Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.9

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА ОДНОГО КЛАССА ОТОБРАЖЕНИЙ

И. Н. Панкратова

Аннотация. Рассматривается динамическая система, заданная многомерным отображением с нелинейностью скалярного типа, имеющего неотрицательную матрицу специального вида. Установлен бифуркационный характер расположения в фазовом пространстве системы циклических инвариантных множеств данного отображения; определены их положение и периоды в зависимости от свойств матрицы.

Ключевые слова: отображение, линейный оператор, динамическая система, инвариантное множество.

Введение. Рассматривается динамическая система, заданная отображением $F : L^n \to L^n$ вида $Fx = \Phi(x)Ax$. Здесь L^n — n-мерное линейное нормированное пространство с нормой $\|x\| = \sum\limits_1^n |x_i|$, A — $n \times n$-матрица, $\Phi(x)$ — скалярная функция. В качестве компактного фазового пространства рассматриваемой системы выберем множество $K_a^n = \{x \in L^n \mid x \geq 0,\ \|x\| \leq a\}$, где $a > 0$ — константа, $x \geq 0$ означает $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Нетрудно показать, что множество K_a^n инвариантно в положительном направлении относительно отображения F при условиях: $A \geq 0$ ($a_{ij} \geq 0\ \forall i, j = \overline{1, n}$), $\|A\| = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n a_{ij} \leq a/\widetilde{C}$, $\Phi(x) \geq 0$ непрерывна в K_a^n и $\widetilde{C} = \max\limits_{x \in K_a^n} \Phi(x)\|x\|$.

Отображение F является обобщением логистического отображения $f : L^n \to L^n$, $fx = (1 - \|x\|)Ax$ [1], на случай замены скалярного множителя $(1 - \|x\|)$ произвольной, непрерывной в K_a^n функцией $\Phi(x) \geq 0$ и единичного симплекса $K_1^n = \{x \in L^n \mid x \geq 0,\ \|x\| \leq 1\}$ симплексом K_a^n конечного размера $a > 0$. В свою очередь, отображение f является многомерным аналогом одномерного нелинейного логистического отображения $\chi_\lambda : L^1 \to L^1$, $\chi_\lambda x = \lambda(1 - x)x$ ($n = 1$, $A \equiv \lambda$, $K_a^n \equiv I = [0, 1]$), динамика которого достаточно хорошо и полно изучена [2, 3].

1. Расположение ω-предельных множеств системы в фазовом пространстве. Будем обозначать динамическую систему, порожденную отображением F, с фазовым пространством K_a^n через $\{F^m, K_a^n, Z^+\}$ или F^m, подразумевая фиксированными множества K_a^n и $Z^+ = \{0\} \cup N$ (обозначение F^m оставим также при рассмотрении динамической системы на других инвариантных множествах из K_a^n).

Как следует из результатов работы [1], расположение нетривиальных, т. е. не равных 0, ω-предельных множеств [3, с. 7] системы $\{F^m, K_a^n, Z^+\}$ определяется свойствами линейного оператора $\mathbf{A}$, заданного матрицей $A \geq 0$, и не зависит от вида скалярной функции $\Phi(x)$. Именно, ω-предельные множества системы

$\{F^m, K_a^n, Z^+\}$ расположены в инвариантных относительно отображения F множествах, образованных пересечением с K_a^n инвариантных подпространств оператора $\mathbf{A}$, на конечном числе отрезков лучей, циклически переходящих друг в друга под действием отображения F, — *циклах отрезков лучей конечного периода.*

Действительно, для любого вектора $x \in K_a^n$ вектор $F^m x$ представим как $F^m x = \Phi^{(m)}(x) A^m x$, где $\Phi^{(m)}(x) = \prod\limits_{i=0}^{m-1} \Phi(F^i x)$. Поскольку скалярный множитель $\Phi^{(m)}(x)$ не влияет на направления векторов $\Phi^{(m)}(x) A^m x$, отсюда следует, что направления ненулевых ω-предельных векторов траектории $F^m x$ определяются направлениями векторов последовательности $A^m x$ при $m \to +\infty$, при этом таких направлений оказывается конечное число [1].

Обозначим $\operatorname{con} M \overset{\text{def}}{=} \{cx \mid x \in M,\, c \geq 0\}$, $M \subset L^n$, $\omega_F x$ — ω-предельное множество траектории $F^m x$, $x \in K_a^n$, $K^{n+} = \{x \in L^n \mid x \geq 0\}$ — неотрицательный конус векторов из L^n и $J = \operatorname{con} y \cap K_a^n$ — отрезок луча, $y \in K^{n+}$.

Определение 1 [1]. Множество $J_p = \{J_{p,1}, \ldots, J_{p,p}\} \subseteq K_a^n \subset L^n$ отображения F назовем *циклом отрезков лучей периода* $p \geq 1$, где $J_{p,i}$ — отрезок луча, если выполнены условия

$$FJ_{p,1} \subseteq J_{p,2}, \ldots, FJ_{p,p} \subseteq J_{p,1}, \quad J_{p,i} \cap J_{p,j} = \{0\}, \quad i, j \in \{1, \ldots, p\}.$$

Таким образом, инвариантные множества, содержащие ω-предельные множества системы $\{F^m, K_a^n, Z^+\}$, являются *циклами отрезков лучей конечного периода* ($p \geq 1$). При этом лучи цикла отрезков лучей J_p периода $p \geq 1$ направлены вдоль неотрицательных собственных векторов матрицы A^p, соответствующих числу λ^p, где $\lambda \geq 0$ — собственное значение матрицы A, которому соответствует единичный собственный вектор $e \geq 0$ матрицы A [1, 4]. (В [4] и [5] допущена неточность относительно числа p: поскольку период p может быть больше размерности системы n, следует полагать $p \geq 1$.)

Множество J_p при $p > 1$ согласно определению 1 может быть записано в виде

$$J_p = \{\operatorname{con} \tilde{e} \cap K_a^n, \operatorname{con} A\tilde{e} \cap K_a^n, \ldots, \operatorname{con} A^{p-1}\tilde{e} \cap K_a^n\}, \qquad (1)$$

где $\tilde{e} \in K^{n+}$ – образующий вектор ($\|\tilde{e}\| = 1$).

2. Одномерные сечения Пуанкаре и одномерные отображения последования отображения F**.** Если рассмотреть систему F^m на цикле отрезков лучей J_p периода $p \geq 1$, то оказывается, что каждый отрезок луча $J_{p,i}$, $i = \overline{1,p}$, является инвариантным относительно отображения F^p множеством (для отображения f см. [4]): каждая $(sp+1)$-я точка траектории $F^m x$, $s \in N$, расположенной на данном цикле, снова возвращается на отрезок луча, содержащий точку x. Возникают *«естественные» одномерные сечения Пуанкаре* — отрезки лучей циклов отрезков лучей конечного периода $p \geq 1$. На «естественных» одномерных сечениях Пуанкаре p-я итерация F^p, $p \in N$, отображения F является *отображением последования* и имеет одномерные представления.

Если в качестве скалярного множителя взять функцию $\Phi(\|x\|)$, то отображение F^p на цикле отрезков лучей J_p периода $p \geq 1$ представимо в виде суперпозиций одномерных отображений на каждом из отрезков лучей $J \subseteq J_p$: $F^p|_J = \phi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \phi_{\lambda_1}$, где $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_p > 0$ — некоторые числа, $\phi_\lambda y = \lambda \Phi(y) y$, $y \in I_a = [0, a]$. В частности, для многомерного логистического отображения

f имеем следующее представление: $f^p|_J = \chi_{\lambda_p} \circ \ldots \circ \chi_{\lambda_1}$ с теми же числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ на выбранном цикле отрезков лучей J_p [4].

3. Циклические инвариантные множества отображения F конечного периода. Введем в рассмотрение инвариантные множества отображения F, состоящие из циклов отрезков лучей одного и того же периода.

Вектор $x \in K_a^n$ представим в виде $x = \alpha\tilde{e}$, где $\alpha \in (0, a]$, $\|\tilde{e}\| = 1$.

Обозначим $J_1 = \operatorname{con} e \cap K_a^n$ при $\tilde{e} = e$ и J_p имеет вид (1), $p > 1$, при $\tilde{e} \neq e$.

Определение 2. Множество $M_p \subseteq K_a^n \subset L^n$ назовем *циклическим инвариантным множеством отображения F периода* $p \geq 1$, если

1) $M_1 = J_1$,

2) при $p > 1$ для любого $x \in M_p$ либо $x \in M_1$, либо $x \in J_p$.

Согласно определению 2 множество M_p при $p > 1$ состоит из одного множества M_1 и континуума циклов отрезков лучей периода p, отрезки лучей каждого из которых расположены вокруг множества M_1. Для любого $x \in M_p$ имеем $\omega_F x \subseteq J_1 = \operatorname{con} e \cap K_a^n$, если $\tilde{e} = e$, и $\omega_F x \subseteq J_p$, если $\tilde{e} \neq e$. Здесь $\omega_F x$ — ω-предельное множество траектории $F^m x$, $x \in K_a^n$.

Индекс p множества M_p обозначает период циклов отрезков лучей, из которых состоит множество M_p, $p \geq 1$, а не размерность множества.

Изучение поведения траекторий системы F^m на циклических инвариантных множествах конечного периода, содержащих все ω-предельные множества системы $\{F^m, K_a^n, Z^+\}$, дает полное представление о фазовом портрете системы $\{F^m, K_a^n, Z^+\}$, т. е. полную информацию о динамике системы F^m во всем фазовом пространстве K_a^n. Действительно, для полного описания динамики системы F^m необходимо помимо ω-предельных множеств учитывать гомоклинические траектории [2, с. 21], наличие которых в системе служит признаком хаотического характера ее динамики. Однако присутствие гомоклинической траектории влечет за собой, как правило, существование в любой ее окрестности счетного числа периодических траекторий (сколь угодно больших периодов), а также траекторий с квазислучайным поведением. Последнее означает, что все эти типы траекторий не могут располагаться вне циклических инвариантных множеств отображения F хотя бы потому, что периодические траектории сами для себя являются ω-предельными множествами. В циклических инвариантных множествах периодов $p \geq 1$ гомоклинические траектории существуют, например, у многомерного логистического отображения f на множествах M_1 (и в окрестности этих множеств на циклах отрезков лучей множеств M_p периода $p > 1$) при $\lambda > \lambda^* = 3.569\ldots$.

Более того, возможна замена объекта исследования — отображения F — отображениями последования на сечениях Пуанкаре, поскольку такая замена не приводит к потере информации об отображении F и характере его динамики, в частности, к потере информации о топологии фазовых траекторий вне сечений.

При исследовании системы $\{F^m, K_a^n, Z^+\}$ возникают сложности двойного порядка.

С одной стороны, расположение циклов отрезков лучей в фазовом пространстве K_a^n и их периоды определяются структурой матрицы A (наличием нулевых коэффициентов, их расположением в матрице и др.). Поскольку лучи цикла отрезков лучей периода $p \geq 1$ направлены вдоль неотрицательных собственных векторов матрицы A^p, то ввиду отсутствия непрерывной зависимости между коэффициентами матриц A и A^p и их собственными векторами расположение отрезков лучей, самих циклов отрезков лучей, циклических инвариантных множеств и их периоды меняются скачком при изменении коэффициентов матрицы A, т. е. налицо бифуркационный характер изменения положения и периода.

С другой стороны, для многомерного логистического отображения f, например, уже в двухпараметрическом случае отображения последования $f^2|_J = \chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ (числа λ_1, λ_2 превращаются в параметры при изучении динамики отображения f на циклических инвариантных множествах отображения f периода 2) обнаруживается нетривиальная зависимость динамики отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ от параметров λ_1, λ_2: возникают катастрофы типа сборки и складки в неподвижных точках отображения $\chi_{\lambda_2} \circ \chi_{\lambda_1}$ и большей сложности в периодических точках, прямые и обратные бифуркации удвоения периодов при изменении параметров и др. (см. [4, 5]). Многомерная система F^m оказывается, таким образом, «потенциально склонной к катастрофам», и ее динамика может описываться разными наборами параметров [6, с. 219].

Указанные особенности свидетельствуют о том, что в фазовом портрете системы F^m возможно появление нескольких типов динамики одновременно. При этом в разных частях фазового пространства K_a^n могут реализоваться противоположные типы поведения траекторий: от устойчивого до неустойчивого, от хаоса до регулярного поведения траекторий. Это свойство характерно для многомерных динамических систем [7, с. 6] и для системы F^m является результатом существования циклических инвариантных множеств разных периодов с разными наборами параметров.

Проблема изучения подобного рода систем состоит в построении единой математической теории для описания их динамики и является актуальной в настоящее время.

В данной работе решена задача определения периодов и расположения в K_a^n циклических инвариантных множеств отображения F в зависимости от свойств матрицы A.

Пусть матрица $A \geq 0$ отображения F имеет следующий специальный вид: $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_4 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}$, где A_i — матрица с неотрицательными элементами, $i = \overline{1,4}$ (такое представление выбрано для удобства изложения), A_1, A_2 — квадратные матрицы. Матрица $A \geq 0$ имеет неотрицательное максимальное собственное значение $\lambda \geq 0$, которому соответствует неотрицательный собственный вектор $e \geq 0$ [8, с. 332]. Пусть $\|e\| = 1$.

Согласно [8, с. 332] возможны несколько представлений матрицы $A \geq 0$. Рассмотрим подробнее вопрос расположения ω-предельных множеств системы F^m в этих случаях.

4. Лемма о периоде циклического инвариантного множества отображения F с неразложимой матрицей. Пусть матрица $A \geq 0$ неразложимая [8, с. 334]. Тогда $\lambda > 0$ — простое число, $e > 0$; других неотрицательных собственных векторов, кроме вектора e, матрица A не имеет.

Обозначим через h индекс импримитивности матрицы $A \geq 0$, $1 \leq h \leq n$. Существует ровно h простых собственных чисел, по модулю равных λ. Все характеристические числа матрицы A разбиваются на системы по h чисел в каждой вида $\mu, \mu\epsilon, \ldots, \mu\epsilon^{h-1}$ и в пределах каждой такой системы любым двум характеристическим числам отвечают элементарные делители соответственно одинаковых степеней [8, с. 340]. Здесь $\epsilon = \exp(2\pi i/h)$, $i = \sqrt{-1}$. При $h > 1$ матрицу A перестановкой рядов можно привести к «циклическому» виду с нулевыми квадратными матрицами вдоль диагонали [8, с. 335].

Числа λ, $\lambda\epsilon, \ldots,$ $\lambda\epsilon^{h-1}$ простые, все различны между собой и являются корнями уравнения $\xi^h - \lambda^h = 0$.

При $h = n$ мы назвали систему $\{F^m, K_a^n, Z^+\}$ *системой канонического вида*: фазовое пространство K_a^n системы F^m является циклическим инвариантным множеством отображения F периода n.

При $h < n$ пространство L^n представимо в виде прямой суммы $L^n = L^h + L^{n-h}$, где подпространство L^h отвечает собственным числам, по модулю равным λ, т. е. числам $\lambda, \lambda\epsilon, \ldots, \lambda\epsilon^{h-1}$, L^{n-h} — остальным собственным числам матрицы $A \geq 0$.

Тогда всякий вектор $x \in L^n$ запишется как $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = \mathrm{pr}_{L^h} x \in L^h$, $x_2 = \mathrm{pr}_{L^{n-h}} x \in L^{n-h}$. Здесь $\mathrm{pr}_L x$ есть проекция вектора x на подпространство L. В [1] установлено, что $L^{n-h} \cap K^{n+} = \{0\}$.

Нетрудно показать (си. также [1]), что $\lim\limits_{m\to\infty} \|A^m x_2\| / \, \|A^m x_1\| = 0$ для любого $x \geq 0$. Поэтому направления ненулевых ω-предельных векторов траекторий $F^m x$ и $F^m x_1$ совпадают и, значит, $\omega_F x = \omega_F x_1 \subset L^h \cap K_a^n$.

Вектор $x_1 = \mathrm{pr}_{L^h} x \in L^h$ запишем в виде $x_1 = \sum\limits_1^h \alpha_j e_j$, где $\alpha_1 \neq 0$, e_j — единичный собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda\epsilon^{j-1}$, т. е. $Ae_j = \lambda\epsilon^{j-1} e_j$, $j = \overline{1, h}$, $e_1 \equiv e$.

Если $\alpha_2 = \ldots = \alpha_h = 0$, то $x_1 = \alpha_1 e \parallel e$ и $Ax_1 = \lambda x_1$, т. е. x_1 — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению λ. Отсюда следует, что $A^m x = \lambda^m x$ для любого $m = 1, 2, \ldots$.

Значит, для любого $x \in K_a^n$, проекция которого $x_1 = \mathrm{pr}_{L^h} x = \alpha_1 e$, т. е. $x_1 \parallel e$, получим $\omega_F x \subseteq J_1$, где J_1 — отрезок луча вида (1) с образующим вектором e.

Если не все α_j равны нулю, $j = \overline{2, h}$, то

$$A^h x_1 = A^h \sum_1^h \alpha_j e_j = \sum_1^h \alpha_j A^h e_j = \sum_1^h \alpha_j \lambda^h \epsilon^{h(j-1)} e_j = \lambda^h \sum_1^h \alpha_j e_j = \lambda^h x_1,$$

т. е. вектор x_1 является собственным вектором матрицы A^h, отвечающим собственному значению λ^h. Более того, векторы $A^i x_1$ попарно не коллинеарны и являются собственными векторами матрицы A^h, соответствующими собственному значению λ^h, и $A^i x_1 \neq \lambda^i x_1$, $1 \leq i \leq h-1$.

Значит, для любого $x \in K_a^n$, проекция которого $x_1 = \mathrm{pr}_{L^h} x \nparallel e$, будет $\omega_F x \subseteq J_h$, где J_h — цикл отрезков лучей периода h вида (1) с образующим вектором x_1.

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Лемма. *Пусть $A \geq 0$ — неразложимая матрица индекса импримитивности h. Тогда ω-предельные множества системы $\{F^m, K_a^n, Z^+\}$ расположены в циклическом инвариантном множестве $L^h \cap K_a^n$ отображения F периода h. Для любого $x \in K_a^n$ если $x_1 = \mathrm{pr}_{L^h} x \parallel e$, то $\omega_F x \subseteq J_1 = \mathrm{con}\, e \cap K_a^n$, если $x_1 = \mathrm{pr}_{L^h} x \nparallel e$, то $\omega_F x \subseteq J_h = \left\{\mathrm{con}\, x_1 \cap K_a^n, \ldots, \mathrm{con}\, A^{h-1} x_1 \cap K_a^n \mid x_1 = \mathrm{pr}_{L^h} x \in L^h \cap K_a^n\right\}$, где $e > 0$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий максимальному собственному значению $\lambda > 0$.*

Для неразложимой примитивной матрицы $A \geq 0$ индекс импримитивности h равен 1 [8, с. 355]. Пусть $\omega(F) = \bigcup\limits_{x \in K_a^n} \omega_F x$ — множество ω-предельных множеств системы $\left\{F^m, K_a^n, Z^+\right\}$.

Следствие. *Пусть* $A \geq 0$ — *неразложимая примитивная матрица. Тогда* $\omega(F) \subseteq J_1 = \operatorname{con} e \cap K_a^n$.

5. Теоремы о периодах циклических инвариантных множеств.

I. Матрица A неразложимая. Согласно «циклическому» виду матрица $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_4 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}$ имеет индексы импримитивности, равные 2 (максимально возможный индекс импримитивности) и 1. Рассмотрим эти случаи.

I.1. Индекс импримитивности матрицы A равен 2. Матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & A_4 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}$, т. е. $A_1 = A_2 = 0$.

Собственными значениями матрицы A, по модулю равными λ, являются числа $\pm\lambda$. Согласно лемме для любого $x \in K_a^n$ имеем $\omega_F x \subset L^2 \cap K_a^n$, где подпространство L^2 отвечает числам $\pm\lambda$.

Представим вектор $x_1 \in L^2$ в виде $x_1 = \alpha_1 e + \alpha_2 e^-$, где e^- — единичный собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $-\lambda$. Тогда $\alpha_1 \neq 0$ для $x_1 \geq 0$ и либо $Ax_1 = \lambda x_1$, если $\alpha_2 = 0$, либо $A^2 x_1 = \lambda^2 x_1$, если $\alpha_2 \neq 0$.

Множество $L^2 \cap K_a^n$ является циклическим инвариантным множеством отображения F периода 2 и состоит из одного отрезка луча $J_1 = \operatorname{con} e \cap K_a^n$ и континуума циклов отрезков лучей J_2 периода 2, расположенных вокруг J_1. Для любого $x \in K_a^n$ если $x_1 = \operatorname{pr}_{L^2} x \nparallel e$, то $\omega_F x \subseteq J_2 = \{\operatorname{con} x_1 \cap K_a^n, \operatorname{con} Ax_1 \cap K_a^n \mid x_1 = \operatorname{pr}_{L^2} x \in L^2 \cap K_a^n\}$, если $x_1 = \operatorname{pr}_{L^2} x \parallel e$, то $\omega_F x \subseteq J_1 = \operatorname{con} e \cap K_a^n$.

Отметим, что полученный результат для матрицы A вида $A = \begin{pmatrix} 0 & A_4 \\ A_3 & 0 \end{pmatrix}$ полностью совпадает со скалярным случаем, когда $A_3, A_4 > 0$ — числа. Для скалярного случая $L^2 \cap K_a^2 \equiv K_a^2$ и, значит, система $\{F^m, K_a^2, Z^+\}$ является канонической: фазовое пространство K_a^2 системы F^m является циклическим инвариантным множеством отображения F периода 2, при этом x и $\omega_F x$ расположены на одном и том же цикле отрезков лучей периодов 2 или 1.

I.2. Индекс импримитивности матрицы $A \geq 0$ равен 1. Матрица является *примитивной*; перестановкой рядов ее нельзя привести к «циклическому» виду неразложимой матрицы с индексом импримитивности 2 или к нормальной разложимой форме (см. ниже). Частным случаем примитивной матрицы является матрица $A > 0$ с положительными элементами. Матрица $A \geq 0$ примитивна только тогда, когда некоторая ее степень A^p больше 0 [8, с. 355].

Для любого $x \in K_a^n$ имеем $\omega_F x \subseteq J_1 = L^1 \cap K_a^n$; отрезок луча J_1 является единственным притягивающим все траектории из K_a^n инвариантным множеством: $\omega(F) \subseteq J_1$ (см. также случай IV). Здесь подпространство L^1 отвечает числу λ.

II. Матрица A разложимая. С помощью перестановки рядов ее можно привести к нормальной форме [8, с. 351]. Матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 \end{pmatrix}$, где A_1, A_2 — неразложимые матрицы, $A_4 = 0$ (случай $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_4 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ можно свести к данному, рассмотрев отображение с транспонированной матрицей A').

Спектр матрицы A состоит из спектров блочных матриц, стоящих на главной диагонали, т. е. матриц A_1, A_2.

Такому представлению соответствует расщепление пространства L^n на координатные подпространства [8, с. 352]: $L^n = L_1 + L_2$, при этом всегда L_2 —

инвариантное координатное подпространство оператора $\mathbf{A}$, а множества, образованные пересечением с K_a^n инвариантных координатных подпространств оператора $\mathbf{A}$, т. е. $L_2 \cap K_a^n$ и $(L_1 + L_2) \cap K_a^n \equiv K_a^n$, инвариантны относительно отображения F.

Обозначим через h_j, $\lambda^{(j)} > 0$, $e^{(j)} \geq 0$ соответственно индекс импримитивности, максимальное собственное значение матрицы A_j и соответствующий ему единичный собственный вектор матрицы A, $j = 1, 2$.

Пространство L^n представим в виде прямой суммы двух инвариантных относительно оператора $\mathbf{A}$ подпространств L_1', L_2: $L^n = L_1' + L_2$, где подпространство L_1' соответствует собственным значениям матрицы A_1. Размерность координатных подпространств L_1', L_2 обозначим через n_1 и n_2 соответственно, тогда $n = n_1 + n_2$.

Пусть $\tilde{e}_j > 0$ — единичный собственный вектор матрицы A_j размерности n_j, $A_j \tilde{e}_j = \lambda^{(j)} \tilde{e}_j$, $j = 1, 2$. Так как подпространство L_2 инвариантно относительно оператора $\mathbf{A}$, то $e^{(2)} = (0, \tilde{e}_2)'$.

Отметим, что $L_1' \cap K_a^n$ и $L_2 \cap K_a^n$ ненулевые, поскольку содержат собственные векторы $e^{(j)} \geq 0$, $j = 1, 2$.

Произвольный вектор $x \in L^n$ запишем в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1'$, $x_2 = (0, \tilde{x}_2)' \in L_2$, $\tilde{x}_2$ — вектор размерности n_2. Каждое из подпространств L_1', L_2 представим в виде суммы $L_1' = L_1^{h_1} + L_1^{n_1 - h_1}$, $L_2 = L_2^{h_2} + L_2^{n_2 - h_2}$ и соответственно $x_j = x_j^{(1)} + x_j^{(2)}$, $x_j^{(1)} = \mathrm{pr}_{L_j^{h_j}} x$, $x_j^{(2)} = \mathrm{pr}_{L_j^{n_j - h_j}} x$, $x_j^{(1)} = \sum\limits_{s=1}^{h_j} \alpha_s^j e_s^j = \alpha_1^j e^{(j)} + \sum\limits_{s=2}^{h_j} \alpha_s^j e_s^j$, где подпространство $L_j^{h_j}$ отвечает собственным числам, по модулю равным $\lambda^{(j)}$, $L_j^{n_j - h_j}$ — остальным собственным числам матрицы A_j, $j = 1, 2$.

Тогда для $x \geq 0$

$$A^m x = A^m x_1 + A^m x_2 = A^m x_1^{(1)} + A^m x_1^{(2)} + A^m x_2^{(1)} + A^m x_2^{(2)},$$

где $\lim\limits_{m \to \infty} \|A^m x_j^{(2)}\| / \|A^m x_j^{(1)}\| = 0$, $j = 1, 2$. Поэтому направления ненулевых ω-предельных векторов траекторий $F^m x$ и $F^m\big(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\big)$ совпадают и, значит, $\omega_F x = \omega_F x^{(1)} \subset \big(L_1^{h_1} + L_2^{h_2}\big) \cap K_a^n$, где через $x^{(1)}$ обозначен вектор $x^{(1)} = \mathrm{pr}_{L_1^{h_1} + L_2^{h_2}} x = x_1^{(1)} + x_2^{(1)} = \mathrm{pr}_{L_1^{h_1}} x + \mathrm{pr}_{L_2^{h_2}} x \in L_1^{h_1} + L_2^{h_2}$, $x^{(1)} \geq 0$, $x_1^{(1)} \geq 0$, $x_2^{(1)} \geq 0$.

Вычислим для любого $m \geq 1$ вектор $A^m x^{(1)} \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} A^m x^{(1)} &= \sum_{j=1}^{2} A^m x_j^{(1)} = \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=1}^{h_j} A^m \big(\alpha_s^j e_s^j\big) = \sum_{j=1}^{2} (\lambda^{(j)})^m \sum_{s=1}^{h_j} \alpha_s^j \epsilon_j^{m(s-1)} e_s^j \\ &= \sum_{j=1}^{2} (\lambda^{(j)})^m \alpha_1^j e^{(j)} + \sum_{j=1}^{2} (\lambda^{(j)})^m \sum_{s=2}^{h_j} \alpha_s^j \epsilon_j^{m(s-1)} e_s^j, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\epsilon_j = \exp(2\pi i / h_j)$, $j = 1, 2$.

Из данного представления видно, что расположение ω-предельных множеств траекторий $F^m x$ в K_a^n зависит от соотношений между числами $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ и от принадлежности вектора x тому или иному инвариантному множеству. Рассмотрим эти случаи.

Пусть $x \in L_2 \cap K_a^n$.

Этому случаю соответствует $x_1 = 0$ в разложении $x = x_1 + x_2$. Множество $\omega_F x = \omega_F x_2^{(1)}$ содержится в $L_2^{h_2} \cap K_a^n$.

Если проекция $x_2^{(1)}$ параллельна $e^{(2)}$, то $\omega_F x \subseteq J_1^2 = \operatorname{con} e^{(2)} \cap K_a^n$.

Если проекция $x_2^{(1)}$ не параллельна $e^{(2)}$, то $\omega_F x \subseteq J_{h_2}^2$, где $J_{h_2}^2$ — цикл отрезков лучей периода h_2 вида (1) с образующим вектором $x_2^{(1)}$.

Таким образом, $\omega_F x \subset L_2^{h_2} \cap K_a^n$ для любого $x \in L_2 \cap K_a^n$.

Согласно лемме множество $L_2^{h_2} \cap K_a^n$ является циклическим инвариантным множеством отображения F периода h_2 и состоит из одного отрезка луча $J_1^2 = \operatorname{con} e^{(2)} \cap K_a^n$ и континуума циклов отрезков лучей $J_{h_2}^2$ периода h_2, расположенных вокруг J_1^2. Для любого $x \in L_2 \cap K_a^n$ если $x_2^{(1)} = \operatorname{pr}_{L_2^{h_2}} x \parallel e^{(2)}$, то $\omega_F x \subseteq J_1^2 = \operatorname{con} e^{(2)} \cap K_a^n$, если $x_2^{(1)} = \operatorname{pr}_{L_2^{h_2}} x \nparallel e^{(2)}$, то $\omega_F x \subseteq J_{h_2}^2 = \big\{\operatorname{con} x_2^{(1)} \cap K_a^n, \operatorname{con} A x_2^{(1)} \cap K_a^n, \ldots, \operatorname{con} A^{h_2-1} x_2^{(1)} \cap K_a^n \mid x_2^{(1)} = \operatorname{pr}_{L_2^{h_2}} x \in L_2^{h_2} \cap K_a^n\big\}$.

Пусть далее $x \in K_a^n$.

II.1. $A_3 = 0$, т. е. матрица $A \geq 0$ квазидиагональная [8, с. 354]. Матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, и $L_1' \equiv L_1$.

Пусть $x \in L_1 \cap K_a^n$ (случай $x \in L_2 \cap K_a^n$ рассмотрен выше). Вектор x при этом имеет вид $x = (\tilde{x}, 0)'$, где $\tilde{x}$ — вектор размерности n_1. По предыдущему $\omega_F x \subset L_1^{h_1} \cap K_a^n$.

Таким образом, $\omega_F x \subset L_1^{h_1} \cap K_a^n$ для любого $x \in L_1 \cap K_a^n$.

Согласно лемме множество $L_1^{h_1} \cap K_a^n$ является циклическим инвариантным множеством отображения F периода h_1 и состоит из одного отрезка луча $J_1^1 = \operatorname{con} e^{(1)} \cap K_a^n$ и континуума циклов отрезков лучей $J_{h_1}^1$ периода h_1, расположенных вокруг J_1^1. Для любого $x \in L_1 \cap K_a^n$ если $x_1^{(1)} = \operatorname{pr}_{L_1^{h_1}} x \parallel e^{(1)}$, то $\omega_F x \subseteq J_1^1 = \operatorname{con} e^{(1)} \cap K_a^n$, если $x_1^{(1)} = \operatorname{pr}_{L_1^{h_1}} x \nparallel e^{(1)}$, то $\omega_F x \subseteq J_{h_1}^1 = \big\{\operatorname{con} x_1^{(1)} \cap K_a^n,\ \operatorname{con} A x_1^{(1)} \cap K_a^n,\ \ldots, \operatorname{con} A^{h_1-1} x_1^{(1)} \cap K_a^n \mid x_1^{(1)} = \operatorname{pr}_{L_1^{h_1}} x \in L_1^{h_1} \cap K_a^n\big\}$.

II.1.1. Пусть $\lambda^{(1)} > \lambda^{(2)}$ ($\lambda^{(2)} > \lambda^{(1)}$). Максимальным собственным значением матрицы A является число $\lambda = \lambda^{(1)}$, и $e = e^{(1)} \geq 0$ ($\lambda = \lambda^{(2)}$ и $e = e^{(2)} \geq 0$).

Нетрудно показать, используя (2), что $\lim\limits_{m\to\infty} \|A^m x_2^{(1)}\| / \|A^m x_1^{(1)}\| = 0$ для любого $x \geq 0$ ($\lim\limits_{m\to\infty} \|A^m x_1^{(1)}\| / \|A^m x_2^{(1)}\| = 0$) и, значит, для любого $x \in K_a^n$, $x \notin L_2$, множество $\omega_F x$ содержится в $L_1^{h_1} \cap K_a^n$ (для любого $x \in K_a^n$, $x \notin L_1$, множество $\omega_F x$ содержится в $L_2^{h_2} \cap K_a^n$) и расположено на цикле отрезков лучей периодов h_1 (h_2) или 1.

Согласно лемме множество $L_1^{h_1}$ ($L_2^{h_2}$) является циклическим инвариантным множеством отображения F периода h_1 (h_2).

II.1.2. Пусть $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$. Тогда $\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$ и вектор $e = e^{(1)} + e^{(2)} > 0$ является собственным вектором матрицы $A \geq 0$, соответствующим числу λ: $Ae = A(e^{(1)} + e^{(2)}) = \lambda e$. Собственными числами матрицы $A \geq 0$, по модулю равными $\lambda > 0$, являются $h_1 + h_2$ чисел, которым соответствует подпространство $L_1^{h_1} + L_2^{h_2}$ размерности $h_1 + h_2$.

Для вектора $x \in K_a^n$ имеем $\omega_F x = \omega_F x^{(1)} \subset \big(L_1^{h_1} + L_2^{h_2}\big) \cap K_a^n$ и равенство

(2) перепишется следующим образом:

$$A^m x^{(1)} = \lambda^m \left(x_1' + \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=2}^{h_j} \alpha_s^j \epsilon_j^{m(s-1)} e_s^j \right), \tag{3}$$

где $x_1' = \sum\limits_{j=1}^{2} \alpha_1^j e^{(j)}$.

Пусть $x^{(1)} = x_1'$, т. е. вектор $x^{(1)}$ принадлежит собственному подпространству $\widetilde{L}^2$ оператора $\mathbf{A}$ размерности 2, отвечающему собственному значению $\lambda > 0$ и состоящему из неотрицательных собственных векторов матрицы A. В качестве базиса подпространства $\widetilde{L}^2$ выберем векторы $e^{(1)}$, $e^{(2)}$. Тогда $A^m x^{(1)} = \lambda^m x^{(1)}$ и, значит, $x^{(1)}$ — собственный вектор матрицы A.

Таким образом, для любого $x \in K_a^n$, у которого $x^{(1)} = x_1'$ — собственный вектор матрицы A, отвечающий числу $\lambda > 0$, т. е. $x^{(1)} \in \widetilde{L}^2$, будет $\omega_F x \subseteq \operatorname{con} x^{(1)} \cap K_a^n \subset \widetilde{L}^2 \cap K_a^n$.

Пусть $x^{(1)} \neq x_1'$. Предположим, что в представлении $x^{(1)} = x_1^{(1)} + x_2^{(1)}$ вектора $x^{(1)}$

$$x_j^{(1)} = \sum_{s=1}^{h_j} \alpha_s^j e_s^j, \quad x_t^{(1)} = \alpha_1^t e^{(t)},$$

т. е. $x_j^{(1)} \nparallel e^{(j)}$, а $x_t^{(1)} \equiv \alpha_1^t e^{(t)} \parallel e^{(t)}$, где j,t равны 1 или 2 и $j \neq t$. Тогда $x^{(1)} = x_1' + \sum\limits_{s=2}^{h_j} \alpha_s^j e_s^j$. Ввиду (3)

$$A^{h_j} x^{(1)} = \lambda^{h_j} x_1' + \lambda^{h_j} \sum_{s=2}^{h_j} \alpha_s^j \epsilon_j^{h_j(s-1)} e_s^j = \lambda^{h_j} x^{(1)}$$

и, значит, $x^{(1)}$ — собственный вектор матрицы A^{h_j}.

В этом случае $\omega_F x$ принадлежит множеству $\widetilde{L}^{h_j} \cap K_a^n$ размерности h_j.

Согласно лемме множество $\widetilde{L}^{h_j} \cap K_a^n$ является циклическим инвариантным множеством отображения F периода h_j и состоит из одного отрезка луча $\widetilde{J}_1 = \operatorname{con} x_1' \cap K_a^n$ и континуума циклов отрезков лучей $\widetilde{J}_{h_j}$ периода h_j, расположенных вокруг $\widetilde{J}_1$. Для любого вектора $x \in K_a^n$, у которого $x^{(1)} \parallel x_1'$, имеем $\omega_F x \subseteq \widetilde{J}_1$. Для любого вектора $x \in K_a^n$, у которого $x^{(1)} \nparallel x_1'$, $x_j^{(1)} \nparallel e^{(j)}$ и $x_t^{(1)} \parallel e^{(t)}$, будет $\omega_F x \subseteq \widetilde{J}_{h_j} = \{\operatorname{con} x^{(1)} \cap K_a^n, \ldots, \operatorname{con} A^{h_j - 1} x^{(1)} \cap K_a^n \mid x^{(1)} = \operatorname{pr}_{\widetilde{L}^{h_j}} x \in \widetilde{L}^{h_j} \cap K_a^n\}$, где $j,t = 1$ или 2 и $j \neq t$.

Обозначим через $\text{НОК}(l,m)$ наименьшее общее кратное чисел l и m, где $l, m \in N$.

Для векторов $x \in K_a^n$, у которых $x_j^{(1)} \nparallel e^{(j)}$, $j = 1, 2$, при $p = \text{НОК}(h_1, h_2)$ имеем

$$A^p x^{(1)} = \sum_{j=1}^{2} A^p x_j^{(1)} = \lambda^p x_1' + \lambda^p \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=2}^{h_j} \alpha_s^j \epsilon_j^{p(s-1)} e_s^j = \lambda^p x_1' + \lambda^p x_1'' = \lambda^p x^{(1)},$$

где

$$x_1'' = \sum_{j=1}^{2} \sum_{s=2}^{h_j} \alpha_s^j e_s^j.$$

Следовательно, $x^{(1)}$ — собственный вектор матрицы A^p.

В этом случае $\omega_F x$ принадлежит множеству $(\widetilde{L}^{h_1}+\widetilde{L}^{h_2})\cap K_a^n \subset (L_1^{h_1}+L_2^{h_2})\cap K_a^n$ размерности h_1+h_2.

Согласно лемме множество $(\widetilde{L}^{h_1}+\widetilde{L}^{h_2})\cap K_a^n$ является циклическим инвариантным множеством отображения F периода $p=\text{НОК}(h_1,h_2)$ и состоит из одного отрезка луча $J_1'=\operatorname{con} x_1'\cap K_a^n$ и континуума циклов отрезков лучей J_p' периода p, расположенных вокруг J_1'. Для любого $x\in K_a^n$ если $x^{(1)}=x_1'$, то $\omega_F x\subseteq \operatorname{con} x^{(1)}\cap K_a^n\subset \widetilde{L}^2\cap K_a^n$, если $x_j^{(1)}\nparallel e^{(j)}$, $j=1,2$, то $\omega_F x\subseteq J_p'=\{\operatorname{con} x^{(1)}\cap K_a^n,\dots,\operatorname{con} A^{p-1}x^{(1)}\cap K_a^n \mid x^{(1)}=\operatorname{pr}_{\widetilde{L}^{h_1}+\widetilde{L}^{h_2}} x\in(\widetilde{L}^{h_1}+\widetilde{L}^{h_2})\cap K_a^n\}$.

Таким образом, для любого $x\in K_a^n$ множество $\omega_F x$ расположено на цикле отрезков лучей, период которого равен 1, h_1, h_2 или $p=\text{НОК}\,(h_1,h_2)$.

II.2. $A_3\neq 0$. Максимальному собственному значению $\lambda>0$ матрицы $A\geq 0$ соответствует собственный вектор $e\geq 0$, $e=(e_1,e_2)$, координаты которого определяются из уравнения $Ae=\lambda e$ или $A_1e_1=\lambda e_1$, $A_3e_1+A_2e_2=\lambda e_2$, где e_1, e_2 — векторы размерностей n_1, n_2 соответственно.

II.2.1. Пусть $\lambda^{(1)}>\lambda^{(2)}$. Тогда максимальное собственное значение λ равно $\lambda^{(1)}$ и соответствующий ему собственный вектор матрицы A $e^{(1)}$ больше нуля [8, с. 353]. Координаты вектора $e^{(1)}=(e_1,e_2)$ определяются однозначно: из первого уравнения находим $e_1\equiv\tilde{e}_1$; поскольку $\lambda^{(1)}$ не является собственным значением матрицы A_2, то из второго уравнения находим $e_2=(\lambda^{(1)}E-A_2)^{-1}A_3\tilde{e}_1$. Матрица $A\geq 0$ имеет h_1 собственных чисел, по модулю равных $\lambda^{(1)}$, которым соответствует подпространство $L_1^{h_1}$. Из (2) следует, что $\lim\limits_{m\to\infty}\|A^m x_2^{(1)}\|/\|A^m x_1^{(1)}\|=0$ для любого $x\geq 0$, $x_1\neq 0$. Поэтому $\omega_F x=\omega_F x^{(1)}=\omega_F x_1^{(1)}$ для любого $x\in K_a^n$, $x_1\neq 0$.

Множество $L_1^{h_1}\cap K_a^n$ содержит собственный вектор $e^{(1)}>0$ матрицы A и, как было установлено ранее, является циклическим инвариантным множеством отображения F периода h_1. Для любого $x\in K_a^n$, $x_1\neq 0$, множество $\omega_F x$ содержится в $L_1^{h_1}\cap K_a^n$ и расположено на цикле отрезков лучей периода h_1 или 1.

Таким образом, множество $L_1^{h_1}\cap K_a^n$ притягивает почти все (с точностью до множества $L_2\cap K_a^n$ нулевой меры) траектории из K_a^n.

II.2.2. Пусть $\lambda^{(2)}>\lambda^{(1)}$. Тогда максимальное собственное значение λ равно $\lambda^{(2)}$ и ему соответствует собственный вектор $e^{(2)}\in L_2^{h_2}$, $e^{(2)}=(0,\tilde{e}_2)'\geq 0$.

Согласно (2) для любого $x\geq 0$ из равенства $\lim\limits_{m\to\infty}\|A^m x_1^{(1)}\|/\|A^m x_2^{(1)}\|=0$ следует, что для любого $x\in K_a^n$ множество $\omega_F x=\omega_F x^{(1)}=\omega_F x_2^{(1)}$ содержится в $L_2^{h_2}\cap K_a^n$ и расположено на цикле отрезков лучей периода h_2 или 1.

Множество $L_2^{h_2}\cap K_a^n$, как установлено ранее, является циклическим инвариантным множеством отображения F периода h_2.

Таким образом, множество $L_2^{h_2}\cap K_a^n$ притягивает все траектории из K_a^n, т. е. $\omega(F)\subseteq L_2^{h_2}\cap K_a^n$.

II.2.3. Пусть $\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}$. Тогда $\lambda=\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}$. Из системы уравнений для определения координат соответствующего λ собственного вектора $e=(e_1,e_2)\geq 0$ находим $e_1=0$, $e_2=\tilde{e}_2$, т. е. $e\equiv e^{(2)}$. Других неотрицательных собственных векторов, соответствующих λ, согласно данной системе матрица $A\geq 0$ не имеет. Вектор $e^{(2)}$ принадлежит $L_2^{h_2}\cap K_a^n\subseteq L_2\cap K_a^n$.

Таким образом, множество $L_2^{h_2}\cap K_a^n$ притягивает все траектории из K_a^n, т. е. $\omega(F) \subseteq L_2^{h_2} \cap K_a^n$.

Далее рассмотрим случаи, когда матрица $A \geq 0$ не представима в виде, описываемом в пп. I, II.

III. Пусть матрица A имеет вид разложимой матрицы, но матрицы $A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$ не являются неразложимыми и могут иметь нулевые максимальные собственные значения $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$.

III.1. A_2 — неразложимая матрица, $A_3 \geq 0$, $A_4 = 0$, $\lambda^{(1)} = 0$. Тогда $\lambda = \lambda^{(2)} > 0$, $e \equiv e^{(2)}$; собственному значению $\lambda^{(1)} = 0$ не соответствует неотрицательный собственный вектор. Для любого $x \in K_a^n$ множество $\omega_F x$ содержится в $L_2^{h_2} \cap K_a^n$ и расположено на цикле отрезков лучей периода h_2 или 1.

Таким образом, множество $L_2^{h_2} \cap K_a^n$ притягивает все траектории из K_a^n, т. е. $\omega(F) \subseteq L_2^{h_2} \cap K_a^n$.

III.2. A_1 — неразложимая матрица, $A_3 \geq 0$, $A_4 = 0$, $\lambda^{(2)} = 0$. Тогда $\lambda = \lambda^{(1)} > 0$, $e = (e_1, e_2) > 0$, $e_1 \equiv \tilde{e}_1$, $e_2 = (\lambda E - A_2)^{-1} A_3 \tilde{e}_1$. В силу инвариантности множества $L_2 \cap K_a^n$ относительно F для любого $x \in L_2 \cap K_a^n$ множество $\omega_F x = \{0\}$ достигается за конечное число шагов.

Таким образом, для почти всех (с точностью до множества нулевой меры $L_2 \cap K_a^n$) $x \in K_a^n$ будет $\omega_F x \subset L_1^{h_1} \cap K_a^n$.

Множество $L_1^{h_1} \cap K_a^n$ является циклическим инвариантным множеством отображения F периода h_1.

III.3. $A_3 \geq 0$, $A_4 = 0$, $\lambda = \lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 0$. Тогда $e \equiv e^{(2)}$. Согласно [1] $\omega(F)$ равно $\{0\}$ и достигается за конечное число шагов.

III.4. A_1 — неразложимая матрица, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$, $\lambda^{(2)} = 0$. Тогда $\lambda = \lambda^{(1)} > 0$, $e \equiv e^{(1)} \geq 0$. В силу инвариантности множества $L_2 \cap K_a^n$ относительно F для любого $x \in L_2 \cap K_a^n$ множество $\omega_F x = \{0\}$ достигается за конечное число шагов.

Таким образом, $\omega_F x \subset L_1^{h_1} \cap K_a^n$ для почти всех (с точностью до множества нулевой меры $L_2 \cap K_a^n$) $x \in K_a^n$.

Множество $L_1^{h_1} \cap K_a^n$ является циклическим инвариантным множеством отображения F периода h_1.

Аналогично если A_2 — неразложимая матрица, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$ и $\lambda^{(1)} = 0$, то $\lambda = \lambda^{(2)} > 0$, $e \equiv e^{(2)}$. В силу инвариантности множества $L_1 \cap K_a^n$ относительно F для любого $x \in L_1 \cap K_a^n$ множество $\omega_F x = \{0\}$ достигается за конечное число шагов.

Таким образом, $\omega_F x \subset L_2^{h_2} \cap K_a^n$ для почти всех (с точностью до множества нулевой меры $L_1 \cap K_a^n$) $x \in K_a^n$.

Множество $L_2^{h_2} \cap K_a^n$ является циклическим инвариантным множеством отображения F периода h_2.

Полученные результаты сформулируем в виде утверждений.

Теорема 1. *Если максимальному собственному значению матрицы $A \geq 0$ $\lambda > 0$ соответствует собственный вектор $e \geq 0$ ($e \not> 0$), то для всех или почти для всех (с точностью до множества нулевой меры) $x \in K_a^n$ ω-предельные множества $\omega_F x$ расположены в циклическом инвариантном множестве отображения F периода h_j, принадлежащем координатному подпространству L_j, содержащему вектор e, $j = 1, 2$.*

Если максимальное собственное значение матрицы $A \geq 0$ равно нулю, то $\omega(F)$ совпадает с $\{0\}$ и достигается за конечное число шагов.

Теорема 2. *Если максимальному собственному значению $\lambda > 0$ матрицы $A \geq 0$ соответствует собственный вектор $e > 0$, то для всех или почти для всех (с точностью до множества нулевой меры) $x \in K_a^n$ ω-предельные множества $\omega_F x$ расположены в одном из следующих множеств:*

1) на одном отрезке луча $J_1 = \operatorname{con} e \cap K_a^n$,

2) в циклическом инвариантном множестве отображения F периода 2, содержащем вектор e,

3) в циклическом инвариантном множестве отображения F периода h_1, содержащем вектор e,

4) в циклических инвариантных множествах отображения F периодов h_1, h_2, $p = \text{НОК}\,(h_1, h_2)$ и 1, содержащих неотрицательные собственные векторы матрицы A, соответствующие числу λ.

Замечание. Период $p = \text{НОК}(h_1, h_2)$ может быть существенно больше размерности системы n. Так, если числа h_1, h_2 не имеют общих делителей, то $p = h_1 \cdot h_2$. При $h_1 = n_1$, $h_2 = n_2$ получим, что $p = n_1 \cdot n_2 \geq n = n_1 + n_2$. Например, при $n_1 = 4$, $n_2 = 15$ будет $n = n_1 + n_2 = 19$ и $p = n_1 \cdot n_2 = 60$. Очевидно также, что $p \leq n^2$.

6. Примеры. Существование циклических инвариантных множеств M_p с периодами $p > n$ покажем на примере двух динамических систем $\{F^m, K_a^n, Z^+\}$ с матрицей A небольшого размера (8×8) квазидиагонального вида: $A = \{A_1, A_2\}$; $n_1 = 5$, $n_2 = 3$, $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda > 0$. По теореме 2 в K_a^8 существуют множества M_1, M_{h_1}, M_{h_2}, $M_{h_1 h_2}$ (см. также формулу (3)); в $M_{h_1 h_2}$ расположены множества $\omega_F x$ векторов x, не принадлежащих координатным подпространствам L_1, L_2 и собственному подпространству $\tilde{L}^2$ размерности 2, соответствующему значению λ.

Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Для матрицы A имеем $h_1 = n_1$, $h_2 = n_2$ и $\lambda = 2$. Таким образом, в K_a^8 существуют множества M_1, M_3, M_5, M_{15}. Пусть $x = 0.1 \cdot e_1$, где $e_1 = (1, 1, \ldots, 1)'$. Тогда вектор x, траектория $F^m x$ и множество $\omega_F x$ расположены на одном и том же цикле отрезков лучей. Численно определяем, что для любого i, $1 \leq i \leq 14$, будет $F^i x \nparallel x$ и $F^{15} x \parallel x$, т. е. вектор $\|e_1\|^{-1} e_1$ является образующим вектором цикла отрезков лучей периода 15.

Пусть теперь $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Для матрицы A имеем $h_1 = n_1 - 1$, $h_2 = n_2$ и $\lambda = 2$. Таким образом, в K_a^8 существуют множества M_1, M_3, M_4, M_{12}, при этом некоторые из множеств M_p, в частности M_{12}, имеют области притяжения в K_a^8 положительной меры. Пусть вектор x тот же, что в первом примере. Численно определяем, что для любых $i \neq j$ будет $F^i x \nparallel F^j x$, $i, j \in \{0, 1, \ldots, 12\}$, и $Fx \parallel F^{13} x$ (с точностью до второго знака после запятой), т. е. траектория $F^m x$ не расположена на цикле отрезков лучей периода 12, а притягивается циклом отрезков лучей периода 12 (с образующим вектором $\|Ae_1\|^{-1} A e_1$).

Заключение. Отметим, что интерес к изучению отображения F связан, в первую очередь, с возможностью использования результатов его исследования в популяционной динамике. Действительно, в моделях динамики биологических популяций с дискретной возрастной структурой функция $\Phi(x) \geq 0$ играет роль лимитирующего по численности фактора.

В качестве примера можно назвать отображение f с функцией $\Phi(x) = 1 - \|x\|$ [1], которое задает популяционную модель, являющуюся одним из вариантов нелинейной модели Лесли [9].

Еще две модели Лесли задаются отображениями вида f_1, $f_1 x = \exp(r(1 - \|x\|/K))Ax$, и f_2, $f_2 x = (1 + (\lambda - 1)\|x\|/K)^{-1} Lx$ [10, с. 40; 11]. Здесь L — матрица Лесли, λ — максимальное собственное значение матрицы L, K — «емкость среды», r — коэффициент естественного прироста.

Для любого вектора $F^m x \neq 0$ введем в рассмотрение вектор $\|F^m x\|^{-1} \cdot F^m x$, который определяет *возрастную структуру популяции* — соотношения между плотностями возрастных групп в общей численности популяции в момент времени m.

Для всех трех популяционных моделей характерна одинаковая асимптотически периодическая возрастная структура или ее стабилизация с течением времени, поскольку расположение циклических инвариантных множеств этих отображений и их периоды не зависят от вида лимитирующей функции $\Phi(x)$. Кроме того, при сведении многогрупповых популяционных моделей к одногрупповым [5], т. е. при переходе от отображений f, f_1, f_2 к рассмотрению отображений f^p, f_1^p, f_2^p, $p \geq 1$, коэффициент размножения $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ один и тот же.

Рассмотрим еще одно отображение — многомерное логистическое отображение с весами $f_\alpha : K_1^n \to K_1^n$, $f_\alpha x = \left(1 - \sum\limits_1^n \alpha_i x_i\right) Ax$, $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Отображение f_α задает *популяционную модель с иерархической структурой*, которая вводится с помощью весовых множителей α_i, $i = \overline{1,n}$, учитывающих конкурентоспособность каждой из возрастных групп, в то время как в предыдущих моделях все возрастные группы вносят одинаковый вклад в значение лимитирующей функции $\Phi(x)$. Нетрудно показать, что логистическое отображение с весами f_α линейно изоморфно логистическому отображению без весов f с матрицей, подобной матрице A, при этом изоморфизм устанавливается с помощью отображения $h = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица с элементами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панкратова И. Н.* Предельные множества многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 7. С. 995–997.
2. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1996.
3. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. Киев: Наукова Думка, 1989.
4. *Панкратова И. Н.* Сведение многомерного аналога нелинейного логистического разностного уравнения к одномерному // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1514–1515.
5. *Панкратова И. Н.* Представление многогрупповой популяционной модели в виде одногрупповой модели со многими параметрами // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2005. Т. 13, № 5–6. С. 135–142.
6. *Колесов А. Ю., Розов Н. Х., Садовничий В. А.* Жизнь на кромке хаоса // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 2003. Вып. 23. С. 219–266.

7. *Аносов Д. В.* Предисловие // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 66. С. 6–12. (Итоги науки и техники).
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
9. *Leslie P. H.* The use of matrices in certain population mathematics // Biometrika. 1945. V. 33, N 3. P. 183–212.
10. *Свирежев Ю. М., Логофет Д. О.* Устойчивость биологических популяций. М.: Наука, 1978.
11. *Логофет Д. О.* Еще раз о нелинейной модели Лесли: асимптотическое поведение траекторий в примитивном и импримитивном случаях // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1077–1081.

Статья поступила 30 июля 2007 г., окончательный вариант — 18 марта 2008 г.

Панкратова Ирина Николаевна
Институт математики Министерства образования и науки РК,
ул. Пушкина, 125, Алма-Ата 050010, Казахстан
`irina.pankratova@math.kz`