно аналогичен тому, что уже было сказано (и столь же тривиален). Впрочем, трудно удержаться от комментария по поводу заявленного в [4] устранения парадокса гранд-отеля:

> [4]: ... it is well known that Cantor's approach leads to some 'paradoxes' ... Hilbert's Grand Hotel has an infinite number of rooms ... If a new guest arrives at the Hotel where every room is occupied, it is, nevertheless, possible to find a room for him. To do so, it is necessary to move the guest occupying room 1 to room 2, the guest occupying room 2 to room 3, etc. In such a way room 1 will be available for the newcomer ...

> ... In the paradox, the number of the rooms in the Hotel is countable. In our terminology this means that it has ① rooms... Under the Infinite Unit Axiom this procedure is not possible because the guest from room ① should be moved to room $①+1$ and the Hotel has only ① rooms. Thus, when the Hotel is full, no more new guests can be accommodated — the result corresponding perfectly to Postulate 3 and the situation taking place in normal hotels with a finite number of rooms.

Мы можем предложить следующий незамысловатый «парадокс гросс-отеля». Даже если все номера $1, 2, \ldots, ①$ гросс-отеля заняты, найти в нем номер для еще одного постояльца совсем несложно. Достаточно для каждого *конечного* натурального числа $n$ переместить гостя, занимающего номер $n$, в номер $n+1$. Поскольку для всякого конечного $n$ мы имеем $n+1 < ①$, все прежние гости получат свои номера в гросс-отеле, а нового постояльца можно будет разместить в освободившемся номере 1.

Помимо невнятного теоретизирования вокруг гросс-единицы в [4] имеется «прикладная» часть, посвященная новой числовой позиционной системе с основанием ①, призванной послужить базой для «Infinity Computer» [5], способного работать с бесконечно большими и бесконечно малыми числами. К сожалению, в этой части изложение остается крайне неформальным и даже ключевые определения подменяются намеками и поясняющими примерами.

> [4]: In order to construct a number $C$ in the new numeral positional system with base ① we subdivide $C$ into groups corresponding to powers of ①:
>
> $$C = c_{p_m}①^{p_m} + \cdots + c_{p_1}①^{p_1} + c_{p_0}①^{p_0} + c_{p_{-1}}①^{p_{-1}} + \cdots + c_{p_{-k}}①^{p_{-k}}.$$
>
> ... Finite numbers $c_i$ are called *infinite grossdigits* and can be both positive and negative; numbers $p_i$ are called *grosspowers* and can be finite, infinite, and infinitesimal (the introduction of infinitesimal numbers will be given soon). The numbers $p_i$ are such that $p_i > 0$, $p_0 = 0$, $p_{-i} < 0$ and
>
> $$p_m > p_{m-1} > \cdots > p_2 > p_1 > p_{-1} > p_{-2} > \cdots > p_{-(k-1)} > p_{-k}.$$
>
> ... Finite numbers in this new numeral system are represented by numerals having only one grosspower equal to zero...
>
> ... all grossdigits $c_i$, $-k \leqslant i \leqslant m$, can be integer or fractional... Infinite numbers in this numeral system are expressed by numerals having at least one grosspower grater than zero... Numerals having only negative grosspowers represent infinitesimal numbers.

Как нам показалось, в цитированных определениях весьма вольно используются сочетания терминов finite, infinite и number. Например, из текста неясно, будет ли нумерал infinite (и в каком смысле), если он не является finite (в каком-либо смысле). Если понимать определения [4] буквально, то гросс-степень может быть finite, infinite, and (or?) infinitesimal, в то время как finite — это $c①^0$ (гросс-цифра $c$, рациональный нумерал), infinite представляется нумералом, имеющим хотя бы одну строго положительную гросс-степень, а infinitesimal — нумералом, имеющим лишь строго отрицательные гросс-степени. Казалось бы, отсюда следует, что гросс-степень не может равняться, например, $①^0 + ①^{-1}$, но из дальнейших примеров видно, что это не так и гросс-степени все же могут быть любыми нумералами. Кроме того, совершенно не понятно, чем обусловлен выбор терминов infinite и infinitesimal именно для упомянутых в цитате классов нумералов. Например, нумерал $a = \text{①}^{\text{①}^{-1}}$ (имеющий гросс-степень $\text{①}^{-1} > 0$) по определению считается infinite, в то время как, очевидно, $1 < a < 2$. С другой стороны, нумерал $b = \text{①}^{\text{①}^{-1}} - 1$ также считается infinite и не считается infinitesimal, хотя он, как легко видеть, бесконечно близок к нулю в том смысле, что $-c < b < c$ для любого конечного $c > 0$.

Вне зависимости от терминологической дисциплины цитированное выше определение нумералов $C$ нельзя считать формальным уже потому, что участвующее в нем понятие («бесконечных» и «бесконечно малых») показателей степени опирается на исходное понятие нумерала, приводя к порочному кругу. Кроме того, из имеющихся в [4] иллюстраций ясно, что предлагаемая позиционная система допускает наличие синтаксически различных нумералов с совпадающими значениями: например, $0\text{①}^0 \equiv 0\text{①}^1$, $1\text{①}^0 \equiv 1\text{①}^{0\text{①}^0}$. (Понятие значения терма и отношение равнозначности $\equiv$ уточнены нами ниже.) При этом в [4] отсутствуют не только соответствующие (впрочем, угадываемые) оговорки, но и какие-либо попытки обосновать однозначность позиционной системы даже с неявными оговорками. Отметим также, что имеющееся в [4] описание алгоритмов вычисления суммы и произведения нумералов (т. е. нахождения соответствующего равнозначного нумерала) является крайне поверхностным, так как оно не затрагивает проблемы распознавания равнозначных нумералов (что необходимо для приведения подобных слагаемых) и их сравнения (что необходимо для упорядочения слагаемых по убыванию «гросс-степеней»). Поэтому, кстати, не удивительно, что в аннотации патента [5] докладывается о создании калькулятора, способного работать лишь с нумералами, имеющими «конечные гросс-степени».

Чтобы не показаться голословными, в оставшейся части заметки мы схематично опишем один из возможных подходов к формализации понятия нумерала и определению соответствующих алгоритмических процедур. (При этом некоторые утверждения, отражающие неявные предположения [4], будут сформулированы в виде гипотез.)

Пусть $\mathscr{Q}$ — какая-либо традиционная «конструктивная» модель упорядоченного поля рациональных чисел (например, состоящая из конечных и периодических десятичных дробей или несократимых обыкновенных дробей). Элементы $\mathscr{Q}$ условимся называть *рациональными нумералами.* Обозначим символами 0 и 1 рациональные нумералы, соответствующие нулю и единице.

Расширим язык теории множеств ZFC классически определяемыми константами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, а также термами $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x^y$ и формулами $x < y$. (Все эти и другие подобные обогащения сигнатуры определяются по Бету соответствующими расширениями аксиоматики.) Сразу отметим, что мы опираемся на традиционное предположение о непротиворечивости ZFC (а значит, и любых консервативных расширений этой теории).

Для каждого рационального нумерала $q \in \mathscr{Q}$ обозначим через $\varphi_q(x)$ формулу, определяющую в ZFC соответствующее рациональное число. В частности, для каждого $q \in \mathscr{Q}$

$$\mathrm{ZFC} \vdash ((\exists!\, x)\, \varphi_q(x) \;\&\; (\exists\, x \in \mathbb{Q})\, \varphi_q(x)).$$

Введем в язык ZFC соответствующим образом определяемые константы $q \in \mathscr{Q}$. Точнее говоря, (консервативно) расширим ZFC до теории $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}}$, обогащая сигнатуру множеством констант $\mathscr{Q}$ и расширяя аксиоматику семейством формул

$\varphi_q(q)$, $q \in \mathscr{Q}$. При этом $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (q \in \mathbb{Q})$ для всех $q \in \mathscr{Q}$, $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (q_1 \neq q_2)$ при $q_1 \neq q_2$ и, кроме того, $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (0 = 0_{\mathbb{Q}})$, $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (1 = 1_{\mathbb{Q}})$.

«Конструктивность» модели $\mathscr{Q}$ позволяет считать, что в $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}}$ разрешимы сложение, вычитание, умножение и сравнение рациональных нумералов, т.е. для любых $q, q_1, q_2 \in \mathscr{Q}$ в $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}}$ разрешимы предложения $(q_1 + q_2 = q)$, $(q_1 - q_2 = q)$, $(q_1 \cdot q_2 = q)$, $(q_1 < q_2)$. (Напомним, что предложение $\varphi$ *разрешимо* в теории $T$, если $T \vdash \varphi$ или $T \vdash \neg\varphi$.) В этом случае на $\mathscr{Q}$ имеются вычислимые операции $\oplus$, $\ominus$, $\odot$ и разрешимое отношение линейного строгого порядка $\prec$ такие, что для всех $q_1, q_2 \in \mathscr{Q}$ в $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}}$ доказуемы предложения $(q_1 + q_2 = q_1 \oplus q_2)$, $(q_1 - q_2 = q_1 \ominus q_2)$, $(q_1 \cdot q_2 = q_1 \odot q_2)$, а неравенство $q_1 \prec q_2$ равносильно $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (q_1 < q_2)$.

Пусть $\mathscr{C}$ — множество всех термов сигнатуры $\mathscr{Q} \cup \{+, -, \cdot\}$. Условимся называть элементы $\mathscr{C}$ *рациональными термами*. Ясно, что $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (c \in \mathbb{Q})$ для всех $c \in \mathscr{C}$. С помощью имеющихся в $\mathscr{Q}$ операций сложения, вычитания и умножения определим (вычислимую) функцию $\mathrm{val} : \mathscr{C} \to \mathscr{Q}$ рекурсией по сложности рациональных термов: $\mathrm{val}(q) := q$ для $q \in \mathscr{Q}$, $\mathrm{val}(c_1 + c_2) := \mathrm{val}(c_1) \oplus \mathrm{val}(c_2)$, $\mathrm{val}(c_1 - c_2) := \mathrm{val}(c_1) \ominus \mathrm{val}(c_2)$, $\mathrm{val}(c_1 \cdot c_2) := \mathrm{val}(c_1) \odot \mathrm{val}(c_2)$. Тогда, как легко видеть, $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (\mathrm{val}(c) = c)$ для всех $c \in \mathscr{C}$. Введем на $\mathscr{C}$ отношения $\equiv$ и $\prec$:

$$c_1 \equiv c_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (c_1 = c_2) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (\mathrm{val}(c_1) = \mathrm{val}(c_2)) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{val}(c_1) = \mathrm{val}(c_2);$$
$$c_1 \prec c_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (c_1 < c_2) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (\mathrm{val}(c_1) < \mathrm{val}(c_2)) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{val}(c_1) \prec \mathrm{val}(c_2).$$

Поскольку функция $\mathrm{val} : \mathscr{C} \to \mathscr{Q}$ вычислима, а отношение $\prec$ разрешимо в $\mathscr{Q}^2$, ясно, что отношения $\equiv$ и $\prec$ разрешимы в $\mathscr{C}^2$.

Пусть $x$ — символ переменной. Обозначим через $\mathscr{T}(x)$ совокупность выражений, получаемых конечным числом применений следующих правил: если $q \in \mathscr{Q}$, то $q \in \mathscr{T}(x)$; если $t_1, t_2 \in \mathscr{T}(x)$, то $(t_1 + t_2), (t_1 - t_2), (t_1 \cdot t_2) \in \mathscr{T}(x)$; если $t \in \mathscr{T}(x)$, то $x^t \in \mathscr{T}(x)$. Вводя обозначение $\chi(t) := x^t$ и считая $\chi$ унарным функциональным символом, можно формально определить $\mathscr{T}(x)$ как множество всех термов сигнатуры $\mathscr{Q} \cup \{+, -, \cdot, \chi\}$. Элементы $\mathscr{T}(x)$ условимся называть *$x$-термами*. Для наглядности мы будем иногда записывать $x$-термы $t$ в виде $t(x)$. Ясно, что $\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (\forall\, x \in \mathbb{R}_+)(t(x) \in \mathbb{R})$ для всех $t \in \mathscr{T}(x)$.

Если $(t_i)_{i \in I}$ — непустое конечное семейство $x$-термов, то, подразумевая какую-либо естественную нумерацию $I = \{i_1, \dots, i_n\}$, условимся записывать $x$-терм $(\cdots((t_{i_1} + t_{i_2}) + t_{i_3}) + \cdots + t_{i_n})$ в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{i_k}$ или $\sum\limits_{i \in I} t_i$. Кроме того, для любых $c \in \mathscr{C}$ и $t \in \mathscr{T}(x)$ определим $x$-терм $cx^t$, полагая $cx^0 := c$ и $cx^t := c \cdot x^t$ при $t \neq 0$.

Положим $\mathscr{P}_1(x) := \mathscr{C} = \{cx^0 : c \in \mathscr{C}\}$ и далее по рекурсии

$$\mathscr{P}_{k+1}(x) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i x^{p_i} \;:\; n \in \mathbb{N},\; c_i \in \mathscr{C},\; p_i \in \mathscr{P}_k(x) \right\}.$$

Как легко видеть, $\mathscr{P}_k(x) \subset \mathscr{P}_{k+1}(x)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{P}_k(x)$ символом $\mathscr{P}(x)$ и условимся называть элементы $\mathscr{P}(x)$ *обобщенными $x$-полиномами* или для краткости просто *$x$-полиномами*. Определим функцию $h : \mathscr{P}(x) \to \mathbb{N}$, полагая $h(p) := \min\{k \in \mathbb{N} : p \in \mathscr{P}_k(x)\}$, и назовем число $h(p)$ *высотой* $x$-полинома $p$.

Будем говорить, что $x$-термы $t_1, t_2$ *равнозначны*, и писать $t_1 \equiv t_2$, если

$$\mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (\forall\, x \in \mathbb{R}_+)(t_1(x) = t_2(x)).$$

Ясно, что $\equiv$ является отношением эквивалентности на $\mathscr{T}(x)$, продолжающим введенное ранее одноименное отношение на множестве рациональных термов.

Для любых $p, \tilde{p} \in \mathscr{P}(x)$ определим $x$-полиномы $p \boxplus \tilde{p}$, $p \boxminus \tilde{p}$, $p \boxdot \tilde{p}$ следующим образом: если $p = \sum\limits_{i\in I} c_i x^{p_i}$ и $\tilde{p} = \sum\limits_{j \in J} c_j x^{p_j}$, где $I = \{1, \dots, m\}$ и $J = \{m+1, \dots, n\}$, то

$$p \boxplus \tilde{p} := \sum_{k \in I \cup J} c_k x^{p_k}, \quad p \boxminus \tilde{p} := p \boxplus \sum_{j\in J} (0 - c_j) x^{p_j}, \quad p \boxdot \tilde{p} := \sum_{(i,j) \in I \times J} (c_i \cdot c_j) x^{p_i \boxplus p_j}.$$

Определим функцию $\pi : \mathscr{T}(x) \to \mathscr{P}(x)$ рекурсией по сложности $x$-термов: для $q \in \mathscr{Q}$ положим $\pi(q) := q$; для $t_1, t_2 \in \mathscr{T}(x)$ положим $\pi(t_1 + t_2) := \pi(t_1) \boxplus \pi(t_2)$, $\pi(t_1 - t_2) := \pi(t_1) \boxminus \pi(t_2)$, $\pi(t_1 \cdot t_2) := \pi(t_1) \boxdot \pi(t_2)$; для $t \in \mathscr{T}(x)$ положим $\pi(x^t) := 1 x^{\pi(t)}$. Как легко видеть, функция $\pi : \mathscr{T}(x) \to \mathscr{P}(x)$ вычислима и $\pi(t) \equiv t$ для всех $t \in \mathscr{T}(x)$.

Введем на $\mathscr{P}(x)$ отношение $\prec$, полагая $p_1 \prec p_2$ в случае

$$\mathrm{ZFC} \vdash (\exists\, y \in \mathbb{R}_+)(\forall\, x \geqslant y)(p_1(x) < p_2(x)).$$

Ясно, что $\prec$ является отношением строгого (нелинейного) порядка, продолжающим введенный выше порядок на множестве рациональных термов.

В [11] доказано, что структура $\mathscr{R} = (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <, \exp)$ является $o$-минимальной. Последнее означает, что область истинности любого одноместного предиката, определимого формулой языка первого порядка этой структуры, представляет собой объединение конечного числа точек и конечного числа ограниченных или неограниченных интервалов. (Богатым источником информации об $o$-минимальных структурах служит книга [12].) Благодаря тождеству $a^b = \exp(b \exp^{-1}(a))$ для любого $x$-полинома $p$ функция $(x \mapsto p(x)) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ определима в сигнатуре структуры $\mathscr{R}$, а значит, для $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(x)$ одноместные предикаты $p_1(x) < p_2(x)$ и $p_1(x) = p_2(x)$ определимы в $\mathscr{R}$. Из $o$-минимальности $\mathscr{R}$ немедленно следует, что для любых $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(x)$ в $\mathscr{R}$ истинно одно и только одно из предложений

$$(\exists\, y \in \mathbb{R}_+)(\forall\, x \geqslant y)(p_1(x) < p_2(x)),$$
$$(\exists\, y \in \mathbb{R}_+)(\forall\, x \geqslant y)(p_1(x) > p_2(x)),$$
$$(\exists\, y \in \mathbb{R}_+)(\forall\, x \geqslant y)(p_1(x) = p_2(x)).$$

Кроме того, последнее предложение равносильно $(\forall\, x \in \mathbb{R}_+)(p_1(x) = p_2(x))$. Действительно, поскольку функция $f : x \mapsto p_1(x) - p_2(x)$ аналитична, в случае $f \not\equiv 0$ множество $\{x \in \mathbb{R}_+ : f(x) = 0\}$ не может содержать предельную точку, а значит, оно конечно ввиду $o$-минимальности $\mathscr{R}$. Эти соображения дают основание предполагать, что для любой пары $p_1, p_2 \in \mathscr{P}(x)$ выполняется ровно одно из соотношений $p_1 \prec p_2$, $p_1 \equiv p_2$, $p_1 \succ p_2$, причем отношения $\prec$ и $\equiv$ на $\mathscr{P}(x)$ разрешимы. (Принимая эту гипотезу, заметим, что ее версия для $x$-полиномов высоты 1 очевидна, а в исследовании общего случая, вероятно, могут помочь результаты и идеи статьи [13], посвященной разрешимости теории структуры $\mathscr{R}$.)

Положим $\mathscr{A}_1(x) := \mathscr{Q} = \{qx^0 : q \in \mathscr{Q}\}$ и далее по рекурсии

$$\mathscr{A}_{k+1}(x) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i x^{a_i} \ :\ n \in \mathbb{N},\ q_i \in \mathscr{Q},\ a_i \in \mathscr{A}_k(x), \right. \\ \left. a_1 \succ a_2 \succ \cdots \succ a_n,\ q_i \neq 0 \text{ при } a_i \neq 0 \right\}.$$

Как легко видеть, $\mathscr{A}_k(x) \subset \mathscr{P}_k(x)$ и $\mathscr{A}_k(x) \subset \mathscr{A}_{k+1}(x)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Введем обозначение $\mathscr{A}(x) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{A}_k(x)$ и условимся называть элементы $\mathscr{A}(x)$ *$x$-нумералами*. Коль скоро порядок $\prec$ на $\mathscr{P}(x)$ разрешим, $\mathscr{A}(x)$ является разрешимым подмножеством $\mathscr{P}(x)$ (и $\mathscr{T}(x)$).

Определим функцию $\alpha : \mathscr{P}(x) \to \mathscr{A}(x)$ рекурсией по высоте $x$-полиномов. В случае $h(p) = 1$, т.е. $p \in \mathscr{P}_1(x) = \mathscr{C}$, положим $\alpha(p) := \mathrm{val}(p) \in \mathscr{Q} \subset \mathscr{A}(x)$. Предполагая, что функция $\alpha$ уже определена на $\mathscr{P}_k(x)$, рассмотрим произвольный $x$-полином $p = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x^{p_i}$ высоты $k+1$. Поскольку $h(p_1), \dots, h(p_n) < h(p)$, мы располагаем $x$-нумералами $\alpha(p_1), \dots, \alpha(p_n) \in \mathscr{A}(x)$, которые можно упорядочить и сгруппировать с помощью разрешимого сравнения $x$-полиномов: $\{\alpha(p_1), \dots, \alpha(p_n)\} = \{a_1, \dots, a_m\}$, где $a_1 \succ a_2 \succ \cdots \succ a_m$. Введем обозначения $I = \{1, \dots, n\}$, $J = \{1, \dots, m\}$ и для каждого индекса $j \in J$ положим $I(j) := \{i \in I : \alpha(p_i) = a_j\}$ и $q_j := \mathrm{val}\big(\sum\limits_{i \in I(j)} c_i\big) \in \mathscr{Q}$. Ясно, что $p \equiv \sum\limits_{j \in J} q_j x^{a_j}$. Следовательно, в качестве $\alpha(p)$ можно взять сумму $\sum\limits_{j \in J} q_j x^{a_j}$ за вычетом слагаемых $q_j x^{a_j}$ вида $0x^a$, где $a \neq 0$, и положив $\alpha(p) := 0$, если все слагаемые $q_j x^{a_j}$ имеют такой вид. В результате мы получаем вычислимую функцию $\alpha : \mathscr{P}(x) \to \mathscr{A}(x)$ такую, что $\alpha(p) \equiv p$ для всех $p \in \mathscr{P}(x)$.

Рассмотрим композицию $\mathrm{val} : \mathscr{T}(x) \to \mathscr{A}(x)$ функций $\pi : \mathscr{T}(x) \to \mathscr{P}(x)$ и $\alpha : \mathscr{P}(x) \to \mathscr{A}(x)$. Ясно, что val — вычислимая функция, продолжающая введенную ранее одноименную функцию $\mathrm{val} : \mathscr{C} \to \mathscr{Q}$ и удовлетворяющая условию $\mathrm{val}(t) \equiv t$ для всех $t \in \mathscr{T}(x)$. Принимая гипотезу о том, что для любых $a_1, a_2 \in \mathscr{A}(x)$ из $a_1 \equiv a_2$ следует $a_1 = a_2$, мы можем назвать $x$-нумерал $\mathrm{val}(t) \in \mathscr{A}(x)$ *значением* $x$-терма $t \in \mathscr{T}(x)$. Таким образом, $x$-термы равнозначны тогда и только тогда, когда они имеют совпадающие значения. С помощью функции val мы можем эффективно продолжить на $\mathscr{A}(x)$ имеющиеся в $\mathscr{Q}$ вычислимые операции сложения, вычитания и умножения, полагая $a_1 \oplus a_2 := \mathrm{val}(a_1 + a_2)$, $a_1 \ominus a_2 := \mathrm{val}(a_1 - a_2)$, $a_1 \odot a_2 := \mathrm{val}(a_1 \cdot a_2)$, а также добавить вычислимую операцию $x$-степени: $x{\uparrow}a := \mathrm{val}(x^a)$. В итоге у нас появляется основание называть $\mathscr{A}(x)$ «системой исчисления $x$-нумералов».

Пусть IST — теория внутренних множеств Нельсона [6]. (Впрочем, вместо IST можно привлечь любую из классических нестандартных теорий множеств, консервативно расширяющих ZFC.) Введем в язык IST константы $q \in \mathscr{Q}$ и новую константу ①, определяемую как факториал какого-либо бесконечно большого натурального числа. Точнее говоря, (консервативно) расширим теорию $\mathrm{IST} + \mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}}$ до теории $\mathrm{IST}_{①}$, обогатив сигнатуру константой ① и добавив аксиому $(\exists\, \nu \in \mathbb{N} \setminus {}^{\circ}\mathbb{N})(① = \nu!)$.

Согласно принципу переноса мы имеем $\mathrm{IST}_{①} \vdash (c \in {}^{\circ}\mathbb{Q})$ для всех $c \in \mathscr{C}$ и, кроме того, для любого $x$-нумерала $a \in \mathscr{A}(x)$ в $\mathrm{IST}_{①}$ доказуемо следующее утверждение: $(x \mapsto a(x))$ — стандартная непрерывная функция из $\mathbb{R}_+$ в $\mathbb{R}$, причем в случае $a(x) \not\equiv 0$ найдется такое число $y \in \mathbb{R}_+$, что $a(x) \neq 0$ при $x \geqslant y$.

Следовательно, для любых $a_1, a_2 \in \mathscr{A}(x)$ имеем

$$a_1 = a_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (\exists\, y \in \mathbb{R}_+)(\forall\, x \geqslant y)(a_1(x) = a_2(x)) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{IST}_{①} \vdash (a_1(①) = a_2(①));$$
$$a_1 \prec a_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{ZFC}_{\mathscr{Q}} \vdash (\exists\, y \in \mathbb{R}_+)(\forall\, x \geqslant y)(a_1(x) < a_2(x)) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{IST}_{①} \vdash (a_1(①) < a_2(①)).$$

Элементы множества $\mathscr{G} := \bigl\{ a|_{①}^{x} : a \in \mathscr{A}(x) \bigr\}$ условимся называть *гросс-нумералами*. Поскольку подстановки $a \mapsto a|_{①}^{x}$ и $g \mapsto g|_{x}^{①}$ представляют собой взаимно обратные вычислимые биекции между $\mathscr{A}(x)$ и $\mathscr{G}$, на множестве гросс-нумералов возникают разрешимый порядок $\prec$ и вычислимые операции сложения $\oplus$, вычитания $\ominus$, умножения $\odot$ и гросс-степени $①\!\uparrow$, превращающие $\mathscr{G}$ в «систему исчисления гросс-нумералов». При этом для любых $g, g_1, g_2 \in \mathscr{G}$ справедливы следующие соотношения:

$$\mathrm{IST}_{①} \vdash (g \in \mathbb{R});$$
$$g_1 = g_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{IST}_{①} \vdash (g_1 = g_2); \quad g_1 \prec g_2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{IST}_{①} \vdash (g_1 < g_2);$$
$$\mathrm{IST}_{①} \vdash (g_1 \oplus g_2 = g_1 + g_2); \quad \mathrm{IST}_{①} \vdash (g_1 \ominus g_2 = g_1 - g_2);$$
$$\mathrm{IST}_{①} \vdash (g_1 \odot g_2 = g_1 \cdot g_2); \quad \mathrm{IST}_{①} \vdash (①\!\uparrow\! g = ①^{g}).$$

Безусловно, числа, определяемые гросс-нумералами, малопредставительны в $\mathbb{R}$. Точнее говоря, в $\mathrm{IST}_{①}$ всякое такое число принадлежит внешнему множеству $\{f(①) : f \in {}^{\circ}\mathscr{F}\}$, где $\mathscr{F}$ — стандартное счетное множество, являющееся наименьшим кольцом функций $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, включающим рациональные константы и с каждым своим элементом $f$ содержащим функцию $x \mapsto x^{f(x)}$. Кроме того, представляется правдоподобной гипотеза о выводимости в $\mathrm{IST}_{①}$ формулы

$$(|g| \approx \infty) \vee (\exists\, r \in {}^{\circ}\mathbb{Q})(g \approx r)$$

для всех $g \in \mathscr{G}$, из которой, в частности, следует, что гросс-нумералом невозможно выразить ни одно стандартное иррациональное число (даже с точностью до бесконечно малого).

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Sergeyev Ya. D.* Arithmetic of infinity. Edizioni Orizzonti Meridionali, 2003.
2. *Sergeyev Ya. D.* A few remarks on philosophical foundations of a new applied approach to infinity // Scheria. 2005. V. 26-27. P. 63–72.
3. *Sergeyev Ya. D.* Misuriamo l'infinito: Un semplice modo per insegnare i concetti delle grandezze infinite // Period. Matematiche. 2006. V. 6. P. 11–26. (in Italian).
4. *Sergeyev Ya. D.* Blinking fractals and their quantitative analysis using infinite and infinitesimal numbers // Chaos, Solitons & Fractals. 2007. V. 33, N 1. P. 50–75.
5. *Sergeyev Ya. D.* Infinity computer. Computer system for storing infinite, infinitesimal, and finite quantities and executing arithmetical operations with them. International patent application, submitted 08.03.04.
6. *Nelson E.* Internal set theory. A new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83, N 6. P. 1165–1198.
7. *Hrbaček K.* Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math. 1978. V. 98, N 1. P. 1–24.
8. *Kawai T.* Axiom systems of nonstandard set theory // Logic Symposia: Proc. Conf. Hakone 1979, 1980. Berlin etc.: Springer-Verl., 1981. P. 57–65.
9. *Kanovei V., Reeken M.* Nonstandard Analysis, Axiomatically. Berlin: Springer-Verl., 2004 (Springer Monogr. in Math.).
10. *Гордон Е. И., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Инфинитезимальный анализ. Избранные темы. М.: Наука, 2008.
11. *Wilkie A. J.* Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function // J. Amer. Math. Soc. 1996. V. 9, N 4. P. 1051–1094.

**12.** *van den Dries L.* Tame topology and *o*-minimal structures. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998 (London Math. Soc. Lecture Notes Ser.; 248).

**13.** *Macintyre A., Wilkie A. J.* On the decidability of the real exponential field // Kreiseliana: About and around Georg Kreisel. Wellesley, MA: A K Peters, 1996. P. 441–467.

*Статья поступила 18 июня 2008 г.*

Гутман Александр Ефимович, Кутателадзе Семён Самсонович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru, sskut@math.nsc.ru