Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 512.541

ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ n–ГРУПП

В. В. Мухин, Д. В. Сергеева

Аннотация. Получено обобщение теоремы Понтрягина — Ван Кампена на случай локально компактных топологический n-групп, а также рассмотрены свертки мер и преобразование Фурье на локально компактных топологических n-группах.

Ключевые слова: характер, n-группа, n-полугруппа, топология, мера.

1. Введение

Терминология, касающаяся алгебраических n-групп, согласована с [1], за исключением того, что мы пишем n-группа вместо n-арная группа.

Топологические n-группы стали рассматриваться сравнительно недавно [2]. Дальнейшее продвижение в их изучении представлено в работах [3–5].

В данной работе рассматриваются характеры локально компактных абелевых n-групп, доказывается теорема, обобщающая классическую теорему двойственности Понтрягина — Ван Кампена на случай n-групп, введено преобразование Фурье — Стильтьеса мер и функций на топологических n-группах. Некоторые результаты работы анонсированы в [6].

2. Характеры n-групп

Упорядоченную пару $\langle X, ()\rangle$, где X — непустое множество, $()$ — ассоциативная n-арная операция на X такая, что для любой последовательности $a_1^{n-1}a \in X^n$ каждое из следующих уравнений: $\left(xa_1^{n-1}\right) = a$ и $\left(a_1^{n-1}x\right) = a$, имеет единственное решение, называют *n-группой.* n-Группу $\langle X, ()\rangle$, наделенную топологией, называют *топологической*, если n-арная операция $()$ непрерывна по совокупности аргументов и решение каждого из приведенных выше уравнений непрерывно зависит от $a_1^{n-1}a \in X^n$.

Здесь и ниже последовательность $a_1, \dots, a_n$ обозначаем через a_1^n, а результат действия n-арной операции на такой последовательности — через (a_1^n). n-Группу $\langle X, ()\rangle$ называют *абелевой*, если результат (a_1^n) не зависит от перестановки элементов последовательности a_1^n для любой последовательности $a_1^n \in X^n$.

Далее всюду T — группа комплексных чисел, по модулю равных единице, с операцией обычного умножения чисел, наделенная естественной топологией. Пусть $\langle X, ()\rangle$ — n-группа. Отображение $f : X \to T$ назовем *характером n-группы* $\langle X, ()\rangle$, если

$$f(x_1^n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$$

для любой последовательности $x_1^n \in X^n$.

Произведение двух характеров n-группы $\langle X, ()\rangle$ является характером этой n-группы, и множество всех характеров n-группы $\langle X, ()\rangle$ с так определенным умножением является абелевой бинарной группой. Легко проверяется справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. *Если χ — характер n-группы $\langle X, ()\rangle$, то формула*

$$\chi_1(x) = \beta \cdot \chi(x) \quad (x \in X)$$

определяет характер n-группы $\langle X, ()\rangle$ тогда и только тогда, когда $\beta^{n-1} = 1$, где β — комплексное число.

Теорема 2. *Пусть $\langle G, \cdot\rangle$ — абелева бинарная группа, X — система образующих G, H — подгруппа G и a — элемент из G такие, что $X = aH$, множества $H, aH, \dots, a^{k-2}H$ попарно различны и $a^{k-1}H = H$, где $k \in \mathbb{N}$ и $k \geq 2$. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $n = l(k-1)+1$ и $(a_1^n)_n = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$\langle X, ()_n\rangle$ является абелевой n-группой;*

2) *если χ — характер k-группы $\langle X, ()_k\rangle$, $\beta \in \{\sqrt[k-1]{1}\}$, то формула*

$$\chi_1(x) = \beta \cdot \chi(x) \quad (x \in X)$$

задает характер n-группы $\langle X, ()_n\rangle$;

3) *если χ_1 — характер n-группы $\langle X, ()_n\rangle$ и для некоторого $b \in X$ имеет место $(\chi_1(b))^{k-1} = 1$ и $\chi_1(\underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{k}) = \chi_1(b)$, то формула*

$$\chi(x) = \overline{\chi_1(b)} \cdot \chi_1(x) \quad (x \in X)$$

определяет характер k-группы $\langle X, ()_k\rangle$;

4) *если χ — характер бинарной группы G, то сужение χ на X является характером k-группы $\langle X, ()_k\rangle$, причем различные характеры бинарной группы G имеют различные сужения на X;*

5) *каждый характер k-группы $\langle X, ()_k\rangle$ является сужением на X некоторого характера бинарной группы G.*

Доказательство. 1. Устанавливается простой проверкой.

2. Заметим сначала, что каждый характер k-группы $\langle X, ()_k\rangle$ является характером n-группы $\langle X, ()_n\rangle$. Далее применим теорему 1.

3. Пусть выполнены условия утверждения 3, и пусть $x_1^k \in X^k$. Тогда

$$\chi(x_1^k)_k = \frac{\chi_1((x_1^k)_k)}{chi_1(b)} = \frac{\chi_1((b^k)_k)^{n-1} \cdot \chi_1(x_1^k)}{\chi_1(b) \cdot \chi_1(b)^{n-k}} = \frac{\chi_1(b^k \cdot \ldots \cdot b^k \cdot (x_1^k)_k)}{\chi_1(b) \cdot (\chi_1(b))^{n-k}}$$
$$= \frac{\chi_1((x_1 b^{n-1}) \cdot (x_2 b^{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x_{k-1} b^{n-1}) \cdot (x_k b^{n-k-1}) \cdot (b^k))}{\chi_1(b) \cdot \chi_1(b)^{n-k}}$$
$$= \frac{\chi_1(x_1)(\chi_1(b))^{n-1} \cdot \chi_1(x_2)(\chi_1(b))^{n-1} \cdot \ldots \cdot \chi_1(x_k)(\chi_1(b))^{n-k-1} \cdot \chi_1(b^k)}{\chi_1(b) \cdot \chi_1(b)^{n-k}}$$
$$= \chi(x_1) \cdot \chi(x_2) \cdot \ldots \cdot \chi(x_k) \cdot \chi_1(b)^{(k-1)(n-1)} = \chi(x_1) \cdot \ldots \cdot \chi(x_k).$$

4. Очевидно, что сужение характера бинарной группы G на X является характером k-группы $\langle X, ()_k\rangle$. Пусть χ_1 и χ_2 — различные характеры бинарной группы G. Тогда $\chi_1(a^l h) \neq \chi_2(a^l h)$ для некоторого $0 \leq l \leq k-1$ и некоторого $h \in H$. Отсюда

$$\chi_1(ah) \neq \chi_2(ah).$$

Так как $ah \in X$, сужения χ_1 и χ_2 на X различны.

5. Пусть χ_0 — характер k-группы $\langle X, ()_k \rangle$. Положим

$$\chi(a^l h) = (\chi_0(a))^{l-1} \cdot \chi_0(ah)$$

для каждого $0 \le l < k-1$ и каждого $h \in H$. Тогда χ является функцией, определенной на G, принимающей значения из T, сужение которой на X совпадает с χ_0.

Пусть $0 \le l_1 < k-1$, $0 \le l_2 < k-1$, $h_1, h_2 \in T$. Если $l = l_1 + l_2$, то

$$\begin{aligned}
&\chi(a^{l_1} h_1 a^{l_2} h_2) = \chi(a^{l_1+l_2} h_1 h_2) = (\chi_0(a))^{l_1+l_2-1} \cdot \chi_0(ah_1h_2) \\
&= (\chi_0(a))^{l_1+l_2-1-k+1} \cdot (\chi_0(a))^{k-1} \cdot \chi_0(ah_1h_2) = (\chi_0(a))^{l_1+l_2-k} \cdot \chi_0(a^{k-1}(ah_1h_2)) \\
&= (\chi_0(a))^{l_1+l_2-k} \cdot \chi_0(a^{k-2}(ah_1)(ah_2)) = (\chi_0(a))^{l_1+l_2-2} \cdot \chi_0(ah_1) \cdot \chi_0(ah_2) \\
&= \chi(a^{l_1 h_1}) \cdot \chi(a^{l_2 h_2}).
\end{aligned}$$

Если $l_1 + l_2 \ge k-1$, то полагаем $a^{k-1} = h$, $h \in H$, $l = l_1 + l_2 - (k-1)$. Получаем

$$\begin{aligned}
&\chi(a^{l_1} h_1 a^{l_2} h_2) = \chi(a^l h h_1 h_2) = \chi_0(a)^{l-1} \cdot \chi_0(ahh_1h_2) \\
&= (\chi_0(a))^{l-1} \cdot \chi_0(a^{k-2}(ah_1)(ah_2)) = \chi_0(a)^{l-1+k-2} \cdot \chi_0(ah_1) \cdot \chi_0(ah_2) \\
&= \chi_0(a)^{l_1+l_2-(k-1)-1+k-2} \cdot \chi_0(ah_1) \cdot \chi_0(ah_2) \\
&= \chi_0(a)^{l_1-1} \cdot \chi_0(ah_1) \cdot \chi_0(a)^{l_2-1} \cdot \chi_0(ah_2) = \chi(ah_1) \cdot \chi(ah_2).
\end{aligned}$$

Итак, χ — характер бинарной группы G.

3. Теорема двойственности для n-групп

Далее всюду $\langle X, (), \tau \rangle$ — локально компактная топологическая абелева n-группа.

Обозначим через $\widehat{X}$ множество всех непрерывных характеров топологической n-группы $\langle X, (), \tau \rangle$. Очевидно, $\widehat{X}$ является бинарной группой относительно операции поточечного умножения характеров. Наделим $\widehat{X}$ топологией компактной сходимости. Тогда $\widehat{X}$ становится локально компактной топологической группой. Ее, как и в бинарном случае, будем называть *группой характеров* n-группы X. Мы будем рассматривать только непрерывные характеры, не оговаривая этого особо.

Пусть G — обертывающая группа n-группы X, т. е. $\langle G, \cdot \rangle$ — бинарная группа, $X \subset G, (x_1^n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ для любой последовательности $x_1^n \in X^n$, группа G обладает инвариантной подгруппой H такой, что $yH = Hy = X$ для любого $y \in X$ и фактор-группа G/H есть циклическая группа порядка $n-1$, порожденная элементом yH. Отсюда следует, что G будет абелевой группой и что множества $H, yH, \ldots, y^{n-2}H$ попарно не пересекаются и в объединении дают все G.

Совокупность подмножеств группы G

$$\{A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \mid A_i \in \tau,\ i = 1, 2, \ldots, k,\ k = 1, 2, \ldots, n-1\}$$

образует базу локально компактной топологии, согласованной с групповой структурой G. Каждое из множеств yH, где $y \in G$, открыто в G. Сужение этой топологии на X совпадает с τ. Группу G будем рассматривать вместе с введенной на ней топологией.

Пусть χ — характер группы G. Сужение χ_X характера χ на X, очевидно, является непрерывным характером n-группы X. Формула $\pi(\chi) = \chi_X$ $(\chi \in \widehat{G})$ задает отображение π группы характеров $\widehat{G}$ в группу $\widehat{X}$. Зафиксируем $a \in X$. Имеем $aH = X$.

Теорема 3. *Отображение π — топологический и алгебраический изоморфизм $\widehat{G}$ на $\widehat{X}$.*

Доказательство. Так как сужение произведения характеров равно произведению сужений, то π — гомоморфизм $\widehat{G}$ в $\widehat{X}$.

Из утверждения 4 теоремы 2 следует, что π является инъекцией. Заметим, что если $\chi_0 \in \widehat{X}$, то характер χ группы G, построенный в доказательстве утверждения 5 теоремы 2, сужение которого на X есть χ_0, будет непрерывным на G характером. Следовательно, π — сюръекция и, значит, алгебраический изоморфизм группы $\widehat{G}$ на группу $\widehat{X}$.

Пусть F — компактное подмножество G, $\varepsilon > 0$ и $P(F,\varepsilon) = \{\chi \in \widehat{G} \mid |\chi(x) - 1| < \varepsilon,\ x \in F\}$. Система всех таких множеств образует базу в точке 1 топологической группы $\widehat{G}$. Аналогичное замечание справедливо и для группы $\widehat{X}$.

Покажем, что

$$\pi(P(F,\varepsilon)) \supset \{\chi_0 \in \widehat{X} \mid |\chi_0(x) - 1| < \varepsilon/2n\}$$

для каждого x.

Пусть $\chi_0 \in \widehat{X}$ и для любого $x \in a^s F \cap aH$ верно неравенство $|\chi_0(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2n}$ для $s = 0, 1, 2, \dots, n-2$, а также $\chi_0(a) < \frac{\varepsilon}{2n}$. Пусть $x \in F \cap a^k H$, $0 \le k < n-1$, и $\pi(x) = \chi_0$. Тогда

$$\chi(x) = \chi_0(a)^{k-1} \cdot \chi_0(ah),$$

где $x = a^k h, h \in H$. Так как $a^{n-k}x = a^{n-k}a^k h \in aH$, то

$$\begin{aligned}
|\chi(x) - 1| &= |\chi_0(a)^{k-1} \cdot \chi_0(ah) - 1| = \left|\chi_0^{k-n}(a) \cdot \chi_0(a^n h) - 1\right| \\
&\le \left|\chi_0^{k-n}(a) \cdot \chi_0(a^n h) - \chi_0(a^n h)\right| + |\chi_0(a^n h) - 1| \le \left|\chi_0^{k-n}(a) - 1\right| + \frac{\varepsilon}{2n} \\
&= |\chi_0(a) - 1|\left|1 + \chi_0(a) + \dots + \chi_0^{n-k-1}(a)\right| + \frac{\varepsilon}{2n} < \frac{\varepsilon}{2n} n + \frac{\varepsilon}{2n} \le q\varepsilon.
\end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость доказываемого включения. Из него вытекает, что π — открытое отображение.

Так как для $F \subset X$ и $\varepsilon > 0$

$$P(F,\varepsilon) \subset \pi^{-1}\{\chi_0 \in X : |\chi_0(x) - 1| < \varepsilon,\ x \in F\},$$

то π — непрерывное отображение. Обозначим группу характеров группы $\widehat{X}$ через Ξ_X. Пусть $x \in X$. Положим

$$x'(\chi) = \chi(x) \quad (\chi \in \widehat{X}).$$

Тогда $x' \in \Xi_X$. Зададим отображение τ из X в Ξ_X равенством $\tau(x) = x'$. Если $n = 2$, то τ — непрерывный изоморфизм группы X на Ξ_X. Это есть утверждение знаменитой теоремы Понтрягина — Ван Кампена [7]. Для n-группы $(n > 2)$ не следует ожидать такого результата хотя бы потому, что не всякая n-группа содержит единичный элемент, и если бы τ было изоморфизмом для n-группы, то прообраз единичного элемента из Ξ_X был бы единичным элементом в X.

Следующую теорему назовем *теоремой двойственности* для n-групп.

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения:*

(i) *отображение τ — непрерывный инъективный гомоморфизм из X в Ξ_X;*

(ii) *$\tau(X)$ — открытая n-подгруппа бинарной группы Ξ_X;*

(iii) *$\tau(X)$ — класс смежности по некоторой открытой подгруппе $\widetilde{H}$ группы Ξ_X;*

(iv) *порядок $\Xi_X/\widetilde{H}$ равен $n-1$.*

Доказательство. Пусть $x_1^n \in X^n$. Тогда для $\chi \in \widehat{X}$ имеем

$$(x_1^n)'(\chi) = \chi(x_1^n) = \chi(x_1)\cdot\ldots\cdot\chi(x_n) = x_1'(\chi)\cdot\ldots\cdot x_n'(\chi).$$

Это означает, что $\tau(x_1^n) = \tau(x_1)\cdot\ldots\cdot\tau(x_n)$.

Непрерывность τ доказывается так же, как и для бинарного случая [6].

Пусть G — обертывающая локально компактная группа n-группы X, рассмотренная в предыдущем разделе. Пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Тогда существует $\chi \in \widehat{G}$ такой, что $\chi(x) \neq \chi(y)$. Сужение χ на X, как отмечено, является характером n-группы X. Следовательно, $\tau(x) \neq \tau(y)$. Тем самым утверждение (i) доказано.

Из (i) следует, что $\tau(X)$ является n-подгруппой Ξ_X.

Пусть $\psi \in \Xi_X$. Легко проверяется, что функция $\chi \to \psi(\pi(\chi))$ ($\chi \in \widehat{G}$) является характером на $\widehat{G}$. Положим $\pi^*(\psi) = \psi\circ\pi$. Тогда π^* будет алгебраическим и топологическим изоморфизмом группы Ξ_X на Ξ_G.

Пусть i — вложение X в G, τ' — естественный изоморфизм G на Ξ_G.

Для $x \in X$ и $\chi \in \widehat{G}$

$$\tau'(i(x))(\chi) = \chi(x), \quad \pi^*(\tau(x))(\chi) = (\tau(x)\circ\pi)(\chi) = \pi(\chi)(x) = \chi(x).$$

Множество $\tau(x) = \pi^{*-1}(\tau'(i(x)))$ открыто, ибо $\tau(x)$ открыто в G, а τ' и π^* — гомоморфизмы.

Так как $i(X) = aH$, где H — подгруппа G такая, что $X = aH$, π и τ — алгебраические изоморфизмы, то $\tau(X) = \pi^{*-1}(\tau(aH)) = \pi^{*-1}(\tau(a))\cdot\pi^{*-1}(\tau(aH))$ и $\pi^{*-1}(\tau(H)) = \widetilde{H}$ — нормальная подгруппа группы Ξ_X.

Порядок группы G/H равен $n-1$. Следовательно,

$$|\pi^{*-1}(\tau'(G))/\pi(\tau(H))| = |\tau(x)/\widetilde{H}| = n-1.$$

4. Свертки мер и преобразование Фурье мер на локально компактных n-группах

Пусть $\langle X, (), \tau\rangle$ — локально компактная топологическая n-полугруппа, $M(X)$ — множество всех ограниченных регулярных борелевских комплексных мер на X. В [5] показано, что для любой последовательности $\mu_1^n \in (M(X))^n$ существует единственная мера $\mu_1 * \cdots * \mu_n$ из $M(X)$ (называемая *сверткой мер* $\mu_1^n \in (M(X))^n$ и обозначаемая также $(\mu_1^n *)$) такая, что для любой непрерывной комплекснозначной функции f на X выполняется равенство

$$\int\limits_X f(x)d(\mu_1 * \cdots * \mu_n)(x) = \int\limits_{X^n}\!\!\cdots\!\int f((x_1^n))\,d\mu_1(x_1)\ldots d\mu_n(x_n).$$

Ясно, что $(\mu_1^n *) \in M(X)$.

Теорема 5. *Операция свертки ассоциативна на $M(X)$.*

Следствие. *$\langle M(X),(*)\rangle$ является n-полугруппой.*

Теорема 6. *Для борелевского множества $B\subset X$ имеет место равенство*

$$\begin{aligned}\big(\mu_1^n*\big)(B)&=\int\limits_{X^{n-1}}\cdots\int\mu_1\big(\rho^{-1}_{1x_2\dots x_n}(B)\big)d\mu_2(x_2)\dots d\mu_n(x_n)\\&=\int\limits_{X^{n-1}}\cdots\int\mu_2\big(\rho^{-1}_{2x_1x_3\dots x_n}(B)\big)\,d\mu_1(x_1)d\mu_3(x_3)\dots d\mu_n(x_n)\\&=\int\limits_{X^{n-1}}\cdots\int\mu_n\big(\rho^{-1}_{1x_n\dots x_{n-1}}(B)\big)\,d\mu_1(x_1)\dots d\mu_{n-1}(x_{n-1}),\end{aligned}$$

где $\rho_{ix_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n}(x)=\big(x_1^{i-1}xx_{i+1}^n\big)$ $(x\in X)$.

Доказательство. Пусть $\mu_i\in M(X)$, $i=1,2,\dots,n$, и $B\in B(X)$. Формула

$$\varepsilon(B)=\int\limits_{X^{n-1}}\cdots\int\mu\big(\rho^{-1}_{ix_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n}(B)\big)\,d\mu_1(x_1)\dots d\mu_{i-1}(x_{i-1})d\mu_{i+1}(x_{i+1})\dots d\mu_n(x_n)$$

определяет неотрицательную меру ε на X.

Пусть K — компактное подмножество X и F — множество всех неотрицательных непрерывных на X функций, равных единице на K. Тогда

$$\begin{aligned}\varepsilon(K)&=\int\limits_{X^{n-1}}\cdots\int\mu\big(\rho^{-1}_{ix_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n}(K)\big)\,d\mu_1(x_1)\dots d\mu_{i-1}(x_{i-1})d\mu_{i+1}(x_{i+1})\dots d\mu_n(x_n)\\&=\int\limits_{X^{n-1}}\left(\inf_{f\in F}\int f\big(\big(x_1^{i-1}xx_{i+1}^n\big)\big)\,d\mu_i(x_i)\right)d\mu_1(x_1)\dots d\mu_{i-1}(x_{i-1})d\mu_{i+1}(x_{i+1})\dots d\mu_n(x_n)\\&=\inf_{f\in F}\int\limits_{X^n}f((x_1^n))\,d\mu(x_1)\dots d\mu(x_n)=\inf_{f\in F}\int\limits_X f(x)\,d(\mu_1^n*)(x)=(\mu_1^n*)(K).\end{aligned}$$

Следовательно, меры ε и $\big(\mu_1^n*\big)$ будут совпадать всюду на $B(X)$ в силу их регулярности.

Далее всюду $\langle X,(),\tau\rangle$ — топологическая абелева n-группа, топология τ которой локально компактна. Пусть $\mu\in M(X)$. Функцию $\hat\mu$ на $\widehat X$, определяемую формулой

$$\hat\mu(\chi)=\int\limits_X\bar\chi(x)\,d\mu,$$

где $\chi\in\widehat X$, назовем (как и в бинарном случае) *преобразованием Фурье — Стильтьеса* меры μ.

Известно [8], что на n-группе $\langle X,(),\tau\rangle$ существует положительная мера λ такая, что для любой последовательности $a_1^{n-1}\in X^{n-1}$ и любого борелевского множества $B\subset X$ имеет место равенство $\lambda\big(\big(a_1^{n-1}B\big)\big)=\lambda(B)$, где $\big(a_1^{n-1}B\big)=\big\{\big(a_1^{n-1}b\big)\mid b\in B\big\}$ (такую меру называют инвариантной на $\langle X,(),\tau\rangle$, она будет ограниченной тогда и только тогда, когда множество X компактно). Мера λ определена однозначно с точностью до постоянного множителя.

Множество всех функций на X, интегрируемых относительно меры λ, будем обозначать через $L_1(X,\lambda)$.

Если $f \in L_1(X,\ \lambda)$, то мера $\mu = f \cdot \lambda$ принадлежит $M(X)$ и

$$\hat{\mu}(\chi) = \int\limits_X \bar{\chi}(x)\, d\mu = \int\limits_X f(x)\bar{\chi}(x) d\lambda(x).$$

В этом случае функцию $\hat{f}(\chi) := \hat{\mu}(\chi)$ так же, как и в бинарном случае, называют *преобразованием Фурье* функции f.

Пусть $f_1, \dots, f_n \in L_1(X, \lambda)$. Тогда меры $f_1 \cdot \lambda, \dots, f_n \cdot \lambda$ принадлежат $M(X)$. Их свертка будет мерой, абсолютно непрерывной по отношению к мере λ. Следовательно, существует функция $f \in L_1(X, \lambda)$ такая, что $f \cdot \lambda = f_1 \cdot \lambda * \dots * f_n \cdot \lambda$. Эту функцию f назовем *сверткой функций* $f_1, \dots, f_n \in L_1(X, \lambda)$. Будем обозначать $f = f_1 * \dots * f_n$.

Преобразование Фурье — Стильтьеса на локально компактной абелевой n-группе $\langle X, (), \tau \rangle$ обладает рядом свойств, аналогичных свойствам преобразования Фурье — Стильтьеса для случая бинарных групп.

Теорема 7. *Для любой ненулевой меры $\mu \in M(X)$, абсолютно непрерывной относительно меры λ, найдется такой характер $\chi \in \widehat{X}$, что $\hat{\mu}(\chi) \neq 0$.*

Теорема 8. *Если $\mu_1^n \in (M(X))^n$, то $(\mu_1 * \dots * \mu_n)\hat{} = \hat{\mu}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{\mu}_n$.*

Доказательство. Пусть $\chi \in \widehat{X}$. Тогда

$$(\mu_1 * \dots * \mu_n)(\chi) = \int\limits_X \overline{\chi(x)} d(\mu_1 * \dots * \mu_n)(x) = \int\limits_{X^{n-1}}\!\!\cdots\!\int \overline{\chi(x_1^n)} d\mu_1(x_1) \dots d\mu_n(x_n)$$

$$= \int\limits_{X^{n-1}}\!\!\cdots\!\int \overline{\chi(x_1)} \cdot \ldots \cdot \overline{\chi(x_n)}\, d\mu_1(x_1) \dots d\mu_n(x_n)$$

$$= \int\limits_X \overline{\chi(x_1)}\, d\mu_1(x_1) \cdot \ldots \cdot \int\limits_X \overline{\chi(x_n)}\, d\mu_n(x_n) = \hat{\mu}_1(\chi) \cdot \ldots \cdot \hat{\mu}_n(\chi).$$

Из этой теоремы вытекает следующая

Теорема 9. *Если $f_1, \dots, f_n \in L_1(X, \lambda)$, то $(f_1^n *)\hat{} = \hat{f}_1 \cdot \ldots \cdot \hat{f}_n$.*

Теорема 10. *Пусть $f_1, \dots, f_n \in L_1(X, \lambda)$. Тогда для любого $x \in X$*

$$(f_1 * \dots * f_n)(x) = \int\limits_{X^{n-1}}\!\!\cdots\!\int f_1\big(\rho^{-1}_{1x_2\dots x_n}(x)\big) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) d\lambda_2(x_2) \dots d\lambda_n(x_n)$$

$$= \int\limits_{X^{n-1}}\!\!\cdots\!\int \int f_1(x_1) f_2\big(\rho^{-1}_{2x_1x_3\dots x_n}(x)\big) f_2(x_2) f_3(x_3) \dots f_n(x_n) d\lambda_1(x_1) d\lambda_3(x_3)$$

$$\dots d\lambda_n(x_n) = \dots = \int\limits_{X^{n-1}}\!\!\cdots\!\int f_1(x_1) \dots f_{n-1}(x_{n-1})$$

$$\times f_n\big(\rho^{-1}_{nx_1\dots x_{n-1}}(x)\big) d\lambda_1(x_1) \dots d\lambda_{n-1}(x_{n-1}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Русаков С. А.* Алгебраические n-арные системы: силовская теория n-арных групп. Минск: Навука і тэхніка, 1992.
2. *Čupona G.* On topological n-groups // Bull. Soc. Math. Phys. R. S. Macédoine. 1971. P. 5–10.

3. *Dudek W. A., Mukhin V. V.* On topological n-ary semigroups // Quasigroups Relat. Syst. 1996. N 3. P. 73–88.
4. *Mukhin V. V.* On topological n-semigroups // Quasigroups Relat. Syst. 1997. N 4. P. 39–49.
5. *Мухин В. В.* Меры на топологических полугруппах. Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2004.
6. *Мухин В. В., Сергеева Д. В.* Вторая группа характеров локально компактной абелевой n-группы // Современная математика и математическое образование в вузах и школах России: опыт, тенденции, проблемы. Вологда: Русь, 2006. С. 31–33.
7. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М.: Наука, 1975. Т. 1.
8. *Мухин В. В.* Инвариантные меры на топологических n-полугруппах // Весцi НАН Беларуси. Сер. фiз. мат. навук. 2000. № 4. С. 16–21.

Статья поступила 19 мая 2007 г.

Мухин Владимир Васильевич
Череповецкий гос. университет, кафедра прикладной математики,
пр. Луначарского, 5, Череповец Вологодской обл. 162600
mukhin@ehsu.ru

Сергеева Дина Владимировна
Вологодский гос. педагогический университет,
кафедра прикладной математики,
ул. Сергей Орлова, 6, Вологда 160035
dina_sergeeva@mail.ru