Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.54

КОНЕЧНОЛИСТНЫЕ ЛОКАЛЬНО БИГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ НА ПЛОСКОСТЬ

С. Ю. Граф, В. В. Старков

Аннотация. Дается окончательное решение проблемы возможности локально биголоморфного конечнолистного отображения произвольной многосвязной области комплексной плоскости на всю комплексную плоскость с указанием наименьшей константы листности.

Ключевые слова: локально биголоморфное отображение, многосвязная область, теорема Пуанкаре.

Как известно из теоремы Римана, любые две односвязные области D_1 и D_2, границы которых содержат более одной точки, конформно эквивалентны, т. е. существует однолистное конформное отображение одной из этих областей на другую. Для многосвязных областей гарантировать наличие однолистного конформного отображения D_1 на D_2 уже нельзя даже в случае совпадения их порядков связности. Тем не менее известная теорема Пуанкаре об униформизации утверждает, что универсальная накрывающая произвольной римановой поверхности (в том числе произвольной многосвязной области) конформно эквивалентна единичному кругу, комплексной плоскости или сфере Римана в зависимости от конформного типа поверхности. Отсюда, в частности, следует существование локально биголоморфного отображения круга, плоскости или сферы Римана на соответствующие им по конформному типу поверхности. При этом обратные отображения в общем случае уже не будут однозначными.

В настоящей работе рассматривается вопрос о возможности конечнолистного локально биголоморфного отображения произвольной многосвязной области на комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

Под локально биголоморфными отображениями области D будем далее понимать однозначные отображения, конформные и однолистные в некоторой окрестности каждой точки $z \in D$. Отображение f области D на Ω называется *m-листным*, если для любого $w \in \Omega$ множество $f^{-1}(w)$ состоит не более чем из m точек.

Теорема об униформизации не дает оценки листности локально биголоморфных отображений универсальных накрывающих на римановы поверхности. Более того, каждая точка римановой поверхности при таких отображениях должна быть накрыта одинаковое число раз, что приводит к тому, что, например, универсальные накрывающие любых неодносвязных гиперболических

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00648–а).

римановых поверхностей (в частности, многосвязных областей, отличных от плоскости с проколом) счетнолистны.

Известно также, что некоторые многосвязные области (например, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$) невозможно конечнолистно и локально биголоморфно отобразить на $\mathbb{C}$ [1].

Задача об оценке минимальной листности локально биголоморфного отображения произвольной области $D \subset \mathbb{C}$ на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ возникла в работе Е. Лигоцкой [1] в связи с вопросом о том, всякая ли открытая риманова поверхность является областью Римана над всей плоскостью $\mathbb{C}$. Е. Лигоцка доказала, что всякую конечносвязную область D, отличную от плоскости с выколотой точкой, можно конечнолистно и локально биголоморфно отобразить на $\mathbb{C}$. Однако оценить порядок листности не удалось.

Впоследствии этот результат Е. Лигоцкой был существенно усилен в [2, 3]. В частности, в работе [2] доказано (см. сформулированную ниже теорему А), что для некоторого определяемого далее класса областей D с изолированным граничным фрагментом существуют 3 -листные отображения области D на $\mathbb{C}$.

Определение [2]. Пусть D — область в $\mathbb{C}$. Будем говорить, что D имеет *изолированный граничный фрагмент,* если выполняется по крайней мере одно из следующих трех условий.

(I) Существуют невырожденный континуум $K \subset \partial D$ и открытое множество $\mathscr{U}$ такие, что $K \subset \mathscr{U}$ и $(\partial D\backslash K) \cap \mathscr{U} = \varnothing$. В этом случае будем говорить, что область D имеет *изолированный граничный фрагмент* I *рода.*

(II) Существует жорданова кривая $\Gamma \subset \partial D$ с концами ξ, η и открытый круг B, для которых $\Gamma\backslash\{\xi, \eta\} \subset B$, $\xi, \eta \in \partial B$ и $(\partial D\backslash\Gamma) \cap B = \varnothing$. Такие области будем называть областями с *изолированным граничным фрагментом* II *рода.*

(III) Область D имеет изолированную граничную точку. При этом будем говорить, что D имеет *изолированный граничный фрагмент* III *рода.*

Все конечносвязные области являются областями с изолированным граничным фрагментом. Например, единичный круг с выколотой точкой является областью, имеющей изолированные граничные фрагменты I, II и III рода. Однако класс областей с изолированным граничным фрагментом содержит и бесконечносвязные области.

Но бесконечносвязные области могут и не иметь изолированных граничных фрагментов. В качестве простейшего примера рассмотрим сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}$ с выброшенным из нее канторовым множеством на сегменте $[0, 1]$. Подействуем на $\overline{\mathbb{C}}$ мёбиусовым преобразованием $w = z/(z-1)$. Полученная в результате этой процедуры область $D \subset \mathbb{C}$ не имеет изолированных граничных фрагментов. Ее граница ∂D представляет собой нигде не плотное совершенное (т. е. замкнутое и не имеющее изолированных точек) множество на луче $[-\infty, 0]$.

Справедлива

Теорема А [2]. *Если область D, отличная от плоскости с выколотой точкой, имеет изолированный граничный фрагмент, то существует 3-листное локально биголоморфное отображение D на $\mathbb{C}$.*

В работах [2, 3] доказана точность константы листности 3 для локально биголоморфных отображений областей с изолированными граничными фрагментами I, II или III рода на комплексную плоскость.

В частности, теорема А утверждает возможность трехлистного локально биголоморфного отображения любой конечносвязной области, отличной от плоскости с выколотой точкой, на $\mathbb{C}$. Вторым автором работы [2] была высказана гипотеза о том, что теорема А с той же константой листности 3 справедлива для произвольных многосвязных областей, граница которых содержит более одной точки.

На пути к доказательству этой гипотезы была получена

Теорема B [3]. *Если D — произвольная область на $\mathbb{C}$, не имеющая изолированного граничного фрагмента, то существует 5-листное локально биголоморфное отображение D на $\mathbb{C}$.*

В настоящей работе приводится окончательное решение проблемы об оценке листности отображений многосвязных областей на комплексную плоскость.

Теорема. *Для любой многосвязной области D, граница которой содержит более двух точек, существует трехлистное локально биголоморфное отображение этой области на $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Поскольку множество ∂D не связно, его можно представить в виде объединения двух непересекающихся компактных в сферической топологии множеств E_1 и E_2. Пусть расстояние $\rho(E_1, E_2)$ между ними равно $d > 0$. Без ограничения общности можно считать, что это евклидово расстояние. Выберем точки $z_k \in E_k$, $k = 1, 2$, для которых $|z_1 - z_2| = d$. На интервале (z_1, z_2) как на диаметре построим открытый круг K_0. Покажем, что $K_0 \subset D$. Действительно, из определения точек z_1, z_2 следует, что либо $K_0 \subset D$, либо $K_0 \subset \mathbb{C}\backslash D$. Если предположить, что $K_0 \subset \mathbb{C}\backslash D$, то K_0 лежит в одной из попарно не пересекающихся односвязных областей G, образующих дополнение к области D. Тогда точки z_1, z_2, лежащие на границе области D, должны принадлежать также границе соответствующей односвязной области G, т. е. связной компоненте множества ∂D, что противоречит определению z_1 и z_2.

Как и в [3], рассмотрим семейство открытых кругов $\{K_t\}$, $t \in \mathbb{R}$, граничные окружности которых проходят через точки z_1, z_2, а центры имеют вид $c_t = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) + it(z_1 - z_2)$, т. е. расположены на серединном перпендикуляре отрезка $[z_1, z_2]$, причем значению параметра $t = 0$ соответствует круг K_0.

При непрерывном изменении параметра t от 0 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$ возникнет одна из следующих трех ситуаций.

1. Найдется такая точка $t_0 \in \mathbb{R}$, что $K_{t_0} \subset D$ и $\partial K_t \cap \partial D = \{z_1, z_2\}$ для любого t такого, что $|t| \leq |t_0|$, тогда как $K_t \not\subset D$ для $|t| > |t_0|$. Такая ситуация реализуется, например, когда граничные точки области D приближаются к z_1 или z_2 по касательной к окружности ∂K_{t_0}.

2. Найдется такая точка $t_0 \in \mathbb{R}$, что $K_{t_0} \subset D$ и на границе круга K_{t_0} расположено более двух граничных точек области D, тогда как $\partial K_t \cap \partial D = \{z_1, z_2\}$ для $|t| < |t_0|$.

3. Не существует точки t_0, удовлетворяющей условиям 1 или 2.

Рассмотрим эти ситуации по порядку. Для определенности будем считать, что $t_0 \geq 0$.

1. Пусть Φ — дробно-линейное преобразование, отображающее круг K_{t_0} на верхнюю полуплоскость H^+, такое, что $\Phi(z_1) = 0$, $\Phi(z_2) = \infty$. Символом $\widetilde{D}$ обозначим образ области D при отображении Φ. В силу определения круга K_{t_0} в этом случае $H^+ \subset \widetilde{D}$ и $\partial H^+ \cap \partial\widetilde{D} = \{0, \infty\}$. Поскольку при любом $\varepsilon > 0$ круг $K_{t_0+\varepsilon}$ имеет непустое пересечение с областью D, найдется последовательность расположенных в нижней полуплоскости граничных точек области $\widetilde{D}$, по

касательной к оси абсцисс приближающаяся к точке 0 или точке ∞. Не умаляя общности, можно считать, что такая последовательность по касательной к действительной оси стремится к началу координат. В противном случае подвергнем область $\widetilde{D}$ дополнительному преобразованию $w = -1/z$. Кроме того, далее будем предполагать, что рассматриваемая последовательность расположена в третьей координатной четверти. В симметричном случае (когда последовательность приближается к нулю из четвертой четверти) будут справедливы рассуждения, аналогичные приводимым ниже.

Рассмотрим выпуклую оболочку $\mathscr{C}$ множества граничных точек области $\widetilde{D}$, расположенных в пересечении третьей четверти координатной плоскости с вертикальной полосой $\{z : -\delta_0 \le \operatorname{Re} z \le 0\}$, где δ_0 — некоторое фиксированное положительное число.

Поскольку на границе круга K_{t_0} нет других граничных точек области D, кроме z_1 и z_2, для любого сколь угодно малого значения $\delta > 0$ и для любого сколь угодно большого значения $\Delta > \delta$ найдется такое $y_\delta < 0$, что прямоугольник $R_\delta = (-\Delta, -\delta] \times (y_\delta, 0]$ содержится в $\widetilde{D}$. Выберем $\delta > 0$ настолько малым, что R_δ имеет непустое пересечение с выпуклым множеством $\mathscr{C}$, и обозначим символом L_δ часть верхней граничной дуги множества $\mathscr{C}$, расположенную в вертикальной полосе $-\delta \le \operatorname{Re} z \le 0$. Дуга L_δ касается действительной оси в точке 0 и выше кривой L_δ нет граничных точек области $\widetilde{D}$. Однако на самой дуге L_δ имеется последовательность точек ζ_n из $\partial\widetilde{D}$, стремящаяся к началу координат, причем $\zeta_n = x_n + iy_n$, $y_n < 0$, $x_n \to 0-$ при $n \to \infty$.

Заметим, что в силу выпуклости кривой L_δ луч, выходящий из начала координат в направлении точки ζ_n, попадает в область $\widetilde{D}$ при пересечении L_δ в точке ζ_n и остается в этой области по крайней мере до выхода из прямоугольника R_δ в некоторой точке ξ_n, расположенной на его нижней или левой стороне. Поскольку при $n \to \infty$ точки ζ_n стремятся к нулю, применяя для $n \in \mathbb{N}$ дополнительные линейные преобразования $A_n(z) = z/|\zeta_n|$, добьемся того, что $|A_n(\zeta_n)| = 1$ и $|A_n(\xi_n)| > 3/2$ при $n > N_0$. Фиксируем такое $n > N_0$ и сохраним за образами точек ζ_n и ξ_n, а также за образом области $\widetilde{D}$ при отображении A_n их прежние обозначения. Тогда $\frac{3}{2}\zeta_n$ принадлежит области $\widetilde{D}$.

Рассмотрим полином $P(z) = \frac{1}{3}z^3 - \frac{\zeta_n}{2}z^2 = \frac{z^2}{3}\big(z - \frac{3}{2}\zeta_n\big)$. Поскольку $P'(z) = z(z - \zeta_n)$, полином $P(z)$ обладает свойством локальной однолистности во всех точках плоскости, кроме точек 0 и ζ_n, которые не принадлежат области $\widetilde{D}$. Следовательно, P конформно и не более чем трехлистно отображает область $\widetilde{D}$.

Покажем, что $P(\widetilde{D}) = \mathbb{C}$. Поскольку $P\big(\frac{3}{2}\zeta_n\big) = 0$, $\frac{3}{2}\zeta_n \in \widetilde{D}$, достаточно показать, что для любого $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ уравнение $P(z) = w$ имеет решение в $\widetilde{D}$. Обозначим через $u_k \ne 0$, $k = 1, 2, 3$, корни этого уравнения. По теореме Виета $u_1^{-1} + u_2^{-1} + u_3^{-1} = 0$, следовательно, найдется такое u_k, что $\operatorname{Im} u_k \ge 0$. Поэтому $u_k \in \widetilde{D}$, так как $H^+ \cup \mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \widetilde{D}$.

Таким образом, $P(\widetilde{D}) = \mathbb{C}$, и исходная область D может быть трехлистно и локально биголоморфно отображена на комплексную плоскость композицией $P \circ A_n \circ \Phi$, что и требуется.

2. Пусть на границе круга K_{t_0} имеется по крайней мере еще одна граничная точка области D помимо z_1 и z_2. При этом следует рассмотреть следующие ситуации.

(a) Если множество $\partial D \cap \partial K_{t_0}$ имеет изолированную точку z^*, то обозначим символами z' и z'' концы двух открытых дуг окружности ∂K_{t_0}, свободных от точек множества ∂D и смежных с точкой z^*. Будем считать, что точки z', z^*, z'' следуют по окружности ∂K_{t_0} в положительном направлении обхода. Дробно-линейным преобразованием $\Phi(z)$ отобразим круг K_{t_0} на верхнюю полуплоскость H^+ так, чтобы точка z^* перешла в ∞, а дуги (z', z^*) и (z^*, z'') перешли в лучи $(1, +\infty)$ и $(-\infty, -1)$ соответственно. Образом области D при данном отображении будет некоторая область $\widetilde{D}$, включающая в себя H^+ и указанные лучи, причем ∞, -1, $1 \in \partial\widetilde{D}$. В работе [2] доказано, что полином $P(z) = z^3 - 3z$ трехлистно и локально биголоморфно отображает $H^+ \cup (1, +\infty) \cup \{-2\}$ на всю плоскость $\mathbb{C}$. Тогда композиция $P \circ \Phi$ реализует искомое отображение.

(б) Если множество $\partial D \cap \partial K_{t_0}$ не имеет изолированных точек, то, как и в п. (а), с помощью мёбиусова преобразования Φ отобразим круг K_{t_0} на верхнюю полуплоскость H^+ так, чтобы луч $(0, +\infty)$ оказался свободен от образов граничных точек области D. Это возможно, так как точки z_1, z_2 принадлежат различным граничным компонентам области D, а следовательно, на дугах окружности ∂K_{t_0}, соединяющих z_1 и z_2, имеются интервалы, свободные от граничных точек множества D. Пусть $\widetilde{D}$ — образ области D, а $X = \Phi(\partial D \cap \partial K_{t_0})$. Очевидно, что X — замкнутое множество на неположительном луче вещественной оси, причем 0 — неизолированная точка множества X.

Если в множестве X найдется такая точка x^*, что $\frac{3}{2}x^* \notin X$, то применим к области $\widetilde{D}$ преобразование $L(z) = \frac{2z}{|x^*|} + 1$, переводящее верхнюю полуплоскость H^+ в себя, а точки $\frac{3}{2}x^*$, x^* и 0 — в точки -2, -1 и 1 соответственно. Затем применим отображение $P(z) = z^3 - 3z$. В [2] показано, что $P(H^+ \cup (1, +\infty) \cup \{-2\}) = \mathbb{C}$. Таким образом, композиция $P \circ L$ локально биголоморфно и трехлистно отображает $\widetilde{D}$ на $\mathbb{C}$.

Теперь рассмотрим случай, когда для всех точек x множества X выполняется условие

$$x \in X \Rightarrow \frac{3}{2}x \in X. \tag{$*$}$$

Поскольку множество X замкнуто, дополнением к нему на отрицательном луче действительной оси служит объединение дизъюнктных интервалов I_k, $k \in \mathbb{N}$. Предположим сначала, что среди совокупности этих интервалов найдется такой интервал I_k, что для его левой концевой точки x^*, $x^* < 0$, точка $\frac{3}{2}x^*$ также является левым концом некоторого интервала I_m, т. е. существует такое $a > 0$, что $\frac{3}{2}x^* + a \in \partial\widetilde{D}$ и $\left(\frac{3}{2}x^*, \frac{3}{2}x^* + a\right) \subset \widetilde{D}$.

Поскольку 0 — неизолированная точка множества X, найдется такая последовательность точек $x_n \in X$, что $x_n \to 0-$ при $n \to \infty$. Рассмотрим множества $X_n = X - x_n$, полученные сдвигом X на x_n. Для достаточно больших номеров n точки $\frac{3}{2}(x^* - x_n)$ не принадлежат множествам X_n, так как иначе точки $\frac{3}{2}x^* - \frac{1}{2}x_n$ лежали бы в X, что противоречит тому, что в интервале $\left(\frac{3}{2}x^*, \frac{3}{2}x^* + a\right)$ нет точек из X.

Для таких номеров n определим $k_n = \frac{2}{x_n - x^*}$ и рассмотрим линейное преобразование $A_n(z) = 1 + k_n z$, при котором множества X_n преобразуются в $Y_n = 1 + k_n X_n$, а точки $-x_n$, 0, $x^* - x_n$, $\frac{3}{2}x^* + a - x_n$ и $\frac{3}{2}x^* - x_n$, принадлежащие X_n, перейдут соответственно в $a_n = 1 - k_n x_n$, 1, -1, $c_n = \frac{1}{2}k_n x_n - 2 + k_n a$ и $b_n = \frac{1}{2}k_n x_n - 2$, расположенные на действительной оси в порядке убывания. Заметим, что, поскольку интервалы $\left(\frac{3}{2}x^* - x_n, \frac{3}{2}x^* + a - x_n\right)$ и $(-x_n, +\infty)$ свободны от точек множеств X_n, интервалы (b_n, c_n) и $(a_n, +\infty)$ также свободны от точек из Y_n, причем $-2 = A_n\left(\frac{3}{2}(x^* - x_n)\right) \in (b_n, c_n)$ при любом n. При этом, выбирая достаточно большие номера n, можно добиться того, что точки a_n будут лежать в сколь угодно малой заранее заданной правой полуокрестности точки 1, а точки c_n окажутся смещены вправо от точки -2 на величину, сколь угодно близкую к $-2\frac{a}{x^*}$.

Пусть Ω_n — области, полученные из $\widetilde{D}$ последовательными преобразованиями $L_n(z) = z - x_n$ и $A_n(z) = 1 + k_n z$. Каждая область Ω_n содержит верхнюю полуплоскость, луч $(a_n, +\infty)$ и интервал (b_n, c_n).

Применим к Ω_n отображение $P(z) = z^3 - 3z$. Его критические точки -1, 1 лежат в Y_n. Луч $(1, +\infty)$ под действием преобразования $P(z)$ перейдет в луч $(-2, +\infty)$, а значит, $(a_n, +\infty)$ отобразится на $(-2 + \delta_n, +\infty)$, где $\delta_n > 0$, и стремится к нулю при $n \to \infty$. Аналогично образом интервала $(-2, -2(1 + a/x^*))$ является интервал $(-2, -2 + \alpha)$ с некоторым $\alpha > 0$ и, следовательно, образами (b_n, c_n) будут интервалы $(-2 - \varepsilon_n, -2 + \alpha + \beta_n)$, где $\varepsilon_n > 0$ и ε_n, β_n стремятся к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что образы интервалов (b_n, c_n) и $(a_n, +\infty)$ при отображении $P(z)$ и достаточно больших n покрывают луч $[-2, +\infty)$, т. е. область $P(\Omega_n)$ содержит $P(H^+ \cup [1, +\infty))$. А в [2] показано, что $P(H^+ \cup [1, +\infty)) = \mathbb{C}$.

Таким образом, композиция $P \circ A_n \circ L_n \circ \Phi$ трехлистно и локально биголоморфно отображает D на $\mathbb{C}$, что и требуется.

Остается рассмотреть случай, когда среди совокупности интервалов $\{I_k\}$ не существует такого, что для его левой концевой точки x^* точка $\frac{3}{2}x^*$ также является левым концом некоторого интервала смежности. Это значит, что в силу свойства $(*)$ $\frac{3}{2}X \subset X$, но $\frac{2}{3}X \not\subset X$, т. е. $\frac{3}{2}X \neq X$. Тогда рассмотрим автоморфизм $w = 1/z$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, при котором верхняя полуплоскость H^+ отобразится на нижнюю полуплоскость H^-, а множество X — на множество Y, также расположенное на неположительном луче действительной оси и включающее в себя 0 и ∞. Очевидно, что в силу включения $\frac{3}{2}X \subset X$ для всех элементов y множества Y справедливо соотношение

$$y \in Y \Rightarrow \frac{2}{3}y \in Y. \tag{$**$}$$

Если в множестве Y найдется такой элемент y^*, для которого условие $(*)$ не выполняется, т. е. $\frac{3}{2}y^* \notin Y$, то к множеству Y применимы рассуждения, изложенные в начале п. (б) (с учетом того, что $P(H^+) = P(H^-)$) и доказывающие возможность построения трехлистного отображения D на $\mathbb{C}$.

Иначе для всех элементов множества Y одновременно выполняются условия $(*)$ и $(**)$, т. е.

$$y \in Y \Rightarrow \frac{3}{2}y \in Y \text{ и } \frac{2}{3}y \in Y,$$

что приводит к равенству $\frac{2}{3}Y = Y$, а значит, и $\frac{3}{2}X = X$; противоречие с предположением $\frac{3}{2}X \neq X$.

3. Если в семействе кругов K_t не существует круга K_{t_0}, удовлетворяющего условиям 1 или 2, то это означает, что все граничные точки области D расположены на прямой l, проходящей через точки z_1, z_2, причем интервал (z_1, z_2) лежит в D. Как и в случае 2, искомое трехлистное отображение D на $\mathbb{C}$ строится в зависимости от того, содержит ли граница ∂D области D изолированную точку или все точки ∂D являются предельными для этого множества. Эти случаи анализируются также, как и в пп. (а) и (б) соответственно.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает

Следствие. *Пусть D_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — произвольные области в $\mathbb{C}$, отличные от плоскости с выброшенной точкой. Тогда существует локально биголоморфное 3^n-листное отображение поликруговой области $D = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n$ на $\mathbb{C}^n$.*

Авторы выражают благодарность профессору С. Р. Насырову за участие в обсуждении исследуемой в статье проблемы. Авторы благодарят рецензента за замечания, приведшие к сокращениям в доказательстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ligocka E.* On locally biholomorphic surjective mappings // Ann. Pol. Math. 2003. V. 82, N 2. P. 127–135.
2. *Liczberski P., Starkov V.* On locally biholomorphic mappings from multi connected onto simply connected domains // Ann. Pol. Math. 2005. V. 85, N 2. P. 135–143.
3. *Старков В. В.* Локально биголоморфные отображения многосвязных областей // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 914–922.

Статья поступила 19 октября 2007 г., окончательный вариант — 20 февраля 2008 г.

Граф Сергей Юрьевич
Тверской гос. университет, математический факультет,
Садовый пер., 35, Тверь 170002
`Sergey.Graf@tversu.ru`

Старков Виктор Васильевич
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185910
`Vstar@psu.karelia.ru`