Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 512.54

КЛАССИФИКАЦИЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ СВОЙСТВУ МИНИМАЛЬНОСТИ

Ш. Ли, В. Мэн

Аннотация. Для подгруппы H конечной группы G обозначим через H^G нормальное замыкание H в G. Группу G называют *PE-группой*, если каждая минимальная подгруппа X в G обладает свойством $N_G(X) \cap X^G = X$. Дана классификация конечных не-PE-групп, у которых минимальные подгруппы четного порядка являются PE-группами.

Ключевые слова: минимальная подгруппа, NE-подгруппа, PE-группа, разрешимая группа.

1. Введение

Все рассматриваемые группы конечны. Пусть $\mathscr{X}$ — класс групп. Группу G называют *$\mathscr{X}$-критической*, если $G \notin \mathscr{X}$ и каждая собственная подгруппа в G принадлежит $\mathscr{X}$. Известный пример $\mathscr{X}$-критических групп, восходящий к Ито, получается, если $\mathscr{X}$ состоит из всех p-нильпотентных групп. В этом случае $\mathscr{X}$-критическая группа является не p-нильпотентной группой, у которой все собственные (pd-) подгруппы суть p-нильпотентные группы. Назовем G *pd-группой*, если $|G|$ делится простым p, и дадим следующее

Определение 1.1. Пусть $\mathscr{X}$ — класс групп. Группу G называют *$\mathscr{X}$-полукритической относительно простого p*, если выполнены следующие условия:

(1) $G \notin \mathscr{X}$;

(2) каждая собственная pd-подгруппа в G принадлежит $\mathscr{X}$.

Как и для $\mathscr{X}$-критических групп, детальное изучение структуры $\mathscr{X}$-полукритических групп может помочь в получении информации о том, в каких ситуациях группа принадлежит $\mathscr{X}$, потому что если предположить, что pd-группа G не входит в $\mathscr{X}$, то G обладает pd-подгруппой X, являющейся $\mathscr{X}$-полукритической группой. Однако трудно определить структуру $\mathscr{X}$-полукритической группы в общем случае. Например, немногое известно о структуре не сверхразрешимых групп, у которых pd-собственные подгруппы сверхразрешимы для фиксированного простого p (случай $p = 2$ легкий). В настоящей работе изучаются $\mathscr{X}$-полукритические группы для интересного класса $\mathscr{X}$. Напомним следующие понятия из [1].

(1) Подгруппу X группы G называют *NE-подгруппой*, если $N_G(X) \cap X^G = X$, где X^G — нормальное замыкание X в G.

Supported by the Natural Science Foundation of China and the Natural Science Foundation of Guangxi autonomous region (No. 0249001).

(2) G называют *PE-группой*, если все ее подгруппы простого порядка суть NE-подгруппы.

Рассмотрим класс $\mathscr{E}$ всех PE-групп. В [1] доказано, что все PE-группы разрешимы и имеют фиттингову длину не более 3 и $\mathscr{E}$-критические группы имеют полную классификацию. Недавно Ли доказал [2], что группа G является разрешимой T-группой (разрешимой группой, в которой нормальность транзитивна) тогда и только тогда, когда каждая подгруппа (циклическая подгруппа) в G является NE-подгруппой. С учетом теоремы Фейта — Томсона все группы нечетного порядка разрешимы, так что изучение $\mathscr{E}$-полукритических групп при $p = 2$ представляет особый интерес.

Напомним утверждения о $\mathscr{E}$-критических группах, необходимые для нашей основной теоремы.

Теорема 1.2 [3]. *Пусть G — $\mathscr{E}$-критическая группа порядка степени простого числа. Тогда G — минимальная не PN-группа (группа, минимальные подгруппы которой нормальны) и G может быть одного из трех типов:*

(a) *G — диэдральная группа порядка 8;*

(b) *$G = \langle a, x : a^{p^n} = x^p = 1$ и $x^{-1}ax = a^{1+p^{n-1}}\rangle$, p нечетное простое;*

(c) *$G = \langle a, b, x : a^{p^n} = b^p = x^p = 1$ для некоторого простого p, $[x, a] = b$ и $[a, b] = [b, x] = 1\rangle$ (т. е. $G = M\langle x\rangle$, где $M = \langle a, b\rangle \cong Z_{p^n} \times Z_p$, $[a, x] = b$ и $[x, b] = 1$).*

Теорема 1.3 [1, теорема 2]. *Пусть G — $\mathscr{E}$-критическая группа с $|\pi(G)| \geq 2$. Тогда $G = PQ$, где $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$, $p < q$, и G может быть одного из трех типов:*

(a) *$G = PQ$ сверхразрешима, где P циклическая и Q элементарная абелева порядка q^2;*

(b) *$G = PQ$ — минимальная не нильпотентная группа с $P \lhd G$, P элементарная абелева и Q циклическая или P — ультраспециальная 2-группа и $|Q| = q$;*

(c) *$G = PQ$ — минимальная не сверхразрешимая группа с $Q \lhd G$, Q — элементарная абелева q-группа порядка $> q$, P циклическая и неприводима на Q.*

Основная теорема. *Пусть G — $\mathscr{E}$-полукритическая группа для $p = 2$ или четного порядка. Тогда G разрешима, $|\pi(G)| \leq 3$ и имеет место одно из утверждений:*

(a) *G — минимальная не PE-группа;*

(b) *$G = T \times M$, $|T| = 2$ и M — минимальная не PE-группа нечетного порядка;*

(c) *$G = TM$, $|T| = 2$, $M = PQ$ — минимальная не PE-группа и*

(c-1) *P — циклическая p-группа с $[T, P] = 1$,*

(c-2) *Q нормальная элементарная абелева с $C_Q(T) = 1$,*

где P и Q — силовские p- и q-подгруппы соответственно, p и q — различные нечетные простые числа.

Следствие. *Пусть G — $\mathscr{E}$-полукритическая группа для $p = 2$. Если $|G|$ делится на 4, то G — $\mathscr{E}$-критическая группа.*

Все необъясняемые термины стандартны. Через $[H]K$ будем обозначать расщепляемое расширение нормальной подгруппы H посредством K. Через $\pi(G)$ мы обозначаем множество простых делителей $|G|$.

2. Предварительные сведения

Ввиду того, что основная теорема не является непосредственным следствием из [1], мы дадим полное ее доказательство, хотя оно отчасти похоже на доказательство из [1]. Прежде всего легко заметить, что если X — NE-подгруппа в G и $X \leq M \leq G$, то X также NE-подгруппа в M. Кроме того, нам потребуются некоторые утверждения относительно NE-подгрупп.

Лемма 2.1 [1]. *Пусть X — подгруппа в G порядка степени простого числа. Тогда X — NE-подгруппа в G в том и только в том случае, если существует подгруппа H, содержащая X в G, такая, что $X = N_G(X) \cap H$ и $G = N_G(X)H$.*

Лемма 2.2 [1]. *Пусть $G = AB$, где $A \leq G$ и $B \leq G$. Если X — NE-подгруппа в B и A нормализует X, то X — NE-подгруппа в G.*

Лемма 2.3 [1]. *Если X — NE-подгруппа в G и X субнормальна в G, то X нормальна в G.*

Лемма 2.4 [1]. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка G. Предположим, что силовская p-подгруппа в G абелева и каждая подгруппа в G порядка p является NE-подгруппой в G. Тогда G p-нильпотентна.*

Лемма 2.5 [1]. *PE-группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда G 2-нильпотентна.*

Лемма 2.6 [1]. *Пусть G — PE-группа и X — минимальная подгруппа в G. Тогда выполнены следующие утверждения:*

(a) *если $|X| = p$, где p — наименьший простой делитель $|G|$, то X нормализует p-дополнение в G;*

(b) *если $|X| = q$, где q — наибольший простой делитель $|G|$, то $X \lhd G$.*

Лемма 2.7 [4]. *Если G обладает автоморфизмом порядка 2 без неподвижных точек, то G абелева.*

Лемма 2.8. *Предположим, что циклические подгруппы в G порядка p нормальны в G для фиксированного простого p. Если $|Z(G)|_p \neq 1$, то все элементы порядка p в G лежат в $Z(G)$.*

Доказательство. Пусть x — элемент порядка p в $Z(G)$. Пусть $Y = \langle y \rangle$ — подгруппа порядка p в G. Согласно предположению Y нормальна в G. Для любого $a \in G$ имеем $(xy)^a = x^a y^a = xy^a$. С другой стороны, $\langle xy \rangle$ является также подгруппой порядка p, тем самым нормальна в G по предположению. Тогда $(xy)^a = (xy)^i = x^i y^i$. Следовательно, $xy^a = x^i y^i$ и $x = x^i$, $y^a = y^i$. Так как x порядка p, имеем $i \equiv 1 (\bmod p)$. Но тогда ввиду того, что y также порядка p, заключаем, что $y^a = y$. Отсюда $y \in Z(G)$. Лемма доказана. □

3. Доказательство основной теоремы

Мы докажем основную теорему, доказав теоремы 3.1–3.5 из данного раздела.

Теорема 3.1. *Пусть G — конечная группа. Предположим, что каждая собственная подгруппа четного порядка является PE-группой. Тогда G разрешима.*

Доказательство. Допустим, что G неразрешима, тем самым G не может быть минимальной не PE-группой, ибо каждая минимальная не PE-группа разрешима (см. теорему 1 в [1]). Тогда согласно предположению существует максимальная подгруппа M нечетного порядка в G, которая является не PE-группой. Отсюда $2 \notin \pi(\Phi(G))$, где $\Phi(G)$ — фраттиниева подгруппа в G. По теореме Фейта — Томпсона о разрешимости группы нечетного порядка M разрешима, следовательно, все собственные подгруппы в G разрешимы, так что $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа.

(1) $\Phi(G) = Z(G)$.

Пусть M — максимальная подгруппа в G, содержащая силовскую 2-подгруппу в G. Тогда $\Phi(G) \leq M$ и $\langle M, M^g : g \in G\rangle = G$. Пусть $P \in \mathrm{Syl}_p(\Phi(G))$, где p — простой делитель $|\Phi(G)|$. Тогда $P \lhd G$. Согласно предположениям каждая собственная подгруппа четного порядка в G является PE-группой, следовательно, каждая циклическая подгруппа H порядка p в P нормальна в M^g для любого $g \in G$ по лемме 2.3, откуда H нормальна в G. Пусть $P_1 \in \mathrm{Syl}_p(G)$, тогда $H \leq Z(P_1)$, т. е. $P_1 \leq C_G(H) \trianglelefteq N_G(H) = G$. Так как $G/\Phi(G)$ простая, то H лежит в центре $Z(G)$. Рассмотрим подгруппу $K = TP$, где $T \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Применяя лемму Ито [5, IV, 5.5], видим, что K p-нильпотентна, тем самым K нильпотентна. Тогда $T \leq C_G(P) \lhd G$. Вновь используя простоту $G/\Phi(G)$, получаем, что $P \leq Z(G)$, значит, $\Phi(G) \leq Z(G)$. С другой стороны, $Z(G) \leq \Phi(G)$, поэтому $\Phi(G) = Z(G)$. Это доказывает (1).

Классификация всех минимальных простых групп дана Томпсоном в [6]. К ним относятся:

(i) $PSL(3,3)$;

(ii) группа Сузуки $S_z(2^f)$, где f нечетное простое;

(iii) $PSL(2,p)$, где p простое такое, что $p > 3$ и $p^2 \neq 1 (\bmod 5)$;

(iv) $PSL(2,2^f)$, где f простое;

(v) $PSL(2,3^f)$, где f нечетное простое.

Используя этот результат, покажем

(2) $\Phi(G) = 1$, т. е. G — минимальная простая группа.

Ввиду (1) $G/Z(G) = G/\Phi(G)$, так что G — квазипростая группа с центром нечетного порядка. Для доказательства того, что $\Phi(G) = 1$, т. е. $Z(G) = 1$, достаточно показать, что мультипликатор Шура каждой минимальной простой группы является 2-группой. Действительно, это вытекает из таблицы множителей Шура известных простых групп [4, с. 302].

(3) Каждая подгруппа порядка $2^n p$ (p простое нечетное) в G 2-нильпотентна.

Пусть H — не 2-нильпотентная подгруппа порядка $2^n p$ в G. Тогда H содержит минимальную не 2-нильпотентную подгруппу D порядка $2^m p$ для некоторого m. По теореме Ито [5, IV. 5.4] $D = [T]P$ — минимальная не нильпотентная группа с нормальной силовской 2-подгруппой T и $|P| = p$. Так как ввиду предположения G неразрешима, D является собственной подгруппой в G, значит, D — PE-группа с учетом предположения. Применяя лемму 2.4, находим, что T не может быть абелевой и тем самым $T' > 1$. Итак, $P < T'P = N_D(P) < D$. Полагая, что P — NE-подгруппа в D, придем к тому, что $P = N_D(P) \cap P^D = N_D(P) \cap D = N_D(P) > P$; противоречие. Тем самым (3) доказано.

Наконец, используя (3), докажем, что ни одна из простых групп указанных выше пяти классов не может быть изоморфной G. Тогда придем к противоречию, и доказательство разрешимости G будет завершено.

В самом деле, каждая из групп $PSL(2,p)$, $PSL(2,3^f)$ и $PSL(3,3)$ содержит подгруппу, изоморфную A_4, знакопеременной группе порядка 4, и в силу (3) заключаем, что G не может совпадать ни с одной из групп $PSL(2,p)$, $PSL(2,3^f)$ и $PSL(3,3)$.

Предположим, что $G \cong PSL(2,2^f)$ или $S_z(2^f)$. Тогда G — группа Цассенхауза нечетного порядка и стабилизатор точки является фробениусовой группой с 2-группой в качестве ядра. Тем самым G не может также совпадать ни с одной из $PSL(2,2^f)$ и $S_z(2^f)$. Доказательство закончено. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть G — не PE-группа четного порядка. Допустим, что каждая собственная подгруппа четного порядка является PE-группой. Тогда $|\pi(G)| \leq 3$.*

Доказательство. Предположим, что

$$\pi(G) = \{p_1 = 2, p_2, \dots, p_r\}, \quad p_1 < p_2 < \ldots < p_r \text{ и } r \geq 4.$$

Так как мы доказали, что G разрешима, она обладает силовской системой

$$\{P_1, P_2, \dots, P_r\} \text{ с } P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

G — не минимальная не PE-группа по теореме 2 из [1]. Следовательно, существует максимальная подгруппа M в G, не являющаяся PE-группой. Согласно предположениям M неабелева нечетного порядка. Более того, так как G по теореме 3.1 разрешима, M — холлова $2'$-подгруппа. Не уменьшая общности, можно считать, что $M = P_2P_3 \ldots P_r$. Поскольку M — не PE-группа, в M должна быть минимальная подгруппа X такая, что X не является NE-подгруппой в M. Допустим, что $X \leq P_r$. Для каждого $i \in \{2, 3, \dots, r-1\}$ группа $P_1P_iP_r$ — собственная подгруппа четного порядка в G, так что $P_1P_iP_r$ — PE-группа по предположению. X нормальна в $P_1P_iP_r$, поэтому по лемме 2.6(b) нормальна в M; противоречие. Значит, можно предположить, что

$$X \leq P_k \text{ для некоторого фиксированного } k \in \{1, 2, \dots, r-1\}.$$

(1) $k = 2$, т. е. $X \leq P_2$.

Пусть $k > 2$. Рассмотрим подгруппы $A = \prod\limits_{i=2}^{k} P_i$ и $B = \prod\limits_{i=k}^{r} P_i$. Имеем $M = AB$ с $X \leq B < M$. Очевидно, P_1A и P_1B суть собственные подгруппы четного порядка в G, а значит, PE-группы по предположению. Тем самым X — NE-подгруппа в B и по лемме 2.6(b) A нормализует X. Из леммы 2.2 вытекает, что X — NE-подгруппа в M; противоречие.

(2)$X = P_2$ и M имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.

Очевидно, $P_1P_2P_i$ для любого $i \in \{3, \dots, r\}$ является собственной подгруппой четного порядка в G и тем самым PE-группой для любого $i \geq 3$ по предположению. Отсюда по лемме 2.6(b) X нормализуют P_i, $i = 3, \dots, r$. Если $X < P_2$, то $B = X \prod\limits_{i=3}^{r} P_i$ — собственная подгруппа в M и $M = P_2B$. Поскольку P_1P_2 — собственная подгруппа четного порядка в G, она PE-группа по предположению. По лемме 2.6(b) P_1 нормализует X. Тем самым $P_1B = P_1X \prod\limits_{i=3}^{r} P_i$ —

собственная подгруппа четного порядка в G. Согласно предположению P_1B — PE-группа. Отсюда X — NE-подгруппа в B. Так как $M = P_2B = N_M(X)B$, получаем, что X — NE-подгруппа в M по лемме 2.2; противоречие. Следовательно, $X = P_2$ и M p_2-нильпотентна, т. е. подгруппа $C = \prod_{i=3}^{r} P_i$ нормальна в M. Кроме того, C сверхразрешима по лемме 2.5. Это показывает, что M имеет силовскую башню.

(3) $p_i \nmid |N_M(X)|$ для каждого $i \in \{3, \dots, r\}$; противоречие.

В ином случае можно считать, что для некоторого фиксированного $l \in \{3, \dots, r\}$ будет $p_l \mid |N_M(X)|$, но $p_i \nmid |N_M(X)|$, $i = 3, \dots, l-1$. Пусть $H = P_2P_3 \dots P_l$. Согласно (2) имеем

$$N_H(X) = C_H(X) = XC_{P_l}(X) > X.$$

Положим $K = P_2P_l = XP_l$ и $C = C_{P_l}(X) > 1$. Тогда согласно предположению K — PE-группа, так что $X = N_K(X) \cap X^K$. Если $N_K(X) < K$, то X^K — фробениусова группа с дополнением X. Пусть $U > 1$ — ядро X^K. Тогда $K = N_K(X)U = XCU$. Тем самым $P_l = CU$, $C \cap U = 1$, X централизует $C \neq 1$ и действует без неподвижных точек на $U > 1$. Поскольку $K = XP_l$ — PE-группа, любая подгруппа в P_l порядка p_l нормальна в K по лемме 2.6(b). Пусть $C_1 \leq C$ и $U_1 \leq U$ обе порядка p_l. Тогда C_1U_1 — элементарная абелева группа порядка p_l^2, X централизует C_1 и действует нетривиально на U_1. Отсюда C_1 и U_1 — лишь подгруппы в C_1U_1 порядка p_l, нормализуемые X. Однако это противоречит тому факту, что подгруппа порядка p_l в P_l нормальна в H. Это доказывает, что $N_K(X) = K = XP_l$. Пусть теперь B — холлова p_l'-подгруппа в M, содержащая X. Тогда $M = P_lB = N_M(X)B$ с $X \leq B < G$. Применение леммы 2.2 завершает доказательство теоремы. □

Теорема 3.3. *Пусть G не PE-группа четного порядка. Предположим, что каждая собственная подгруппа четного порядка является PE-группой. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(1) *G — минимальная не PE-группа;*

(2) *$|G|_2 = 2$, т. е. силовская 2-подгруппа в G имеет порядок 2.*

Доказательство. Допустим, что G не является минимальной не PE-группой, т. е. существует максимальная подгруппа M в G, не являющаяся PE-группой. По предположению M должна быть нечетного порядка и неабелевой. Более того, так как G разрешима по теореме 3.1, то M — холлова $2'$-подгруппа в G. Пусть теперь T — силовская 2-подгруппа в G. Покажем, что $|T| = 2$.

(1) Если $O_2(G) \neq 1$, то $|G|_2 = 2$.

Для любой циклической подгруппы C в M, очевидно, $O_2(G)C$ — собственная подгруппа в G, значит, PE-группа. Пусть N — циклическая подгруппа в $O_2(G)$ порядка 2. Тогда N субнормальна в $O_2(G)C$, следовательно, по лемме 2.3 нормальна в $O_2(G)C$. Иначе говоря, все циклические подгруппы в M нормализуют N. Тем самым NM — подгруппа в G. Поскольку M — максимальная подгруппа в G, имеем $NM = G$, откуда $|G|_2 = |N| = 2$, что и требовалось.

(2) Если $O_2(G) = 1$, то также $|G|_2 = 2$.

Пусть H — наибольшая нормальная 2-нильпотентная подгруппа, так что $H = O_{2',2}(G)$. Ввиду того, что $O_2(G) = 1$, имеем $O_{2'}(G) \neq 1$ (иначе $G = 1$, тривиальный случай). Тем самым $1 < O_{2'}(G) \leq M$. Если $O_{2'}(G) = M$, то максимальная подгруппа M нормальна в G, так что $|G : M| = |T| = 2$. Рассмотрим случай $O_{2'}(G) < M$. Так как M — максимальная подгруппа в G нечетного порядка, имеем $HM = G$, следовательно, $T \leq H$. Вновь используя то, что $O_2(G) = 1$, выводим, что $N_G(T) < G$. Итак, по предположению $N_G(T)$ — PE-подгруппа. Пусть $T_0 \leq T$ — подгруппа порядка 2. Тогда T_0 — NE-подгруппа в $N_G(T)$, субнормальная в $N_G(T)$, откуда T_0 нормальна в $N_G(T)$ по лемме 2.3. Пусть C — холлова $2'$-подгруппа в $N_G(T)$. Тогда T_0C — подгруппа. Так как $H \trianglelefteq G$ и $T \leq H$, по аргументу Фраттини

$$G = N_G(T)H = N_G(T)O_{2'}(G) = (TC)O_{2'}(G) = T(CO_{2'}(G)).$$

Отсюда $CO_{2'}(G) = M$ — холлова $2'$-подгруппа в G, тем самым она максимальная подгруппа в G. Более того,

$$(T_0C)O_{2'}(G) = T_0(CO_{2'}(G)) = T_0M > M,$$

откуда $T_0M = G$, ибо M — максимальная подгруппа в G. Следовательно, $T_0 = T$, что и требовалось. $\square$

Теорема 3.4. *Пусть $G = TP$, где T — подгруппа порядка 2 и P — подгруппа порядка p^n (p простое нечетное). Допустим, что каждая собственная подгруппа в G четного порядка является PE-группой. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(a) *$G = T \times P$;*

(b) *P — нормальная абелева подгруппа в G.*

Доказательство. Допустим, что G не нильпотентна. По известной теорема P нормальна в G и G сверхразрешима. Тем самым T действует на P сопряжениями. Очевидно, $\Phi(P)$ — T-инвариант, где $\Phi(P)$ — фраттиниева подгруппа в P, и T действует на $P/\Phi(P)$. По теореме о полной приводимости

$$P/\Phi(P) = V_1/\Phi(P) \times V_2/\Phi(P) \times \ldots \times V_d/\Phi(P),$$

все фактор-группы $V_i/\Phi(P)$ T-инвариантны и имеют порядок p. Положим

$$P_i = \prod_{j \neq i} V_j.$$

Тогда P_i — максимальная подгруппа в P, которая T-инвариантна. По предположению все подгруппы TP_i являются PE-группами. Применяя лемму 2.3, находим, что все циклические группы порядка p в P_i нормальны в TP_i.

Если существует P_i такая, что $C_{P_i}(T) \neq 1$, то найдется элемент z порядка p в $C_{P_i}(T)$. Этот z должен быть в $Z(TP_i)$. По лемме 2.8 все элементы порядка p в P_i лежат в $Z(TP_i)$, поэтому подгруппа TP_i p-нильпотентна по лемме Ито [5, IV, 5.5], а именно $T \trianglelefteq TP_i$. Итак, $TP_i = T \times P_i$, поскольку P нормальна в G. В частности, $[T, \Phi(P)] \leq [T, P_i] = 1$. Ввиду того, что $\Phi(P) \leq P_j$ выполняется для всех j, получаем $\Phi(P) \leq C_{P_j}(T)$ для $j = 1, 2, \ldots, d$. Вновь применяя лемму 2.8, видим, что $[T, P_j] = 1$ для всех j, так что $[T, P] = 1$, следовательно, G нильпотентна, а это противоречит предположению. Теперь известно, что $C_{P_i}(T) = 1$ для всех i. По лемме 2.7 заключаем, что все P_i абелевы.

Допустим, что $C_P(T) \neq 1$, иначе P абелева по лемме 2.7. Тогда $C_P(T) \cap P_i = 1$ ввиду предыдущего. Следовательно, $C_P(T)$ порядка p. Положим $V = C_P(T)\Phi(P)$. Тогда V T-инвариантна и $V < P$, так что TV — собственная подгруппа четного порядка. TV является PE-группой по предположению. Согласно предыдущим рассуждениям $[T, V] = 1$, в частности, $[T, \Phi(P)] = 1$. Но $C_{P_i}(T) = 1$ согласно предыдущим заключениям; противоречие. Поэтому $C_P(T) = 1$, P — абелева группа. Доказательство закончено. $\square$

Теорема 3.5. *Пусть $G = TM$, $M = PQ$, где T — подгруппа порядка 2 и P, Q суть силовские p- и q-подгруппы соответственно. Допустим, что каждая собственная подгруппа четного порядка является PE-группой. Тогда*

(1) *G — минимальная не PE-группа;*

(2) *M — минимальная не PE-группа и $G = T \times M$;*

(3) *M — минимальная не PE-группа и*

(3-1) *P — циклическая p-подгруппа с $[T, P] = 1$;*

(3-2) *Q — нормальная элементарная абелева с $C_Q(T) = 1$.*

Доказательство. Так как T — силовская 2-подгруппа в G порядка 2, то G 2-нильпотентна, так что M нормальна в G. Кроме того, G разрешима, и мы можем выбрать $\{T, P, Q\}$ в качестве силовской системы. Рассмотрим сначала случай, когда $C_M(T) = 1$. В этом случае T как автоморфизм порядка 2 в M не имеет неподвижных точек. По лемме 2.7 M абелева, откуда она PE-подгруппа и тем самым все максимальные подгруппы в G суть PE-подгруппы. Поэтому G — минимальная не PE-группа. Значит, $C_M(T) = 1$ влечет утверждение (1).

Положим

$$C_M(T) \neq 1.$$

Если p делит $|C_M(T)|$, то $C_P(T) = P$ по лемме 2.8. Если q также делит $|C_M(T)|$, то $G = T \times M$. Поэтому для любой собственной подгруппы H в M группа TH является собственной подгруппой четного порядка в G, значит, TH — PE-подгруппа, следовательно, M — минимальная не PE-группа, что приводит к утверждению (2).

Без уменьшения общности допустим, что $C_P(T) = P$ и $C_Q(T) = 1$. По лемме 2.7 Q абелева. Покажем, что Q нормальна в G. Так как TQ — собственная подгруппа четного порядка, она PE-группа по предположению. TP нормализует T. По лемме 2.2 T — NE-подгруппа в G. По определению $T = N_G(T) \cap T^G$. $T^G = T[N]$ — фробениусова группа с фробениусовым ядром N, $N \cap (TP) \leq N \cap N_G(T) = 1$, так что N — q-подгруппа, откуда $N \leq Q$. Если $N < Q$, по аргументу Фраттини $G = N_G(T)N$, поэтому q делит $|N_G(T)|$. Поскольку T порядка 2, имеем $C_G(T) = N_G(T)$, так что $C_Q(T) \neq 1$; противоречие. Значит, $N = Q$. В частности, Q нормальна в G.

Докажем, что P циклическая. Допустим, что P не циклическая. Тогда P содержит по крайней мере две различные максимальные подгруппы P_1, P_2. Значит, будут две собственные подгруппы $H_i = TP_iQ$, $i = 1, 2$. По предположению H_1 и H_2 суть PE-группы, поэтому все подгруппы порядка q в Q нормальны в H_i при $i = 1, 2$, а значит, нормальны в G. Далее, для любой подгруппы X порядка p в P имеем собственную подгруппу TXQ в G, тогда TXQ — PE-группа. Так как $G = (TXQ)P$ и $X \trianglelefteq P$, по лемме 2.2 X является NE-подгруппой в G. Наконец, T — NE-подгруппа в G. Следовательно, G должна быть PE-группой, что противоречит условию.

Допустим, что Q не является элементарной абелевой. Тогда $\Omega_1(Q) < Q$ и $\Omega_1(Q)(TP)$ — собственная подгруппа четного порядка, PE-группа по предположению. Тем самым все минимальные подгруппы в Q нормальны в $\Omega_1(Q)(TP)$ и также нормальны в G. Поскольку M не PE-группа, существует подгруппа X порядка p такая, что X не является NE-подгруппой в M, следовательно, $|P| = p$. Тогда $N_G(P) \cap P^G \neq P$. С другой стороны, известно, что $T \leq N_G(P)$ и $P^G \leq PQ$ ввиду того, что $M = PQ$ нормальна в G. Тем самым $N_G(P) > TP$, откуда $C_Q(P) \neq 1$. Значит, $\Omega_1(Q) \cap C_G(P) \neq 1$, следовательно, P централизует все элементы порядка q в Q по лемме Ито [5, IV.5.5], P нормальна в PQ, так что

PQ нильпотентна. Но тогда $M = PQ$ должна быть PE-группой; противоречие. Следовательно, Q — элементарная абелева q-подгруппа.

Докажем, наконец, что $M = PQ$ — минимальная не PE-группа. В самом деле, для любой максимальной подгруппы K в M если $|M : K|$ — степень p, то $Q \leq K$, откуда $K \trianglelefteq G$. Если $|M : K|$ — степень q, ввиду того, что Q элементарная абелева T, нормализует все подгруппы порядка q в Q, значит, T нормализует K. Тем самым TK — собственная подгруппа четного порядка в G и PE-группа по предположению, следовательно, K — PE-группа. Теорема доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Li Shirong.* On minimal non-PE-groups // J. Pure Appl. Algebra. 1998. V. 132. P. 149–158.
2. *Li Y.* Finite groups with NE-subgroups // J. Group Theory. 2006. V. 9, N 1. P. 49–58.
3. *Sastry N.* On minimal non-PN-groups // J. Algebra. 1980. V. 65. P. 104–109.
4. *Gorenstein D.* Finite simple groups. New York: Plenum Press, 1982.
5. *Huppert B.* Endliche Gruppen. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967. V. I.
6. *Thompson J. G.* Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 383–437.

Статья поступила 2 апреля 2007 г.

Shirong Li (Ли Шижун)
Department of Mathematics, Guangxi University,
Nanning, Guangxi, 530004, P.R.China
shirong@dxu.edu.cn

Wei Meng (Мэн Вэй)
College of preparatory education, Yunnan Nationalities University,
Kunming, Yunan, 650000, P.R.China
menglingweiha@163.com