Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 515.16

МНОГООБРАЗИЯ ЗЕЙФЕРТА И $(1,1)$–УЗЛЫ

Л. Грасселли, М. Мулаццани

Аннотация. Цель работы — изучить отношения между многообразиями Зейферта и $(1,1)$-узлами. В частности, доказано, что каждое ориентированное многообразие Зейферта с инвариантами $\{Oo,0 \mid -1;\underbrace{(p,q),\dots,(p,q)}_{n\ \text{раз}},(l,l-1)\}$ имеет фундаментальную группу, циклически копредставимую в виде $G_n((x_1^q\dots x_n^q)^l x_n^{-p})$, и, более того, является n-листным строго циклическим накрытием линзового пространства $L(|nlq-p|,q)$, разветвленным над $(1,1)$-узлом $K(q,q(nl-2),p-2q,p-q)$, если $p\geq 2q$, и над $(1,1)$-узлом $K(p-q,2q-p,q(nl-2),p-q)$, если $p<2q$.

Ключевые слова: многообразие Зейферта, $(1,1)$-узлы, разветвленное циклическое накрытие, циклически копредставимая группа, диаграмма Хегора.

§ 1. Введение

Разветвленные циклические накрытия узлов в $\mathbf{S}^3$ с циклически копредставленными фундаментальными группами в последние годы интенсивно исследовались многими авторами (см. [1–10]). Их результаты включены в естественный и более общий контекст в [11], где доказано, что фундаментальная группа каждого n-листного строго циклического накрытия $(1,1)$-узла допускает циклическое копредставление, кодируемое диаграммой Хегора рода n. В [12] этот результат был улучшен указанием конструктивного алгоритма, который в точности дает циклическое копредставление, стартуя с копредставления $(1,1)$-узла в терминах группы классов отображений дважды проколотого тора (подробнее о таком копредставлении см. [13]).

В [14] Данвуди ввел класс многообразий, зависящих от шести целых параметров, так называемых многообразий Данвуди, имеющих циклически копредставленные фундаментальные группы. Как доказано в [15, 16], семейство многообразий Данвуди совпадает с семейством строго циклических накрытий линзовых пространств (возможно, $\mathbf{S}^3$), разветвленных над $(1,1)$-узлами. Как следствие, каждый $(1,1)$-узел может быть задан четырьмя целыми числами a,b,c,r, и мы будем обозначать его через $K(a,b,c,r)$.

В этой работе мы показываем, что ориентируемое многообразие Зейферта с инвариантами

$$\{Oo,0 \mid -1;\underbrace{(p,q),\dots,(p,q)}_{n\ \text{раз}},(l,l-1)\}$$

имеет фундаментальную группу, изоморфную циклически копредставленной группе $G_n\big((x_1^q\dots x_n^q)^l x_n^{-p}\big)$, и является n-листным строго циклическим накрытием линзового пространства $L(|nlq-p|,q)$, разветвленным над $(1,1)$-узлом

Work performed under the auspices of the G.N.S.A.G.A. of I.N.d.A.M. (Italy) and the University of Bologna, funds for selected research topics.

Рис. 1. Декомпозиция $(1,1)$-узла.

$K(q, q(nl-2), p-2q, p-q)$, если $p \geq 2q$, и над $(1,1)$-узлом $K(p-q, 2q-p, q(nl-2), p-q)$, если $p < 2q$.

§ 2. Основные обозначения

Конечное балансированное копредставление группы $\langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$ называется *циклическим копредставлением*, если существует слово w в свободной группе F_n, порожденной $x_1, \ldots, x_n$, такое, что $r_k = \theta^{k-1}(w)$, $k = 1, \ldots, n$, где $\theta : F_n \to F_n$ обозначает автоморфизм, определяемый по правилу $\theta(x_i) = x_{i+1}$ (индексы берутся по mod n), $i = 1, \ldots, n$. Это копредставление (и соответствующая группа) будут обозначаться через $G_n(w)$. Более подробно см. в [17].

Узел K в замкнутом связном ориентируемом 3-многообразии N^3 называется $(1,1)$-*узлом* если существует сплетение Хегора рода один

$$(N^3, K) = (H, A) \cup_{\varphi} (H', A'),$$

где H и H' — полнотории, $A \subset H$ и $A' \subset H'$ — собственно вложенные тривиальные дуги[1)], а $\varphi : (\partial H', \partial A') \to (\partial H, \partial A)$ — присоединяющий гомеоморфизм (рис. 1). Очевидно, N^3 оказывается линзовым пространством $L(p,q)$, включая $\mathbf{S}^3 = L(1,0)$ и $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1 = L(0,1)$.

Хорошо известно, что семейство $(1,1)$-узлов содержит все торические узлы и все двухмостовые узлы в $\mathbf{S}^3$. В последнее время некоторые топологические свойства $(1,1)$-узлов были исследованы во многих публикациях (см. литературу в [13]).

Рис. 2. Диаграмма Хегора для $K(a,b,c,r)$.

Копредставление $(1,1)$-узлов четверкой целых параметров разработано в [16] (см. также [18]). Каждый $(1,1)$-узел, кроме единственного исключения — «сердцевинного» узла $\{P\} \times \mathbf{S}^1 \subset \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$, может быть представлен четырьмя неотрицательными целыми числами a, b, c, r и будет обозначаться через $K(a,b,c,r)$.

Рис. 3.

$(1,1)$-Узел $K(a,b,c,r)$, где $a+b+c > 0$, допускает естественное $(1,1)$-разбиение $(H,A) \cup_{\varphi} (H',A')$, описываемое диаграммой Хегора рода один, приведенной на рис. 2, где метки a, b и c обозначают соответствующее число параллельных дуг, и склеивание между окружностями C' и C'' зависит от параметра скручивания r: попарно отождествляются вершины с одинаковыми метками (отметим, что r может быть взято по модулю $2a+b+c$).

---

1) Это означает, что существует диск $D \subset H$ (соответственно $D' \subset H'$) такой, что $A \cap D = A \cap \partial D = A$ и $\partial D - A \subset \partial H$ (соответственно $A' \cap D' = A' \cap \partial D' = A'$ и $\partial D' - A' \subset \partial H'$).

Рис. 4.

Рис. 5.

Как простое следствие теоремы Зейферта — ван Кампена имеем, что фундаментальная группа дополнения к $(1,1)$-узлу (так же, как и его первая группа гомологий) порождена двумя петлями $\alpha, \gamma \subset \partial H$, изображенными на рис 3.

В § 3 нам понадобится следующий результат.

Лемма 1. (i) *Если a и c — неотрицательные целые числа такие, что* $\gcd(a,c) = 1$, *то* $K(a,0,c,a)$ *является* $(1,1)$*-узлом в линзовом пространстве* $L(c,a)$.

(ii) *Если a, b, c — неотрицательные целые числа такие, что* $\gcd(a-c, b+c) = 1$, *то* $K(a,b,c,a)$ *является* $(1,1)$*-узлом в линзовом пространстве* $L(b+c, a+b)$.

(iii) *Если a, b, c — неотрицательные целые числа такие, что $a > 0$ и* $\gcd(a, b-c) = 1$, *то* $K(a,b,c,a+c)$ *является* $(1,1)$*-узлом в линзовом пространстве* $L(|b-c|, a)$.

Доказательство. Как доказано в [18], $K(a,b,c,r)$ эквивалентен $K(a,c,b, 2a+b+c-r)$, и $K(a,0,c,r)$ эквивалентен $K(a,c,0,r)$. Как следствие, $K(a,0,c,r)$ эквивалентен $K(a,0,c,2a+c-r)$.

(i) Если $a = 0$, то $c = 1$, и результат очевиден. Если $0 < a < c$, то, применяя движение Зингера [19] типа IB, приведенное на рис. 4, получаем каноническую

Рис. 6.

диаграмму Хегора для $L(c,a)$. Если $a \geq c$, то движение Зингера, приведенное на рис. 5, преобразует диаграмму $K(a,0,c,a)$ в диаграмму $K(a-c,c,0,a-c)$, эквивалентную $K(a-c,0,c,a-c)$. Поскольку $L(c,a-c)$ гомеоморфно $L(c,a)$, результат следует из предыдущего случая $a < c$.

(ii) Если $b = 0$, то результат вытекает из (i). Если $b > 0$, то при выполнении движения Зингера, как на рис. 6, диаграмма $K(a,b,c,a)$ превращается в диаграмму $K(a-1,b+1,c-1,a-1)$. Если $a \leq c$, то после выполнения движения a раз мы получаем диаграмму $K(0,b+a,c-a,0)$, которая является канонической диаграммой Хегора $L(b+c,a+b)$, поскольку

$$\gcd(a+b,b+c) = \gcd(a-c,b+c) = 1.$$

Если $a > c$, то после выполнения движения c раз мы получаем диаграмму $K(a-c,b+c,0,a-c)$, эквивалентную $K(a-c,0,b+c,a-c)$. Теперь результат следует из (i), так как $L(b+c,a-c)$ гомеоморфно $L(b+c,a+b)$.

(iii) Поскольку $K(a,b,c,a+c)$ эквивалентен $K(a,c,b,a+b)$, мы можем всегда считать, что $c \leq b$. Если $c > 0$, то при выполнении движения Зингера, как на рис. 7, диаграмма $K(a,b,c,a+c)$ превращается в диаграмму $K(a,b-1,c-1,a+c-1)$. После выполнения движения c раз мы получаем диаграмму $K(a,b-c,0,a)$, которая эквивалентна $K(a,0,b-c,a)$. Теперь результат следует из (i).

Отметим, что, поскольку $K(a,b,c,a+b+c)$ эквивалентен $K(a,c,b,a)$, узел $K(a,b,c,a+b+c)$ является $(1,1)$-узлом в линзовом пространстве $L(b+c,a+c)$, если $\gcd(a-b,b+c) = 1$.

n-Листное циклическое накрытие M^3 3-многообразия N^3, разветвленное над узлом $K \subset N^3$, называется *строго циклическим*, если индекс ветвления множества K равен n. Это означает, что слой в M^3 каждой точки узла K состоит из одной точки. В этом случае гомологический класс m меридианной петли вокруг K при отображении монодромии $\omega : H_1(N^3 - K) \to \mathbf{Z}_n$ накрытия отображается в порождающий группы $\mathbf{Z}_n$ (с точностью до эквивалентности мы всегда можем считать, что $\omega(m) = 1$). Отметим, что разветвленное циклическое накрытие узла K в $\mathbf{S}^3$ всегда является строго циклическим и определяется однозначно с точностью до эквивалентности, поскольку $H_1(\mathbf{S}^3 - K) \cong \mathbf{Z}$. Очевидно, это свойство не остается верным для узла в более общем 3-многообразии.

Рис. 7.

Необходимые и достаточные условия существования и единственности строго циклических разветвленных накрытий $(1,1)$-узлов получены в [12].

§ 3. Основные результаты

Пусть n, p, q, l — положительные целые числа такие, что $q < p$ и $\gcd(p,q) = 1$. Далее через $\Sigma(n,p,q,l)$ мы обозначаем ориентируемое многообразие Зейферта [20] с инвариантами

$$\{Oo, 0 \mid -1; \underbrace{(p,q), \dots, (p,q)}_{n \text{ раз}}, (l, l-1)\}$$

с пространством орбит $\mathbf{S}^2$, имеющее n исключительных слоев типа (p,q) и при $l > 1$ исключительный слой типа $(l, l-1)$.

Отметим, что, в частности, многообразия $\Sigma(n,2,1,1)$ — это в точности многообразия Нойвирта M_n, введенные в [21], изучавшиеся в [22] и обобщавшиеся в [23–25].

Предложение 2. *Фундаментальная группа многообразия $\Sigma(n,p,q,l)$ является циклически копредставимой группой $G_n(w)$, где $w = \left(x_1^q \dots x_n^q\right)^l x_n^{-p}$.*

Доказательство. Согласно [26] стандартное копредставление группы $G = \pi_1(\Sigma(n,p,q,l))$ имеет вид

$$\left\langle y_1, \dots, y_n, y, h \mid [y_i, h],\ [y, h],\ y_i^p h^q,\ y^l h^{l-1},\ y_1 \dots y_n y h;\ i = 1, \dots, n \right\rangle.$$

Поскольку $\gcd(p,q) = 1$, существуют $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ такие, что $q\beta - p\alpha = 1$.

Из соотношений имеем $y^l h^{l-1} = (yh)^l h^{-1}$. При введении нового порождающего $x = yh$ копредставление превращается в

$$\left\langle y_1, \dots, y_n, x, h \mid [y_i, h],\ [x, h],\ y_i^p h^q,\ x^l h^{-1},\ y_1 \dots y_n x;\ i = 1, \dots, n \right\rangle.$$

Теперь определим $x_i = y_i^\beta h^\alpha$ для $i = 1, \dots, n$, чтобы получить новое копредставление для G:

$$\Big\langle y_1, \dots, y_n, x, h, x_1, \dots, x_n \mid [y_i, h],\ [x, h],\ y_i^p h^q,\\ x^l h^{-1}, y_1 \dots y_n x, x_i^{-1} y_i^\beta h^\alpha;\ i = 1, \dots, n \Big\rangle.$$

Из соотношений находим

$$x_i^q = y_i^{q\beta} h^{q\alpha} = y_i^{1+p\alpha} h^{q\alpha} = y_i \bigl(y_i^p h^q\bigr)^{\alpha} = y_i$$

и

$$x_i^p = y_i^{p\beta} h^{p\alpha} = y_i^{p\beta} h^{q\beta-1} = \bigl(y_i^p h^q\bigr)^{\beta} h^{-1} = h^{-1}.$$

Следовательно, G допускает копредставление

$$\bigl\langle x, h, x_1, \dots, x_n \mid [x_i^q, x_i^{-p}],\ [x, x^l],\ x_i^{qp} x_i^{-qp},\\ x^l h^{-1}, x_1^q \dots x_n^q x,\ x_i^{-1} x_i^{q\beta} x_i^{-p\alpha},\ x_i^p h;\ i = 1, \dots, n\bigr\rangle,$$

которое, очевидно, приводится к

$$\bigl\langle x, h, x_1, \dots, x_n \mid x^l h^{-1},\ x_1^q \dots x_n^q x,\ x_i^p h;\ i = 1, \dots, n\bigr\rangle.$$

Из соотношений получаем $x = \bigl(x_1^q \dots x_n^q\bigr)^{-1}$ и $h = \bigl(x_1^q \dots x_n^q\bigr)^{-l}$. Следовательно, G допускает копредставление

$$\bigl\langle x_1, \dots, x_n \mid \bigl(x_1^q \dots x_n^q\bigr)^l x_i^{-p};\ i = 1, \dots, n\bigr\rangle,$$

которое эквивалентно

$$\bigl\langle x_1, \dots, x_n \mid \bigl(x_1^q \dots x_n^q\bigr)^l x_n^{-p},\ x_i^p x_{i+1}^{-p};\ i = 1, \dots, n-1\bigr\rangle.$$

Для доказательства изоморфности G и $G_n(w)$ достаточно показать, что нормальные замыкания в свободной группе F_n множеств

$$\{w, x_i^p x_{i+1}^{-p};\ i = 1, \dots, n-1\} \quad \text{и} \quad \{w, \theta^i(w);\ i = 1, \dots, n-1\}$$

совпадают.

Это достигается с учетом того, что, полагая $w_i = \theta^i(w)$, имеем

$$w_i^{-1} x_{i+1}^q w_{i+1} x_{i+1}^{-q} = x_i^p x_{i+1}^{-p} \quad \text{для } i = 1, \dots, n-2,$$

$$w_{n-1}^{-1} x_n^q w x_n^{-q} = x_{n-1}^p x_n^{-p}, \quad x_1^{-q} w\bigl(\bigl(x_1^p x_2^{-p}\bigr) \dots \bigl(x_{n-1}^p x_n^{-p}\bigr)\bigr)^{-1} x_1^q = w_1,$$

$$x_i^{-q} w_{i-1}\bigl(x_{i-1}^p x_i^{-p}\bigr) x_i^q = w_i \quad \text{для } i = 2, \dots, n-1.$$

В силу тривиального факта, что многообразие Зейферта с одним или двумя сингулярными слоями является линзовым пространством (см. [26]), будем считать, что $n > 1$ и $l > 1$ при $n = 2$.

Теорема 3. *Многообразие Зейферта $\Sigma(n, p, q, l)$ является n-листным строго циклическим накрытием линзового пространства $L(|nlq - p|, q)$, разветвленным над $(1,1)$-узлом $K(q, q(nl-2), p-2q, p-q)$, если $p \geq 2q$, и над $(1,1)$-узлом $K(p-q, 2q-p, q(nl-2), p-q)$, если $p < 2q$.*

Доказательство. (i) Положим $p \geq 2q$. По п. (iii) леммы 1 $K = K(q, q(nl-2), p-2q, p-q)$ является $(1,1)$-узлом в $L(|nlq-p|, q)$. Предположим теперь, что K допускает n-листное строго циклическое разветвленное накрытие $C_n(K)$, определяемое условиями $\omega(\alpha) = 0$ и $\omega(\gamma) = 1$. В этом случае $C_n(K)$ является многообразием Данвуди $D(q, q(nl-2), p-2q, n, p-q, 0)$ (см. [15, 16]). Определяющая его диаграмма Хегора рода n, имеющая циклическую симметрию порядка n, приведена на рис. 8, где $a = q, b = q(nl-2), c = p-2q$, $r = p-q$, и окружность C_i' должна быть приклеена к окружности C_i'' для $i = 1, \dots, n$ в соответствии с

Рис. 8.

Рис. 9.

параметром скручивания r. Чтобы убедиться в том, что указанная диаграмма действительно представляет многообразие, удобно рассмотреть клеточное разбиение, двойственное разбиению, ассоциированному с диаграммой. При таком подходе $C_n(K)$ получается попарным отождествлением областей 2-клеточного разбиения границы 3-шара, как изображено на рис. 9. Разбиение состоит из $2n$ областей: $R'_1, \dots, R'_n$ вокруг северного полюса N и $R''_1, \dots, R''_n$ вокруг южного полюса S, соответствующих циклам C'_i и C''_i диаграммы. Ребра разбиения соответствуют дугам диаграммы следующим образом. Полюсы S и N соединены n меридианами, и каждый меридиан m_i составлен из nlq ребер $e_{i,j}$ $(j = 1, \dots, nlq)$ от S к N, более точно, q ребер от S до B_i, $q(nl-2)$ от B_i до A_i и q от A_i до N. Более того, для $i = 1, \dots, n$ дуга a_i, соединяющая B_{i-1} с A_i, составлена из $p-2q$ ребер $e'_{i,j}$ $(j = 1, \dots, p-2q)$. Отметим, что при $p = 2q$ (т. е. $p = 2$ и $q = 1$) точки B_{i-1} и A_i совпадают. Для получения $C_n(K)$ область R'_i приклеивается к R''_i для $i = 1, \dots, n$ таким меняющим ориентацию гомеоморфизмом, что точка S из R''_i совмещается с точкой[2] B_{i-1} из R'_i. При таком склеивании

[2]Индекс i рассматривается по модулю n.

Рис. 10. Случай $p \geq 2q$.

имеем: $e_{i,j} \equiv e_{i-1,j+q}$ для $j = 1, \dots, q(nl-1)$, $e_{i-1,j} \equiv e'_{i,j}$ для $j = 1, \dots, q$, $e'_{i,j} \equiv e'_{i,j+q}$ для $j = 1, \dots, p-3q$ и ${e'}_{i,p-3q+k} \equiv e_{i,q(nl-1)+k}$ для $k = 1, \dots, q$. Как результат всех отождествлений, получаем $e_{i,j} \equiv e_{i,j+nq} \equiv \dots \equiv e_{i,j+n(l-1)q}$ для $j = 1, \dots, nq$ и, более того, $e_{i-1,j} \equiv e_{i,q(nl-1)+j}$ для $j = 1, \dots, q$. Поскольку $\gcd(p, q) = 1$, все ребра дуг SB_{i-1}, $B_{i-1}A_i$ и A_iN склеиваются и мы будем использовать для них обозначение x_i. Следовательно, $q(nl-2)$ ребер дуги B_iA_i таковы: q экземпляров x_{i+1}, q экземпляров $x_{i+2}, \dots, q$ экземпляров x_i $(l-1$ раз) и, далее, q экземпляров x_{i+1}, q экземпляров $x_{i+2}, \dots, q$ экземпляров x_{i-2} (рис. 10). Поскольку каждое ребро x_i появляется p раз последовательно, его концы совпадают. Более того, так как каждое ребро x_i имеет концом S, клеточное разбиение $C_n(K)$ состоит из одной вершины, n ребер, n областей и одного 3-шара. По критерию Зейферта $C_n(K)$ действительно является замкнутым ориентируемым 3-многообразием.

Более того, $\pi_1(C_n(K))$ допускает балансированное копредставление с порождающими $x_1, \dots, x_n$ и соотношениями, получаемыми при обходе границ областей R'_i. Как следствие, $\pi_1(C_n(K))$ равна $G_n\big(\big(x_1^q \dots x_n^q\big)^l x_n^{-p}\big)$ и, значит, изоморфна $\pi_1(\Sigma(n,p,q,l))$.

Для доказательства того, что $C_n(K)$ и $\Sigma(n,p,q,l)$ действительно гомеоморфны, заметим, что $\pi_1(C_n(K))$ имеет нетривиальный центр. Таким образом, $C_n(K)$ либо простое, либо является связной суммой $C_n(K) = M \# M'$, где $\pi_1(M')$ тривиальна, а M простое и $\pi_1(M) = \pi_1(C_n(K))$.

Если $\Sigma(n,p,q,l)$ является большим (в смысле [26]), то M также большое многообразие Зейферта (см. [27]). Поэтому M и $\Sigma(n,p,q,l)$ гомеоморфны, при этом имеют род Хегора по крайней мере $n-2$ (см. [28]). Если M' не гомеоморфно $\mathbf{S}^3$, то его род Хегора превосходит два и $C_n(K)$ имеет род Хегора более, чем n. Но это невозможно, поскольку $C_n(K)$ допускает сплетение Хегора рода n [11]. Следовательно, $M' = \mathbf{S}^3$ и $C_n(K) = \Sigma(n,p,q,l)$.

Если $\Sigma(n,p,q,l)$ не является большим, то имеет место одна из следующих возможностей: (a) $n = 3$, $p = 2$, $q = 1 = l$; (b) $n = 2$, $p = 2$, $q = 1$, $l > 1$; (c) $n = 2$, $p = 3$, $q = 1$, $l = 2$. Поскольку для $q = 1$ данное разбиение $C_n(K)$

Рис. 11. Случай $p < 2q$.

совпадает с разбиением $P(p, \dots, p; l)$, приведенным в [25], результат следует из [25, предложение 4.1].

(ii) Пусть $p < 2q$. По п. (ii) леммы 1 $K(p-q, 2q-p, q(nl-2), p-q)$ является $(1,1)$-узлом в $L(|nlq-p|, q)$. Теперь предположим, что K допускает n-листное строго циклическое разветвленное накрытие $C_n(K)$, определяемое $\omega(\alpha) = 1$ и $\omega(\gamma) = 1$. В этом случае $C_n(K)$ является многообразием Данвуди $D(p-q, 2q-p, q(nl-2), n, p-q, 1)$. Определяющая его диаграмма Хегора рода n, имеющая циклическую симметрию порядка n, приведена на рис. 8, где $a = p-q$, $b = 2q-p$, $c = q(nl-2)$, $r = p-q$, и окружность C'_i должна быть приклеена к окружности C''_{i+1} для $i = 1, \dots, n$ в соответствии с параметром скручивания r. Вновь предпочтительнее обратиться к двойственному разбиению (см. рис. 9). Теперь каждый меридиан составлен из p ребер, а именно $p-q$ из S в B_i, $2q-p$ из B_i в A_i и $p-q$ из A_i в N. Более того, дуга, соединяющая B_{i-1} с A_i, составлена из $q(nl-2)$ ребер. Для получения $C_n(K)$ область R'_{i-1} приклеивается к R''_i таким образом, что точка N из R'_{i-1} отождествляется с точкой B_{i-1} из R''_i.

Совершенно аналогично с п. (i) легко видеть, что склеивание приводит к клеточному разбиению $C_n(K)$, состоящему из одной вершины, n ребер, n областей и одного 3-шара (см. 2-остов на рис. 11). Поэтому $\pi_1(\Sigma(n,p,q,l))$ изоморфна $\pi_1(C_n(K))$ и $\Sigma(n,p,q,l)$ гомеоморфно $C_n(K)$, когда оно является большим. Единственное возникающее малое многообразие Зейферта соответствует случаю $n = q = l = 2$, $p = 3$. Для получения результата достаточно доказать, что $D = D(1,1,4,2,1,1)$ является 2-листным накрытием $\mathbf{S}^3$, разветвленным над узлом Монтесиноса $\mathbf{m}(-1; 1/2, 2/3, 2/3)$ (см. [29, гл. 12]). Диаграмма Хегора рода два для D приведена на рис. 12, где окружность C'_1 (соответственно C'_2) должна быть приклеена к окружности C''_2 (соответственно C''_1) таким образом, что одинаково помеченные вершины отождествляются. Применение к этой диаграмме алгоритма Такахаши [30] (как изображено на рис. 13) показывает, что многообразие D является 2-листным разветвленным накрытием узла K, представленного 3-мостовой диаграммой на рис. 14. Из этой диаграммы легко находится копредставление Виртингера фундаментальной группы дополнения

Рис. 12. $D(1,1,4,2,1,1)$.

Рис. 13.

к K:

$$\pi_1(\mathbf{S}^3{-}K) = \langle x, y, z \mid yz^{-1}xzy^{-1}xyz^{-1}x^{-1}zy^{-1}z^{-1}, x^{-1}zyz^{-1}xzx^{-1}zy^{-1}z^{-1}xy^{-1}\rangle.$$

Полином Александера для K может быть получен стандартным применением дифференциального исчисления Фокса (см. [29, гл. 9]), и мы имеем $\Delta_K(t) = 1 - 4t + 5t^2 - 4t^3 + t^4$. Последовательностью преобразований Рейдемейстера, приведенной на рис. 15–17, узел K приводится к диаграмме с 9 двойными точками на рис. 17. Поскольку узел 8_{21} из таблицы Ролфсена является единственным узлом порядка ≤ 9 с полиномом Александера $1 - 4t + 5t^2 - 4t^3 + t^4$ (см. [31, табл. 3]), то K и есть узел 8_{21}. Так как 8_{21} является узлом Монтесиноса $\mathbf{m}(-1; 1/2, 2/3, 2/3)$ (см. [31, табл. 2], где используются слегка отличающиеся обозначения), утверждение доказано.

Отметим, что теорема 3 уточняет и расширяет результаты [32, теорема 4.2; 33, теорема 5.1]. Доказательство теоремы 3 дает также следующий результат.

Следствие 4. *Многообразие Зейферта* $\Sigma(n, p, q, l)$ *является многообразием Данвуди* $D(q, q(nl{-}2), p{-}2q, n, p{-}q, 0)$, *если* $p \geq 2q$, *и многообразием Данвуди* $D(p - q, 2q - p, q(nl - 2), n, p - q, 1)$, *если* $p < 2q$.

Замечание. Поскольку $\Sigma(n, p, p - 1, 1) = \Sigma(n - 1, p, p - 1, p)$, это многообразие одновременно является n-листным строго циклическим накрытием

Рис. 14.

Рис. 15.

Рис. 16.

Рис. 17.

линзового пространства $L(pn-p-n, p-1)$, разветвленным над $(1,1)$-узлом $K(1, p-2, (p-1)(n-2), 1)$, и $(n-1)$-листным строго циклическим накрытием линзового пространства $L(p(pn-p-n), p-1)$, разветвленным над $(1,1)$-узлом $K(1, p-2, (p-1)(np-p-2), 1)$ при $p > 2$. Более того, многообразие Нойвирта $M_n = \Sigma(n, 2, 1, 1) = \Sigma(n-1, 2, 1, 2)$ одновременно является n-листным строго циклическим накрытием линзового пространства $L(n-2, 1)$, разветвленным над $(1,1)$-узлом $K(1, n-2, 0, 1)$, и $(n-1)$-листным строго циклическим накрытием линзового пространства $L(2n-4, 1)$, разветвленным над $(1,1)$-узлом $K(1, 2n-4, 0, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bandieri P., Kim A. C., Mulazzani M.* On the cyclic coverings of the knot 5_2 // Proc. Edinb. Math. Soc. 1999. V. 42, N 3. P. 575–587.

2. *Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A. C.* A geometric study of Sieradsky groups // Algebra Colloq. 1998. V. 5, N 2. P. 203–217.

3. *Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A. C.* On cyclic branched coverings of torus knots // J. Geom. 1999. V. 64, N 1–2. P. 55–66.

4. *Cavicchioli A., Hegenbarth F., Repovs D.* On manifold spines and cyclic presentations of groups // Knot theory. Proc. of the mini-semester, Warsaw, Poland, July 13–August 17, 1995. Warszawa: Polish Acad. Sci., Instit. Math., Banach Cent. Publ. 1998. V. 42. P. 49–56.

5. *Helling H., Kim A. C., Mennicke J. L.* A geometric study of Fibonacci groups // J. Lie Theory. 1998. V. 8, N 1. P. 1–23.

6. *Kim A. C.* On the Fibonacci group and related topics // Contemp. Math. 1995. V. 184. P. 231–235. (Second Intern. Conf. on Algebra. Barnaul, 1991).

7. *Kim A. C., Kim Y., Vesnin A.* On a class of cyclically presented groups // Proc. Intern. Conf., Groups-Korea '98. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2000. P. 211–220.

8. *Kim G., Kim Y., Vesnin A.* The knot 5_2 and cyclically presented groups // J. Korean Math. Soc. 1998. V. 35, N 4. P. 961–980.

9. *Maclachlan C., Reid A. W.* Generalised Fibonacci manifolds // Transform. Groups. 1997. V. 2, N 2. P. 165–182.

10. *Веснин А. Ю., Ким А. Ч.* Дробные группы Фибоначчи и многообразия // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 765–775.

11. *Mulazzani M.* Cyclic presentations of groups and cyclic branched coverings of $(1,1)$-knots // Bull. Korean Math. Soc. 2003. V. 40, N 1. P. 101–108.

12. *Cattabriga A., Mulazzani M.* Strongly-cyclic branched coverings of $(1,1)$-knots and cyclic presentation of groups // Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 2003. V. 135, N 1. P. 137–146.

13. *Cattabriga A., Mulazzani M.* $(1,1)$-Knots via the mapping class group of the twice punctured torus // Adv. Geom. 2004. V. 4, N 2. P. 263–277.

14. *Dunwoody M. J.* Cyclic presentations and 3-manifolds // Proc. Intern. Conf., Groups-Korea'94, Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1995. P. 47–55.

15. *Grasselli L., Mulazzani M.* Genus one 1-bridge knots and Dunwoody manifolds // Forum Math. 2001. V. 13, N 3. P. 379–397.

16. *Cattabriga A., Mulazzani M.* All strongly-cyclic branched coverings of $(1,1)$-knots are Dunwoody manifolds // J. London Math. Soc. 2004. V. 70, N 2. P. 512–528.

17. *Johnson D. L.* Topics in the theory of group presentations Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 42).

18. *Cattabriga A., Mulazzani M.* Representations of $(1,1)$-knots // Fund. Math. 2005. V. 188. P. 45–57.

19. *Singer J.* Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. V. 35, N 1. P. 88–111.

20. *Seifert H., Threlfall W.* Seifert and Threlfall: a textbook of topology // New York; London: Acad. Press, 1980. (Pure Appl. Math.; 89).

21. *Neuwirth L.* An algorithm for the construction of 3-manifolds from 2-complexes // Proc. Camb. Philos. Soc. 1968. V. 64. P. 603–613.

22. *Cavicchioli A.* Neuwirth manifolds and colourings of graphs // Aequationes Math. 1992. V. 44, N 2–3. P. 168–187.

23. *Grasselli L., Piccarreta S.* Crystallizations of generalized Neuwirth manifolds // Forum Math. 1997. V. 9, N 6. P. 669–685.

24. *Szczepański A., Vesnin A.* Generalized Neuwirth groups and Seifert fibered manifolds // Algebra Colloq. 2000. V. 7, N 3. P. 295–303.

25. *Ruini B., Spaggiari F., Vesnin A.* On spines of Seifert fibered manifolds // Aequationes Math. 2003. V. 65, N 1–2. P. 40–60.

26. *Orlik P.* Seifert manifolds. Berlin; New York: Springer-Verl., 1972. (Lecture Notes in Math.; V. 291).

27. *Casson A., Jungreis D.* Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds // Invent. Math. 1994. V. 118, N 3. P. 441–456.

28. *Boileau M., Zieschang H.* Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds // Invent. Math. 1984. V. 76, N 3. P. 455–468.

29. *Burde G., Zieschang H.* Knots. De Gruyter Studies in Mathematics, 5. Berlin: Walter de Gruyter, 1985.

30. *Takahashi M.* Two knots with the same 2-fold branched covering space // Yokohama Math. J. 1977. V. 25, N 1. P. 91–99.

31. *Kawauchi A.* A survey of knot theory. Basel: Birkhauser-Verl., 1996.

32. *Cavicchioli A., Repovs D., Spaggiari F.* Topological properties of cyclically presented groups // J. Knot Theory Ramifications. 2003. V. 12, N 2. P. 243–268.

33. *Spaggiari F.* The combinatorics of some Tetrahedron manifolds // Discrete Math. 2005. V. 300, N 1–3. P. 163–179.

Статья поступила 9 апреля 2007 г.

Luigi Grasselli (Грасселли Луиджи)
Department of Sciences and Methods for Engineering, University of Modena and Reggio Emilia, 42100 Reggio Emilia, Italy
grasselli.luigi@unimore.it

Michele Mulazzani (Мулаццани Микеле)
Department of Mathematics, University of Bologna, I-40127 Bologna, Italy, and C.I.R.A.M., Bologna, Italy
mulazza@dm.unibo.it