

УДК 512.542

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДКЛАССЫ ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев

Аннотация. Класс Фиттинга \mathfrak{F} назовем π -максимальным, если \mathfrak{F} является максимальным (по включению) подклассом класса Фиттинга \mathfrak{S}_π всех конечных разрешимых π -групп. Доказано, что \mathfrak{F} — π -максимальный класс Фиттинга в точности тогда, когда существует такое простое $p \in \pi$, что индекс \mathfrak{F} -радикала $G_{\mathfrak{F}}$ в G равен 1 или p для каждой π -группы G . Отсюда следует, что существуют максимальные подклассы в локальном классе Фиттинга. Это отрицательно решает вопрос А. Н. Скибы о том, что не существует максимальных подклассов Фиттинга в локальном классе Фиттинга (см. [1, вопрос 13.50]).

Ключевые слова: класс Фиттинга, максимальный подкласс Фиттинга, локальный класс Фиттинга, \mathfrak{F} -радикал, класс Локетта, лаушева группа, фиттингова пара.

Введение

В теории классов Фиттинга конечных разрешимых групп одной из трудных проблем является проблема нахождения критерия максимальности подкласса Фиттинга \mathfrak{F} в классе Фиттинга \mathfrak{X} , сформулированная в 1974 г. Брайсом и Косси (см. [2, с. 170], а также [3, X.4, с. 735]). Напомним, что класс Фиттинга \mathfrak{F} называется *максимальным (по включению)* подклассом Фиттинга класса Фиттинга \mathfrak{X} (обозначают $\mathfrak{F} < \mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}$ и из того, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$, где \mathfrak{M} — класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$. Заметим, что указанная выше проблема решена Брайсом и Косси [1] лишь для случая, когда \mathfrak{X} совпадает с тривиальным нормальным классом Фиттинга \mathfrak{S} всех конечных разрешимых групп (см. [3, X.4, теорема 4.26]).

Основной результат настоящей работы — описание необходимого и достаточного условия максимальности подкласса Фиттинга \mathfrak{F} в классе Фиттинга \mathfrak{S}_π всех конечных разрешимых π -групп, который ненормален для всякого непустого собственного подмножества π множества всех простых чисел. Если $\mathfrak{F} < \mathfrak{S}_\pi$, то \mathfrak{F} будем называть просто π -максимальным классом Фиттинга.

Нами установлено, что \mathfrak{F} является π -максимальным классом Фиттинга в точности тогда, когда существует простое число $p \in \pi$ такое, что индекс \mathfrak{F} -радикала $G_{\mathfrak{F}}$ в группе G равен 1 или p для всех групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Так как класс Фиттинга \mathfrak{S}_π локален, то из доказанной теоремы, в частности, следует, что существуют максимальные подклассы Фиттинга в ненормальном локальном классе Фиттинга, и тем самым подтверждается отрицательный ответ на вопрос А. Н. Скибы, сформулированный в «Коуровской тетради» (см. [1, вопрос 13.50]). Заметим, что первые примеры максимальных нормальных классов Фиттинга в нормальном локальном классе \mathfrak{S} анонсированы в [4]. Мы также подтверждаем существование нетривиальных π -максимальных подклассов Фиттинга построением конкретных примеров.

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны и разрешимы, если не оговорено противное. В определениях и обозначениях мы следуем [3].

1. Предварительные сведения

Классом Фиттинга называется нормально наследственный класс групп \mathfrak{F} , замкнутый относительно произведений нормальных \mathfrak{F} -подгрупп.

Если \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга, то подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называют \mathfrak{F} -радикалом группы G , если она является наибольшей из нормальных подгрупп группы G , принадлежащих \mathfrak{F} . *Произведением* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов Фиттинга \mathfrak{F} и \mathfrak{H} называется класс всех таких групп G , для которых фактор-группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ принадлежит \mathfrak{H} . Хорошо известно, что класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Для доказательства основного результата будем использовать операторы «*» и « \star », которые были определены Локеттом [5]. Для каждого непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} через \mathfrak{F}^* обозначают наименьший из классов Фиттинга, содержащих \mathfrak{F} , такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс \mathfrak{F}_* определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга \mathfrak{X} , для которых $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$, то \mathfrak{F} называют *классом Локетта*.

Секцией Локетта непустого класса Фиттинга \mathfrak{F} называется множество всех таких классов Фиттинга \mathfrak{X} , что $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*$. Секцию Локетта класса Фиттинга \mathfrak{F} обозначают $\text{Locksec}(\mathfrak{F})$ [5]. *Подсекцией Локетта* класса Фиттинга \mathfrak{F} называют множество

$$\{\mathfrak{H} : \mathfrak{H} \in \text{Locksec}(\mathfrak{F}), \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\}.$$

Его обозначают $\text{Locksub}(\mathfrak{F})$.

Напомним, что класс групп \mathfrak{F} называется *гомоморфом*, если каждая фактор-группа любой группы из \mathfrak{F} принадлежит \mathfrak{F} . Гомоморф \mathfrak{H} называется *насыщенным*, если из того, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$, следует $G \in \mathfrak{H}$.

Мы будем использовать следующие известные свойства операторов Локетта, собранные в следующей лемме.

Лемма 1.1 [3, X.1.13, X.1.8(b), X.1.15]. *Если \mathfrak{F} и \mathfrak{H} — классы Фиттинга, \star и \star — операторы Локетта, то справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество непустых классов Фиттинга, то $(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i)^* = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i^*$;
- 2) [6, лемма 3] если \mathfrak{H} является насыщенным гомоморфом, то $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{H}$;
- 3) если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{H}^*$;
- 4) $(\mathfrak{F}_*)^* = (\mathfrak{F}^*)^* = \mathfrak{F}_* \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{F}_*)^*$.

Неединичный класс Фиттинга \mathfrak{F} называют *нормальным в классе Фиттинга* \mathfrak{X} (обозначают как $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$) или \mathfrak{X} -нормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и \mathfrak{F} -радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой для любой группы $G \in \mathfrak{X}$. Обозначим через \mathbb{P} множество всех простых чисел. Следующая лемма представляет известную характеристику \mathfrak{X} -нормальных классов Фиттинга.

Лемма 1.2 [4, X.3.3, X.3.7]. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) если $\mathfrak{F} \neq (1)$ — класс Фиттинга и \mathfrak{X} — класс Локетта, то $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^* \triangleleft \mathfrak{X}$;

2) если $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, то $(1) \neq \mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$ только в случае, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi$; в частности, $(1) \neq \mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}$.

Всякое отображение $h : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$ называют *функцией Хартли* или *H-функцией* [7]. Класс Фиттинга \mathfrak{F} называется *локальным*, если существует такая функция Хартли f , что $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'} \right)$, где $\pi = \text{Supp}(f) = \{p \in \mathbb{P} \mid f(p) \neq \emptyset\}$. В [8] установлено, что справедлива

Лемма 1.3. *Каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта.*

Известно, что если \mathfrak{F} — непустой класс Фиттинга и N — нормальная подгруппа группы G , то $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.

Непосредственной проверкой легко установить, что справедлива

Лемма 1.4. *Пусть \mathfrak{F}_1 и \mathfrak{F}_2 — классы Фиттинга. Тогда если \mathfrak{X} — радикальный гомоморф и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{F}_1\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$.*

2. π -Нормальные и π -максимальные классы

Напомним, что если $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} \neq (1)$ называют *нормальным в классе \mathfrak{S}_π* или просто *π -нормальным* (обозначают $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π -группы G ее \mathfrak{F} -радикал является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой группы G .

Если \mathfrak{F} — класс Фиттинга, то подгруппу V группы G называют *\mathfrak{F} -инъектором G* , если $V \cap N$ является \mathfrak{F} -максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G . Следующая лемма устанавливает связь между π -максимальными и π -нормальными классами Фиттинга и представляет самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. *Каждый π -максимальный класс Фиттинга π -нормален.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$ и \mathfrak{N}_π — класс всех нильпотентных π -групп. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Но \mathfrak{F} максимален в \mathfrak{S}_π , поэтому возможны два случая: либо $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$, либо $\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$. Рассмотрим отдельно каждый из них.

СЛУЧАЙ 1. $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. В этом случае ввиду утверждения 1 леммы 1.1 имеем $\mathfrak{F}^* = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^* = \mathfrak{S}_\pi^* \cap (\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^*$. Но класс \mathfrak{S}_π — локальный класс Фиттинга, так как он определяется H -функцией f такой, что

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_\pi, & \text{если } p \in \pi, \\ \emptyset, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

Следовательно, по лемме 1.3 \mathfrak{S}_π — класс Локетта. Кроме того, легко видеть, что класс Фиттинга \mathfrak{N}_π — насыщенный гомоморф, поэтому ввиду утверждения 2 леммы 1.1 получаем $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi$. Таким образом, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, по утверждению 3 леммы 1.1 имеем $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{S}_\pi^* = \mathfrak{S}_\pi$. Заметим также, что $\mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi$. Отсюда ввиду ассоциативности операции умножения классов Фиттинга и леммы 1.1 следует, что

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi)\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi^2 = (\mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi^2)\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi^3 = \dots = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi^n.$$

Итак, для любого натурального n справедливо равенство $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*\mathfrak{N}_\pi^n$.

Но ввиду того, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_{\pi}^n = \mathfrak{S}_{\pi}$ и класс \mathfrak{N}_{π}^n является насыщенным гомоморфом, с учетом утверждения 3 леммы 1.1 справедливы включения

$$\mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_{\pi}^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{S}_{\pi}.$$

Итак, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_{\pi}$, и по утверждению 2 леммы 1.2 $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_{\pi}$. Таким образом, в первом случае теорема верна.

СЛУЧАЙ 2. $\mathfrak{S}_{\pi} \cap \mathfrak{F} \mathfrak{N}_{\pi} = \mathfrak{S}_{\pi}$. В данном случае по утверждению 1 леммы 1.1 имеем $\mathfrak{S}_{\pi}^* \cap (\mathfrak{F} \mathfrak{N}_{\pi})^* = \mathfrak{S}_{\pi}^*$. Так как \mathfrak{S}_{π} — класс Локетта, то $\mathfrak{S}_{\pi}^* = \mathfrak{S}_{\pi}$. Кроме того, по утверждению 2 леммы 1.1 получаем $(\mathfrak{F} \mathfrak{N}_{\pi})^* = \mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_{\pi}$. Поэтому справедливо равенство

$$\mathfrak{S}_{\pi} \cap \mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_{\pi} = \mathfrak{S}_{\pi}.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{S}_{\pi} \subseteq \mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_{\pi}$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi}$, по утверждению 3 леммы 1.1 имеем $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{S}_{\pi}^* = \mathfrak{S}_{\pi}$. Ввиду того, что \mathfrak{N}_{π} — радикальный гомоморф, по лемме 1.4 $\mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi}$. Очевидно, $\mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi}$, и поэтому $\mathfrak{S}_{\pi} \mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi}$. Следовательно, $\mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_{\pi} \subseteq \mathfrak{S}_{\pi}$. Таким образом, $\mathfrak{F}^* \mathfrak{N}_{\pi} = \mathfrak{S}_{\pi}$. Последнее равенство равносильно тому, что для всех групп $G \in \mathfrak{S}_{\pi}$ справедливо $G/G_{\mathfrak{F}^*} \in \mathfrak{N}_{\pi}$.

Пусть V — \mathfrak{F}^* -инъектор группы G . Так как любая подгруппа нильпотентной группы субнормальна в ней, то $V/G_{\mathfrak{F}^*}$ — субнормальная подгруппа в $G/G_{\mathfrak{F}^*}$. Следовательно, V субнормальна в G , что влечет равенство $V = G_{\mathfrak{F}^*}$. Таким образом, подгруппа $G_{\mathfrak{F}^*}$ является \mathfrak{F}^* -максимальной в G для любой π -группы G . Поэтому \mathfrak{F}^* нормален в \mathfrak{S}_{π} . Значит, по утверждению 1 леммы 1.2 класс Фиттинга \mathfrak{F} нормален в \mathfrak{S}_{π} .

Лемма доказана.

3. π -Лаушева группа

Для доказательства критерия π -максимальности будем использовать понятие группы Лауша [9] (см. также [3, X.4.2]) и ее свойства. Напомним процедуру построения такой группы для класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi}$.

Понятие группы Лауша связано с понятием ограниченного прямого произведения (см. [2, X.4, с. 721]). Напомним, что если $\{G_{\mu}\}_{\mu \in M}$ — множество групп, то их ограниченное прямое произведение $D_M = \times_{\mu \in M} G_{\mu}$ состоит из всех таких функций $f : M \rightarrow \bigcup_{\mu \in M} G_{\mu}$ конечного носителя, что $f(\mu) \in G_{\mu}$ для всех $\mu \in M$, с групповой операцией, определенной следующим образом: $(fg)(\mu) = f(\mu)g(\mu)$. Пусть $N \subseteq M$ и $D_N = \times_{\nu \in N} G_{\nu}$. Под естественным вложением $\varepsilon_N : D_N \rightarrow D_M$ понимаем отображение, ставящее в соответствие элементу $f_0 \in D_N$ следующий элемент f из D_M :

$$f(\lambda) = \begin{cases} f_0(\lambda), & \text{если } \lambda \in N, \\ 1, & \text{если } \lambda \notin N. \end{cases}$$

Если G и H — группы, то изоморфизм $\alpha : G \rightarrow H$ называется *субнормальным* (нормальным) *вложением* G в H , если $G\alpha \triangleleft \triangleleft H$ ($G\alpha \triangleleft H$). Очевидно, что ε_N является нормальным вложением D_N в D_M . В специальном случае, когда $N = \{\nu\}$ — одноэлементное множество, полагают $G = G_{\nu}$ и используют символ ε_G для обозначения естественного вложения группы G ($= D_{\{\nu\}}$) в D_M . Следуя [3], множество всех субнормальных вложений G в H обозначим

символом $\text{Semb}(G \rightarrow H)$ и подмножество нормальных вложений — символом $\text{Nemb}(G \rightarrow H)$.

Пусть \mathfrak{E} — класс всех конечных групп. Зафиксируем множество \mathcal{E} , содержащее в точности по одному представителю из каждого класса изоморфных групп. Таким образом, для каждой группы $G \in \mathfrak{E}$ существует единственная группа $G_0 \in \mathcal{E}$ такая, что $G \cong G_0$. Определим для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}$ множество $\text{Set}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} \cap \mathcal{E}$.

Пусть \mathfrak{F} — класс Фиттинга конечных групп и $\Delta(\mathfrak{F}) = \times \{G : G \in \text{Set}(\mathfrak{F})\}$. Рассмотрим подгруппу

$$\Gamma(\mathfrak{F}) = \langle (g^{-1}\varepsilon_G)(g_\alpha\varepsilon_N) : G, H \in \text{Set}(\mathfrak{F}), g \in G, \alpha \in \text{Nemb}(G \rightarrow H) \rangle,$$

группы $\Delta(\mathfrak{F})$. Как установлено в [3, X.4.3(a)], подгруппа $\Gamma(\mathfrak{F})$ нормальна в $\Delta(\mathfrak{F})$, и коммутант $\Delta(\mathfrak{F})'$ содержится в $\Gamma(\mathfrak{F})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [3, X.4.2]. Фактор-группа $\Lambda(\mathfrak{F}) = \Delta(\mathfrak{F})/\Gamma(\mathfrak{F})$ называется группой Лауша класса Фиттинга \mathfrak{F} .

Будем использовать данную конструкцию группы Лауша для случая, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$. Такую группу назовем π -лаушевой и будем обозначать ее символом Λ_π . Таким образом, $\Lambda_\pi = \Lambda(\mathfrak{S}_\pi)$.

Ввиду того, что $\Delta(\mathfrak{F})$ — ограниченное прямое произведение конечных групп, $\Delta(\mathfrak{F})$ — группа кручения. Следовательно, с учетом X.4.3(a) из [3] (см. выше) группа Лауша класса Фиттинга \mathfrak{F} является абелевой группой кручения.

Для изложения необходимых в дальнейшем известных свойств группы Лауша класса Фиттинга \mathfrak{F} будем также использовать понятие фиттинговой пары для \mathfrak{F} . Напомним, что пара (A, d) называется *фиттинговой парой* для \mathfrak{F} (или *\mathfrak{F} -фиттинговой парой*), если A — абелева группа (в общем случае бесконечная) и $d : \text{Set}(\mathfrak{F}) \rightarrow \{\text{Hom}(G, A) : G \in \text{Set}(\mathfrak{F})\}$ — отображение с тем свойством, что образ d_G для всех $G \in \text{Set}(\mathfrak{F})$ является гомоморфизмом G в A , удовлетворяющим следующим двум условиям.

FP1. $d_G = \alpha \circ d_H$ для всех $G, H \in \text{Set}(\mathfrak{F})$ и для всех нормальных вложений $\alpha : G \rightarrow H$.

FP2. $A = \{gd_G : G \in \text{Set}(\mathfrak{F}), g \in G\}$.

\mathfrak{F} -фиттингова пара (Λ, δ) называется *универсальной*, если для любой \mathfrak{F} -фиттинговой пары (A, d) существует гомоморфизм $\varphi : \Lambda \rightarrow A$ такой, что $d_G = \delta_G \circ \varphi$ для всех групп $G \in \text{Set}(\mathfrak{F})$.

Лемма 3.2 [3, X.4.5(i)]. Пусть \mathfrak{X} — D_0 -замкнутый подкласс класса Фиттинга \mathfrak{F} и $\Xi(\mathfrak{X}) = \{gd_G : g \in G \in \text{Set}(\mathfrak{X})\}$. Тогда $\Xi(\mathfrak{X})$ является подгруппой группы Лауша $\Lambda(\mathfrak{F})$.

Лемма 3.3 [3, X.4.14]. Пусть Λ_π — π -лаушева группа. Пусть $\Xi(\mathfrak{X}) = \{x\delta_X : x \in X \in \text{Set}(\mathfrak{X})\}$ для $\mathfrak{X} \in \text{Locksub}(\mathfrak{S}_\pi)$ — подмножество Λ_π . Тогда отображение

$$\Xi : \mathfrak{X} \rightarrow \Xi(\mathfrak{X})$$

является решеточным изоморфизмом между решеткой π -нормальных классов Фиттинга и решеткой подгрупп π -лаушевой группы Λ_π .

Лемма 3.4 [3, X.4.15]. Пусть \mathfrak{F} — некоторый класс Фиттинга π -групп и S — подгруппа группы Лауша Λ_π , а \mathfrak{G} — определенный единственным образом класс Фиттинга в подсекции Локетта $\text{Locksub}(\mathfrak{F})$ такой, что $\Xi(\mathfrak{G}) = S$. Если $G \in \text{Set}(\mathfrak{F})$, то $G_{\mathfrak{G}} = \{g \in G : g\delta_G \in S\}$.

4. Критерий π -максимальности

Теорема 4.1. Пусть π — непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}_\pi$ — класс Фиттинга. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) \mathfrak{F} π -максимален;
- (2) существует простое число $p \in \pi$ такое, что $|G : G_{\mathfrak{F}}| \in \{1, p\}$ для всех групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$.

Доказательство. (1) \implies (2). Пусть $\Xi(\mathfrak{F}) = \{x\delta_X : x \in X \in \text{Set}(\mathfrak{F})\}$. Тогда по лемме 3.2 группа $\Xi(\mathfrak{F})$ является подгруппой π -лаушевой группы Λ_π . Заметим, что ввиду утверждения X.4.3(a) из [3] Λ_π — абелева группа.

Так как $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$, по лемме 2.1 $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.2 имеем $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}_\pi^*$, поэтому $\mathfrak{F} \in \text{Locksec}(\mathfrak{S}_\pi)$. Если класс Фиттинга \mathfrak{X} содержится в $\text{Locksec}(\mathfrak{S}_\pi)$, то $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{S}_\pi$. Тогда из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^*$ получаем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X} \in \text{Locksub}(\mathfrak{S}_\pi)$. Следовательно, $\text{Locksec}(\mathfrak{S}_\pi) = \text{Locksub}(\mathfrak{S}_\pi)$. Таким образом, по лемме 3.3 существует решеточный изоморфизм между π -нормальными классами и подгруппами группы Лауша Λ_π . Из π -максимальности \mathfrak{F} по лемме 3.3 следует, что $\Xi(\mathfrak{F})$ — максимальная подгруппа π -лаушевой группы Λ_π . Но так как Λ_π — группа кручения, то $\Lambda_\pi/\Xi(\mathfrak{F}) \cong Z_p$ для некоторого $p \in \pi$. Тогда из леммы 3.4 следует, что для всех групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$ фактор-группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\Lambda_\pi/\Xi(\mathfrak{F})$.

Но $\Lambda_\pi/\Xi(\mathfrak{F})$ — группа простого порядка p . Следовательно, либо $G/G_{\mathfrak{F}} = \Lambda/\Xi(\mathfrak{F}) \cong Z_p$, либо $G = G_{\mathfrak{F}}$. Отсюда вытекает, что $|G/G_{\mathfrak{F}}| \in \{1, p\}$ для любой группы $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Это доказывает (2).

(2) \implies (1). Предположим, что класс Фиттинга \mathfrak{F} не максимален в \mathfrak{S}_π . Тогда существует такой класс Фиттинга \mathfrak{M} , что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}_\pi$.

Пусть G и H — группы из классов $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}_\pi \setminus \mathfrak{M}$ соответственно. Так как по условию для любой π -группы ее индекс по \mathfrak{F} -радикалу равен простому числу $p \in \pi$, то $|G/G_{\mathfrak{F}}| = |H/H_{\mathfrak{F}}| = p$. Но $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$. Значит, $H_{\mathfrak{F}} \leq H_{\mathfrak{M}}$.

Из того, что $|H/H_{\mathfrak{F}}| = p$, следует, что $H_{\mathfrak{F}}$ — максимальная нормальная подгруппа группы H . Следовательно, ввиду $H_{\mathfrak{F}} \leq H_{\mathfrak{M}}$ получаем, что либо $H_{\mathfrak{M}} = H$, либо $H_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{M}}$. Если $H_{\mathfrak{M}} = H$, то $H \in \mathfrak{M}$; получаем противоречие с выбором группы H .

Следовательно, справедливо равенство

$$H_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{M}}. \quad (4.1.1)$$

Пусть $T = G \times H$. Если предположить, что $T \in \mathfrak{M}$, то из того, что $H \triangleleft T$, следует, что $H \in \mathfrak{M}$, что невозможно ввиду выбора H . Значит, $T_{\mathfrak{M}} < T$.

Так как $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$, имеем $(T_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{F}} = T_{\mathfrak{M}} \cap T_{\mathfrak{F}} = T_{\mathfrak{F}}$.

Заметим, что $T_{\mathfrak{M}} = G \times H_{\mathfrak{M}}$. Пусть $T_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{F}$. Тогда из $G \triangleleft T_{\mathfrak{M}}$ получаем $G \in \mathfrak{F}$. Последнее противоречит выбору группы G .

Следовательно, $T_{\mathfrak{M}} \notin \mathfrak{F}$ и

$$(T_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{F}} = T_{\mathfrak{F}} < T_{\mathfrak{M}}. \quad (4.1.2)$$

С другой стороны, ввиду (4.1.1) имеем $H_{\mathfrak{F}} = H_{\mathfrak{M}}$. Тем самым $T_{\mathfrak{M}} = G \times H_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{F}$ и $G \triangleleft T_{\mathfrak{M}}$.

Поэтому $T_{\mathfrak{M}} \leq T_{\mathfrak{F}}$. Последнее противоречит равенству (4.1.2). Значит, $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{S}_\pi$.

Теорема доказана.

В случае $\pi = \mathbb{P}$ получаем

Следствие 4.2 [3, теорема X.4.26]. Пусть \mathfrak{F} — класс Фиттинга. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (i) \mathfrak{F} максимален в классе всех конечных разрешимых групп \mathfrak{S} ;
- (ii) существует такое простое p , что $|G : G_{\mathfrak{F}}| \in \{1, p\}$ для всех групп $G \in \mathfrak{S}$.

5. Примеры

5.1. Процедура построения первого примера в идейном плане восходит к известным результатам Блессеноля и Гашюца [10], относящимся к конструированию разрешимых нормальных классов Фиттинга, и состоит в построении специальной фиттинговой пары для \mathfrak{F} .

Пусть $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $p \in \pi$ — фиксированное простое число, A — циклическая группа порядка $p - 1$ и G — любая группа из класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Обозначим через \mathcal{L} некоторый главный ряд группы G . Пусть $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_r\}$ — множество всех главных p -факторов группы G и $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Тогда каждый элемент $g \in G$ индуцирует автоморфизм α_g на M_i ($i = 1, 2, \dots, r$). Пусть $n = \dim(M_i)$ и m — отображение группы автоморфизмов $A(M_i)$ группы M_i в группу невырожденных матриц $GL(M_i)$ порядка n с элементами a_{ij} , принадлежащими полю Галуа F_p , т. е. $\alpha_g m = \|a_{ij}\|$. Пусть теперь h — отображение группы $GL(M_i)$ в мультипликативную группу F_p^* поля F_p такое, что

$$\|a_{ij}\|h = \det \|a_{ij}\|.$$

Легко видеть, что h — гомоморфизм, поэтому произведение $d = mh$ является гомоморфизмом группы $A(M_i)$ в $A = F_p^*$. Итак,

$$\alpha_g mh = \alpha_g d = \det \|a_{ij}\|.$$

Пусть $\alpha_g d = d_G^p(g)$ и $d_G^p(g) = \prod_{i=1}^r d_i^p(g)$ для всех $g \in G$.

Если $\mathcal{M} = \emptyset$, то положим $d_G^p(g) = 1$. Нетрудно заметить, что отображение $d_G^p : G \rightarrow A$ — гомоморфизм.

Пусть теперь $p = 3$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что пара (A, d) , где $A = F_3^*$ и $d : \mathfrak{F} \rightarrow \bigcup \{\text{Hom}(G, A)\}$, удовлетворяет условию FP1 определения фиттинговой пары для \mathfrak{F} . Пусть $\mathfrak{M} = (G \in \mathfrak{F} : d_G^3(G) = 1)$. Тогда, применяя теорему IX.2.11 из [3], получаем, что \mathfrak{M} — класс Фиттинга и $G_{\mathfrak{M}} = \text{Ker}(d_G)$. Теперь максимальность \mathfrak{M} в \mathfrak{F} вытекает из теоремы 4.1, так как $|A| = 2$ и по утверждению IX.4.2(b) из [3] получаем $|G/G_{\mathfrak{M}}| \in \{1, 2\}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

5.2. Пусть $3 \in \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$. Тогда класс групп $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ определим следующим образом: $G \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда G действует на своих элементах порядка 3^n как группа четных подстановок (n произвольное натуральное). Ввиду результата Каминьы [11] получаем, что \mathfrak{M} — класс Фиттинга индекса 2 в классе \mathfrak{F} , т. е. $|G/G_{\mathfrak{M}}| \in \{1, 2\}$ для всех групп G из \mathfrak{F} , и $\mathfrak{M} < \mathfrak{F}$ по теореме 4.1.

В заключение заметим, что ввиду произвольности выбора натурального n в локальном классе Фиттинга \mathfrak{S}_π существует счетное множество максимальных подклассов Фиттинга.

6. Приложения

6.1. Существование ненормальных π -максимальных подклассов. Херцфельд [12] и А. Н. Скибой (см. [13, пример 19.1]) показано, что каждая неединичная локальная формация не имеет максимальных по включению

подформаций. Проблема существования максимальных подклассов Фиттинга в минимальном нормальном классе Фиттинга сформулирована Х. Лаушем в [14, вопрос 9.18] и решена отрицательно Н. Т. Воробьевым [8]. В связи с этим естествен следующий вопрос, сформулированный А. Н. Скибой.

Проблема [1, вопрос 13.50]. Пусть \mathfrak{F} — локальный класс Фиттинга. Верно ли, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в \mathfrak{F} и отличных от \mathfrak{F} , не имеет максимальных элементов?

Отрицательный ответ на указанную проблему дает

Теорема 6.1.1. В локальном классе Фиттинга \mathfrak{S}_π существуют ненормальные π -максимальные классы Фиттинга.

Доказательство. Пусть $\emptyset \subset \pi \subset \mathbb{P}$ и \mathfrak{F} — класс Фиттинга такой, что для любой π -группы G индекс $|G : G_{\mathfrak{F}}|$ принадлежит $\{1, p\}$ для некоторого простого числа $p \in \pi$. Тогда по теореме 4.1 $\mathfrak{F} < \mathfrak{S}_\pi$ (такие классы \mathfrak{F} существуют ввиду построенных выше примеров 5.1 и 5.2). Следовательно, по лемме 2.1 $\mathfrak{F} < \mathfrak{S}_\pi$. Но тогда по утверждению 2 леммы 1.2 имеем $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{S}_\pi \neq \mathfrak{S}$ и \mathfrak{F} — ненормальный класс Фиттинга.

Теорема доказана.

6.2. О классе Фиттинга с условием Локетта. Класс Фиттинга \mathfrak{F} назовем *классом Фиттинга с условием Локетта* в классе Фиттинга \mathfrak{X} или $\mathcal{L}_{\mathfrak{X}}$ -классом, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}_*$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, то \mathfrak{F} назовем просто \mathcal{L} -классом.

Ввиду результата Брайса и Косси [15] проблема построения каждого разрешимого класса Локетта \mathfrak{F} как пересечения класса Локетта и некоторого нормального класса Фиттинга эквивалентна тому, что \mathfrak{F} удовлетворяет равенству $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_*$ — условию Локетта, где \mathfrak{S}_* — минимальный по включению элемент секции Локетта класса \mathfrak{S} , т. е. \mathfrak{S}_* — минимальный нормальный класс Фиттинга. В [15] установлено, что условие Локетта выполняется для разрешимых локальных наследственных классов Фиттинга. В [6] получен общий результат: доказано, что каждый разрешимый локальный класс Фиттинга удовлетворяет условию Локетта.

До настоящего времени в теории классов Фиттинга одной из трудных остается проблема описания групп класса Фиттинга, порожденного симметрической группой из трех символов (см., например, [3, XI.3.4, с. 801]). Напомним, что если $\mathfrak{F} = \text{Fit } S_3$, где S_3 — симметрическая группа из трех символов, то

$$\text{Fit } S_3 = \cap \{ \mathfrak{X} \mid \mathfrak{X} \text{ — класс Фиттинга и } S_3 \in \mathfrak{X} \}.$$

Выделяя максимальный подкласс в $\mathfrak{F} = \text{Fit } S_3$, мы получаем новую информацию об этом классе.

Напомним, что если \mathfrak{F} и \mathfrak{H} — классы Фиттинга, то через $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ обозначают класс Фиттинга, порожденный объединением \mathfrak{F} и \mathfrak{H} .

Теорема 6.2.1. Класс Фиттинга \mathfrak{F} является \mathcal{L} -классом.

Доказательство. Покажем, что для \mathfrak{F} выполняется условие Локетта.

Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_* \vee \mathfrak{F}$, ввиду утверждения 4 леммы 1.1

$$\mathfrak{F}_* \vee (\mathfrak{F} \cap (\mathfrak{F}_*)^*) = \mathfrak{F}_* \vee (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^*) = \mathfrak{F}_* \vee \mathfrak{F}.$$

Тогда для всех групп $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}_*$, применяя следствие 2.6 (см. [16, с. 42]), имеем

$$\mathfrak{F}_* \vee \mathfrak{F} = \{ G : (G \times S_3)_{\mathfrak{F}_*} \text{ входит подпрямую в } G \times S_3 \}.$$

Итак, $(G \times S_3)_{\mathfrak{F}^*}$ входит подпрямую в $G \times S_3$ для всех групп $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^*$. Следовательно, ввиду примера 2.7.2 (см. [16, с. 42]) имеем $|G/G_{\mathfrak{F}}| = 2$. Следуя доказательству теоремы 4.1 (утверждение 2) \implies 1)), заключаем, что $\mathfrak{F}^* < \mathfrak{F}$. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ ввиду утверждений 3 и 4 леммы 1.1 вытекает, что $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{S}^*$. Следовательно, с учетом того, что $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{F}$, получаем включение $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}^* \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду $\mathfrak{F}^* < \mathfrak{F}$ справедливо одно из следующих равенств: $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}^* = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}^*$. Если выполняется первое равенство, то $\mathfrak{S}^* \supseteq \mathfrak{F}$. Это противоречит тому, что ввиду примера Камины [11] $S_3 \notin \mathfrak{S}^*$ и $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}^*$.

Таким образом, выполняется условие $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}^*$, и \mathfrak{F} — \mathcal{L} -класс.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). 13-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1995.
2. Bryce R. A., Cossey J. Maximal Fitting classes of finite soluble groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. V. 10. P. 169–175.
3. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. Воробьев Н. Т. О проблеме существования максимальных классов Фиттинга // Весник Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя П. М. Машэрава. 1997. № 4. С. 60–61.
5. Lockett F. P. The Fitting class \mathfrak{F}^* // Math. Z. 1974. Bd 137. S. 131–136.
6. Воробьев Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Мат. заметки. 1988. Т. 43, № 2. С. 161–168.
7. Воробьев Н. Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1296–1302.
8. Воробьев Н. Т. О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга // Докл. АН СССР. 1991. Т. 35, № 6. С. 485–497.
9. Lausch H. On normal Fitting classes // Math. Z. 1973. Bd 130, № 1. S. 67–72.
10. Blessenohl D., Gaschütz W. Über normale Schunk und Fittingklassen // Math. Z. 1970. Bd 148, № 1. S. 1–8.
11. Camina A. R. A note on Fitting classes // Math. Z. 1974. Bd 136, № 4. S. 351–352.
12. Hertzfeld U. C. Frattini classes of formations of finite groups // Boll. Un. Mat. Ital. 1988. V. B, N 7. P. 601–611.
13. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
14. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). 11-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО АН РАН, 1990.
15. Bryce R. A., Cossey J. A problem in the theory of normal Fitting classes // Math. Z. 1975. Bd 141, № 2. S. 99–110.
16. Cusack E. The join of two Fitting classes // Math. Z. 1979. Bd 167. S. 37–47.

Статья поступила 25 апреля 2007 г.

Савельева Наталья Валентиновна, Воробьев Николай Тимофеевич
 Витебский гос. университет им. П. М. Машерова,
 Московский пр., 33, Витебск 210038, Беларусь
 nato2000@yandex.ru, nicholas@vsu.by