Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.51

ТЕОРЕМА СОБОЛЕВА — ИЛЬИНА ДЛЯ B–ПОТЕНЦИАЛА РИССА

В. С. Гулиев, Н. Н. Гараханова

Аннотация. Исследованы потенциалы Рисса, порожденные оператором обобщенного сдвига, ассоциированного с оператором Лапласа — Бесселя. Получен аналог теоремы Соболева — Ильина для B-потенциала Рисса.

Ключевые слова: оператор обобщенного сдвига, B-потенциал Рисса, теорема Соболева — Ильина.

Введение

В исследованиях С. Л. Соболева впервые получены и существенно использованы интегральные представления функций через ее частные производные. Подобные представления в последующем стали одним из основных инструментов исследования в теории вложений (см. [1, 2]). Разработанный С. Л. Соболевым метод интегральных представлений включает в качестве существенного элемента оценки интегралов типа потенциала. Эти важные оценки (обобщающие одномерные оценки Харди — Литтлвуда) получены С. Л. Соболевым в работе [3] и в дальнейшем дополнены В. П. Ильиным в [4], а именно, для потенциала Рисса $I^\alpha f(x) = (|\cdot|^{\alpha-N} * f)(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $0 < \alpha < N$, было получено известное вложение Соболева — Ильина $L_p(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^m)$, $1 < p < q < \infty$, $1 \le m \le N$, $\frac{N}{p} - \frac{m}{q} = \alpha$.

С помощью преобразования Фурье — Бесселя для оператора Лапласа — Бесселя

$$\Delta_B = \sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{i=n+1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad B = (B_1, \dots, B_n),\ B_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, И. А. Киприяновым и Л. А. Ивановым [5] (см. также [6, 7]) найдено фундаментальное решение в виде потенциала Рисса (B-потенциала Рисса). В работе с помощью оператора обобщенного сдвига, порожденного оператором Лапласа — Бесселя Δ_B, изучен B-потенциал Рисса, а именно, для него доказан аналог теоремы Соболева — Ильина в пространстве $L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+}) = L_p(\mathbb{R}^N_{n,+}; x^\gamma_{1,n} dx)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Азербайджан — США двусторонней грант-программы (проект ANSF Award / AZMr–3110–BA–08), а также гранта INTAS (project 05–1000008–8157).

Некоторые обозначения

Пусть $\mathbb{R}^N$ — N-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_N)$, $|x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{1/2}$, $1 \le n \le N-1$, $N \ge 2$, $x_{1,n} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1,N} = (x_{n+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-n}$, т. е. $x = (x_{1,n}, x_{n+1,N})$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^N$. Пусть также $\mathbb{R}^N_{n,+} = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, $\gamma \equiv \gamma_{1,n} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_1 > 0, \dots, \gamma_n > 0$, $x_{1,n}^{\gamma} = x_1^{\gamma_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\gamma_n}$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$, $|E|_\gamma = \int\limits_E x_{1,n}^{\gamma} dx$, где E — измеримое множество в $\mathbb{R}^N_{n,+}$.

Пусть $1 \le m \le N$. В случае $1 \le m < n \le N$ будем иметь в виду, что $x_{1,n} = (x_{1,m}, x_{m+1,n})$, где $x_{m+1,n} = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$, а также $\gamma = (\gamma_{1,m}, \gamma_{m+1,n})$, где $\gamma_{1,m} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_{m+1,n} = (\gamma_{m+1}, \dots, \gamma_n)$, а в случае $1 \le n < m \le N$ будем иметь в виду, что $x_{1,m} = (x_{1,n}, x_{n+1,m})$, где $x_{n+1,m} = (x_{n+1}, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m-n}$. Для $1 \le n < m$ определим пространство $\mathbb{R}^m_{n,+} = \{x_{1,m} \in \mathbb{R}^m : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$, а для $m < n$ положим $\mathbb{R}^m_{+,+} = \{x_{1,m} \in \mathbb{R}^m;\ x_1 > 0, \dots, x_m > 0\}$ и $\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+} = \{x_{m+1,N} \in \mathbb{R}^{N-m};\ x_{m+1} > 0, \dots, x_n > 0\}$, $|E|_{\gamma_{1,m}} = \int\limits_E x_{1,m}^{\gamma_{1,m}} dx$, где E — измеримое множество в $\mathbb{R}^N_{n,+}$.

Через $L_{p,\gamma} = L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$ обозначим пространство всех измеримых функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^N_{n,+}$, с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})} = \|f\|_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} |f(x)|^p x_{1,n}^{\gamma} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Положим $L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+}) = L_\infty(\mathbb{R}^N_{n,+})$, где $L_\infty(\mathbb{R}^N_{n,+})$ — множество всех существенно ограниченных функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{\infty,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})} = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^N_{n,+})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^N_{n,+}} |f(x)|.$$

Оператор обобщенного сдвига (B-сдвига) определяется следующим образом (см. [5, 7]):

$$T^y f(x) = C_\gamma \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi f((x_{1,n}, y_{1,n})_\alpha, x_{n+1,N} - y_{n+1,N})\, d\nu(\alpha),$$

где $C_\gamma = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} \Gamma((\gamma_i + 1)/2)\, \Gamma^{-1}(\gamma_i/2)$, $(x_{1,n}, y_{1,n})_\alpha = ((x_1, y_1)_{\alpha_1}, \dots, (x_n, y_n)_{\alpha_n})$, $(x_i, y_i)_{\alpha_i} = \sqrt{x_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha_i + y_i^2}$, $1 \le i \le n$, $d\nu(\alpha) = \prod\limits_{i=1}^{n} \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i\, d\alpha_1 \dots d\alpha_n$, $1 \le n \le N$.

Введем следующие дополнительные обозначения: в случае $1 \le n < m \le N$

$$(x_{1,m}, y_{1,m})_{\alpha_{1,m}} = ((x_{1,n}, y_{1,n})_\alpha, x_{n+1,m} - y_{n+1,m}),$$

$$T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} f(x) = C_\gamma \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi f((x_{1,n}, y_{1,n})_\alpha, x_{n+1,m} - y_{n+1,m}, x_{m+1,n})\, d\nu(\alpha),$$

а в случае $1 \le m < n \le N$

$$(x_{1,m}, y_{1,m})_{\alpha_{1,m}} = ((x_1, y_1)_{\alpha_1}, \dots, (x_m, y_m)_{\alpha_m}),$$

$$(x_{m+1,n}, y_{m+1,n})_{\alpha_{m+1,n}} = ((x_{m+1}, y_{m+1})_{\alpha_{m+1}}, \ldots, (x_n, y_n)_{\alpha_n}),$$

$$T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} f(x) = C_{\gamma_{1,m}} \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi f((x_{1,m}, y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}, x_{m+1,n})\, d\nu(\alpha_{1,m}),$$

$$T^{y_{m+1,N}}_{x_{m+1,N}} f(x) = C_{\gamma_{m+1,n}} \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi f(x_{1,m}, \\ (x_{m+1,n}, y_{m+1,n})_{\alpha_{m+1,n}}, x_{n+1,N} - y_{n+1,N})\, d\nu(\alpha_{m+1,n}),$$

где

$$C_{\gamma_{1,m}} = \pi^{-\frac{m}{2}} \prod_{i=1}^m \Gamma((\gamma_i+1)/2)\, \Gamma^{-1}(\gamma_i/2), \;\; d\nu(\alpha_{1,m}) = \prod_{i=1}^m \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \, d\alpha_1 \ldots d\alpha_m,$$

$$C_{\gamma_{m+1,n}} = \pi^{-\frac{n-m}{2}} \prod_{i=m+1}^n \Gamma((\gamma_i+1)/2)\, \Gamma^{-1}(\gamma_i/2),$$

$$d\nu(\alpha_{m+1,n}) = \prod_{i=m+1}^n \sin^{\gamma_i - 1} \alpha_i \, d\alpha_{m+1} \ldots d\alpha_n.$$

Заметим, что в случае $1 \leq m < n \leq N$

$$T^y f(x) = T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} T^{y_{m+1,N}}_{x_{m+1,N}} f(x), \quad C_\gamma = C_{\gamma_{1,m}} C_{\gamma_{m+1,n}}.$$

Основные результаты

Для B-потенциала Рисса

$$I^\alpha_\gamma f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y |x|^{\alpha - N - |\gamma|} f(y) y^\gamma_{1,n}\, dy, \quad 0 < \alpha < N + |\gamma|,$$

справедлива следующая теорема Соболева.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha < N + |\gamma|$.

(a) *Если* $1 \leq p < \frac{N+|\gamma|}{\alpha}$, $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, *то интеграл* $I^\alpha_\gamma f$ *абсолютно сходится для почти всех* $x \in \mathbb{R}^N_{n,+}$.

(b) *Если* $1 < p < \frac{N+|\gamma|}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N+|\gamma|}$, $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, *то* $I^\alpha_\gamma f \in L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$ *и*

$$\left\| I^\alpha_\gamma f \right\|_{q,\gamma} \leq C \|f\|_{p,\gamma},$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* f.

(c) *Если* $f \in L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, $1/q = 1 - \frac{\alpha}{N+|\gamma|}$, *то*

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^N_{n,+} : I^\alpha_\gamma f(x) > \beta \right\} \right|^{1/q}_\gamma \leq \frac{C}{\beta} \|f\|_{1,\gamma}.$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* f.

Замечание 1. Теорема 1 разными методами доказана в [8, 9], см. также [10]. В случае $n = 1$ теорема 1 доказана в [11], а в случае $n = N$ — в [12], см. также [13].

Замечание 2. На примерах можно показать (см., например, [13, с. 323]), что если $p \geq \frac{N+|\gamma|}{\alpha}$, то B-потенциал Рисса $I^\alpha_\gamma f$ не определен для всех функций $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$.

В работе доказаны следующие две основные теоремы, являющиеся аналогом теоремы Соболева — Ильина для B-потенциала Рисса.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \alpha < N + |\gamma|$, $1 \le p < \frac{N+|\gamma|}{\alpha}$, $1 \le m < n \le N$.

(a) *Если* $f \in L_{p,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$, *то для любого* $x_{m+1,N} \in \mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+}$ *для почти всех* $x_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{+,+}$ *существует* B*-потенциал Рисса* $I^\alpha_\gamma f(x)$.

(b) *Если* $1 < p < \frac{N+|\gamma|}{\alpha}$, $f \in L_{p,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$, $\alpha = \frac{N+|\gamma|}{p} - \frac{m+|\gamma_{1,m}|}{q}$, *то*

$$I^\alpha_\gamma f(\cdot, x_{m+1,N}) \in L_{q,\gamma_{1,m}}\big(\mathbb{R}^m_{+,+}\big)$$

для любого $x_{m+1,N} \in \mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+}$ *и*

$$\big\| I^\alpha_\gamma f(\cdot, x_{m+1,N}) \big\|_{L_{q,\gamma_{1,m}}(\mathbb{R}^m_{+,+})} \le C \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})}, \tag{1}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* f *и* $x_{m+1,N}$.

(c) *Если* $f \in L_{1,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$, $\alpha = N + |\gamma| - \frac{m+|\gamma_{1,m}|}{q}$, *то для любого* $x_{m+1,N} \in \mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+}$

$$\big| \big\{ x_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{+,+} : \big| I^\alpha_\gamma f(x_{1,m}, x_{m+1,N}) \big| > \beta \big\} \big|^{1/q}_{\gamma_{1,m}} \le \frac{C}{\beta} \|f\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})}, \tag{2}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* f *и* $x_{m+1,N}$.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha < N + |\gamma|$, $1 \le p < \frac{N+|\gamma|}{\alpha}$, $1 \le n \le m \le N$.

(a) *Если* $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, *то для любого* $x_{m+1,N} \in \mathbb{R}^{N-m}$ *для почти всех* $x_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{n,+}$ *существует* B*-потенциал Рисса* $I^\alpha_\gamma f(x)$.

(b) *Если* $1 < p < \frac{N+|\gamma|}{\alpha}$, $f \in L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$, $\frac{N+|\gamma|}{p} - \frac{m+|\gamma|}{q} = \alpha$, *то* $I^\alpha_\gamma f(\cdot, x_{m+1,N}) \in L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^m_{n,+})$ *для любого* $x_{m+1,N} \in \mathbb{R}^{N-m}$ *и*

$$\big\| I^\alpha_\gamma f(\cdot, x_{m+1,N}) \big\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^m_{n,+})} \le C \|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})}, \tag{3}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* f *и* $x_{m+1,N}$.

(c) *Если* $f \in L_{1,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$, $\alpha = N + |\gamma| - \frac{m+|\gamma|}{q}$, *то для любого* $x_{m+1,N} \in \mathbb{R}^{N-m}$

$$\big| \big\{ x_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{n,+} : \big| I^\alpha_\gamma f(x_{1,m}, x_{m+1,N}) \big| > \beta \big\} \big|^{1/q}_{\gamma} \le \frac{C}{\beta} \|f\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})}, \tag{4}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* f *и* $x_{m+1,N}$.

Замечание 3. Для анизотропного B-потенциала Рисса аналог неравенства (3) при $n = 1$, $1 < m \le N$ получен в [14].

Вспомогательные леммы

Для доказательства теорем 2 и 3 используются следующие две вспомогательные леммы, доказательство которых приводится здесь же.

Лемма 1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $1 \le m < n \le N$, $x = (x_{1,m}, x_{m+1,N})$, $x_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{+,+}$, $x_{m+1,N} \in \mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+}$, $0 < \alpha < \frac{N+|\gamma|}{p} + \frac{m+|\gamma_{1,m}|}{p'}$ $(0 < \alpha < N + |\gamma|$ *в случае* $p = 1)$. *Тогда существует постоянная* C_1, *зависящая от* p, m, n, α, γ, *такая, что для всех* $f \in L^{\mathrm{loc}}_{1,\gamma}\big(\mathbb{R}^N_{n,+}\big)$ *и любых* $x \in \mathbb{R}^N_{n,+}$ *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y |x|^{\alpha - N - |\gamma|} |f(y)| y^\gamma_{1,n}\, dy \\ &\le C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{\alpha - (\frac{N+|\gamma|}{p} + \frac{m+|\gamma_{1,m}|}{p'})} \|f(y_{1,m}, \cdot)\|_{L_{p,\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})} y^{\gamma_{1,m}}_{1,m}\, dy_{1,m}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $C_1 = \|(1+|x_{m+1,n}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}}\|_{L_{p',\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})}$, $p' = \frac{p}{p-1}$, *в случае* $p>1$ *и* $C_1 = C_{\gamma_{m+1,n}}$ *в случае* $p=1$.

Доказательство. Рассмотрим случай $p=1$. Имеем

$$T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|} = C_\gamma \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi |((x_{1,n},y_{1,n})_\alpha, x_{n+1,N}-y_{n+1,N})|^{\alpha-N-|\gamma|}\,d\nu(\alpha)$$

$$\le C_\gamma \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi |(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|^{\alpha-N-|\gamma|}\,d\nu(\alpha_{1,m}) = C_{\gamma_{m+1,n}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|}.$$

С учетом последнего неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy \le C_{\gamma_{m+1,n}} \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy$$

$$= C_{\gamma_{m+1,n}} \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|}\|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_{1,\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})} y^{\gamma_{1,m}}_{1,m}\,dy_{1,m}.$$

Следовательно, при $p=1$ неравенство (5) справедливо с постоянной $C_1 = C_{\gamma_{m+1,n}}$.

Пусть теперь $p>1$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} F(x,y_{1,m})y^{\gamma_{1,m}}_{1,m}\,dy_{1,m},$$

где

$$F(x,y_{1,m}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+}} T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^{\gamma_{m+1,n}}_{m+1,n}\,dy_{m+1,N}.$$

Из конечности правой части неравенства (5) следует, что для почти всех $y_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{+,+}$

$$\|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_{p,\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})} < \infty.$$

Применяя неравенство Гёльдера для $F(x,y_{1,m})$, имеем

$$F(x,y_{1,m}) \le \|T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p',\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})}\|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_{p,\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})}.$$

Оценим норму $\|T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p',\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})}$. Отметим что,

$$T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|} = T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} T^{y_{m+1,N}}_{x_{m+1,N}}(|x_{1,m}|^2+|x_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}}$$

$$= C_{\gamma_{1,m}} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi T^{y_{m+1,N}}_{x_{m+1,N}}(|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|^2+|x_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}}\,d\nu(\alpha_{1,m}).$$

Используя обобщенное неравенство Минковского, неравенство Гёльдера и свойство оператора обобщенного сдвига, придем к неравенству

$$\|T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p',\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})} \le C_{\gamma_{1,m}} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi J(x_{1,m},y_{1,m},\alpha_{1,m})d\nu(\alpha_{1,m}),$$

где

$$J(x_{1,m},y_{1,m},\alpha_{1,m})=\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+}}(|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|^2 + |y_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}p'}y_{m+1,n}^{\gamma_{m+1,n}}\,dy_{m+1,N}\Bigg]^{1/p'}$$
$$=|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|^{\alpha-N-|\gamma|}\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+}}\bigg(1+\bigg(\frac{|y_{m+1,N}|}{|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|}\bigg)^2\bigg)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}p'} \times y_{m+1,n}^{\gamma_{m+1,n}}dy_{m+1,N}\Bigg]^{1/p'}.$$

Делая замену переменных $\frac{y_{m+1,N}}{|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|}=z_{m+1,N}$ и учитывая, что

$$y_{m+1,N}=|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|z_{m+1,N},\quad dy_{m+1,N}=|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|^{N-m}\,dz_{m+1,N},$$
$$y_{m+1,n}^{\gamma_{m+1,n}}\,dy_{m+1,N}=|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|^{N-m+|\gamma_{m+1,n}|}z_{m+1,n}^{\gamma_{m+1,n}}\,dz_{m+1,N},$$

получим

$$J(x_{1,m},y_{1,m},\alpha_{1,m})=C_1|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|^{(\alpha-N-|\gamma|)+\frac{N-m+|\gamma_{m+1,n}|}{p'}},$$

где

$$C_1=\Bigg[\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+}}(1+|z_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}p'}z_{m+1,n}^{\gamma_{m+1,n}}\,dz_{m+1,N}\Bigg]^{1/p'}$$
$$=\|(1+|z_{m+1,n}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}}\|_{L_{p',\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})}<\infty.$$

Следовательно,

$$\|T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p',\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})}\le C_1C_{\gamma_{1,m}}\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^\pi|(x_{1,m},y_{1,m})_{\alpha_{1,m}}|^{\alpha-N-|\gamma|+\frac{N-m+|\gamma_{m+1,n}|}{p'}}d\nu(\alpha_{1,m})$$
$$=C_1T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|+\frac{N-m+|\gamma_{m+1,n}|}{p'}}.$$

Так как

$$\alpha-N-|\gamma|+\frac{N-m+|\gamma_{m+1,n}|}{p'}=\alpha-\bigg(N+|\gamma|-\frac{N-m+|\gamma_{m+1,n}|}{p'}\bigg)$$
$$=\alpha-\bigg(\frac{N+|\gamma|}{p}+\frac{m+|\gamma_{1,m}|}{p'}\bigg),$$

имеем

$$\|T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p',\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})}\le C_1T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-(\frac{N+|\gamma|}{p}+\frac{m+|\gamma_{1,m}|}{p'})}.$$

Подставляя полученные оценки, придем к неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy$$

$$\le C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-(\frac{N+|\gamma|}{p}+\frac{m+|\gamma_{1,m}|}{p'})}\|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_{p,\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})}y^{\gamma_{1,m}}_{1,m}\,dy_{1,m}.$$

Следовательно, при $p>1$ неравенство (5) справедливо с постоянной $C_1>0$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $1\le p<\infty$, $1\le n\le m\le N$, $x=(x_{1,m},x_{m+1,N})$, $x_{1,m}\in\mathbb{R}^m_{n,+}$, $x_{m+1,N}\in\mathbb{R}^{N-m}$, $0<\alpha<|\gamma|+\frac{N}{p}+\frac{m}{p'}$ ($0<\alpha<N+|\gamma|$ в случае $p=1$). Тогда существует постоянная C_2, зависящая от p,m,n,α,γ, такая, что для любого $f\in L^{\mathrm{loc}}_{1,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})$ и всех $x\in\mathbb{R}^N_{n,+}$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy$$

$$\le C_2\int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-|\gamma|-(\frac{N}{p}+\frac{m}{p'})}\|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^{N-m})}y^\gamma_{1,n}\,dy_{1,m}, \qquad (6)$$

где $C_2=\|(1+|x_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^{N-m})}$, $p'=\frac{p}{p-1}$ в случае $p>1$ и $C_2=1$ в случае $p=1$.

Доказательство. Рассмотрим случай $p=1$. Имеем

$$T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}=C_\gamma\int\limits_0^\pi ...\int\limits_0^\pi|((x_{1,n},y_{1,n})_\alpha,x_{n+1,m}-y_{n+1,m},x_{m+1,N}-y_{m+1,N})|\,d\nu(\alpha)$$

$$\le C_\gamma\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^\pi|((x_{1,n},y_{1,n})_\alpha,x_{n+1,m}-y_{n+1,m})|\,d\nu(\alpha)=T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy\le\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}}\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}dy_{1,m}dy_{m+1,N}$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|}\|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^{N-m})}y^\gamma_{1,n}dy_{1,m}.$$

Следовательно, при $p=1$ неравенство (6) справедливо с постоянной $C_2=1$.

Пусть теперь $p>1$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy=\int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} F(x,y_{1,m})y^\gamma_{1,n}\,dy_{1,m},$$

где

$$F(x, y_{1,m}) = \int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}} T^y |x|^{\alpha-N-|\gamma|} |f(y)|\, dy_{m+1,N}.$$

Из конечности правой части неравенства (6) следует, что для почти всех $y_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{n,+}$

$$\|f(y_{1,m}, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^{N-m})} < \infty.$$

Учитывая неравенство Гёльдера, для $F(x, y_{1,m})$ приходим к неравенству

$$F(x, y_{1,m}) \le \|T^y |x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^{N-m})} \|f(y_{1,m}, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^{N-m})}.$$

Оценим норму $\|T^y |x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^{N-m})}$. Отметим, что

$$T^y |x|^{\alpha-N-|\gamma|} = C_\gamma \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi \left[|(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha|^2 + \sum_{i=m+1}^N |x_i - y_i|^2 \right]^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}} d\nu(\alpha).$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского и равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}} (|(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha|^2 + |x_{m+1,N} - y_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2} p'} dy_{m+1,N}$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}} (|(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha|^2 + |y_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2} p'} dy_{m+1,N},$$

будем иметь

$$\|T^y |x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^{N-m})} \le C_\gamma \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi J(x_{1,m}, y_{1,m}, \alpha)\, d\nu(\alpha),$$

где

$$J(x_{1,m}, y_{1,m}, \alpha) = \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}} (|(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha|^2 + |y_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2} p'} dy_{m+1,N} \right]^{1/p'}$$

$$= |(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha|^{\alpha-N-|\gamma|} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}} \left(1 + \left(\frac{|y_{m+1,N}|}{|(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha|} \right)^2 \right)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2} p'} dy_{m+1,N} \right]^{1/p'}.$$

Делая замену переменных $\frac{y_{m+1,N}}{|(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha|} = z_{m+1,N}$ и учитывая, что

$$y_{m+1,N} = |(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha| z_{m+1,N}, \quad dy_{m+1,N} = |(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha|^{N-m} dz_{m+1,N},$$

получаем

$$J(x_{1,m}, y_{1,m}, \alpha) = C_2 |(x_{1,m}, y_{1,m})_\alpha|^{\alpha-N-|\gamma|+\frac{N-m}{p'}},$$

где

$$C_2 = \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{N-m}} (1 + |z_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2} p'} dz_{m+1,N} \right]^{1/p'}$$

$$= \|(1 + |z_{m+1,N}|^2)^{\frac{\alpha-N-|\gamma|}{2}}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^{N-m})} < \infty.$$

Следовательно,

$$\|T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^{N-m})} \le C_2 C_\gamma \int\limits_0^\pi \cdots \int\limits_0^\pi |(x_{1,m},y_{1,m})_\alpha|^{\alpha-N-|\gamma|+\frac{N-m}{p'}}\,d\nu(\alpha)$$
$$= C_2 T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|+\frac{N-m}{p'}}.$$

Так как $\alpha - N - |\gamma| + \frac{N-m}{p'} = \alpha - |\gamma| - \left(\frac{N}{p} + \frac{m}{p'}\right)$, то

$$\|T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^{N-m})} \le C_2 T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{\alpha-|\gamma|-(\frac{N}{p}+\frac{m}{p'})}.$$

Из полученных оценок имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy$$
$$\le C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-|\gamma|-(\frac{N}{p}+\frac{m}{p'})}\|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^{N-m})} y^\gamma_{1,n}\,dy_{1,m}.$$

Следовательно, при $p > 1$ неравенство (6) справедливо с постоянной $C_2 > 0$.

Лемма 2 доказана.

Доказательства теорем 2 и 3

Доказательство теоремы 2. Утверждение (a) теоремы 2 непосредственно следует из леммы 1 и теоремы 1. Докажем части (b) и (c) теоремы 2.

Рассмотрим случай $p = 1$. Из утверждения леммы 1 и теоремы 1 имеем

$$\left|\left\{x_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{+,+} : \left|I^\alpha_\gamma f(x_{1,m}, x_{m+1,N})\right| > \beta\right\}\right|^{1/q}_{\gamma_{1,m}}$$
$$\le \left|\left\{x_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{+,+} : \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_{1,\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})} y^{\gamma_{1,m}}_{1,m}\,dy_{1,m} > \frac{\beta}{C_1}\right\}\right|^{1/q}_{\gamma_{1,m}}$$
$$\le \frac{C_1}{\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} \|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_{1,\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})} y^{\gamma_{1,m}}_{1,m}\,dy_{1,m} = \frac{C_1}{\beta}\|f\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})}.$$

Теперь рассмотрим случай $1 < p < q < \infty$. Учитывая утверждение леммы 1 и делая замену переменных

$$h(y_{1,m}) = \|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_{p,\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})},$$

будем иметь

$$\left|I^\alpha_\gamma f(x)\right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y|x|^{\alpha-N-|\gamma|}|f(y)|y^\gamma_{1,n}\,dy$$
$$\le C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-(\frac{N+|\gamma|}{p}+\frac{m+|\gamma_{1,m}|}{p'})}\|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_{p,\gamma_{m+1,n}}(\mathbb{R}^{N-m}_{n-m,+})} y^{\gamma_{1,m}}_{1,m}\,dy_{1,m}$$
$$= C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}}|x_{1,m}|^{\alpha-(\frac{N+|\gamma|}{p}+\frac{m+|\gamma_{1,m}|}{p'})} h(y_{1,m}) y^{\gamma_{1,m}}_{1,m}\,dy_{1,m}.$$

Поскольку $\alpha - \frac{N+|\gamma|}{p} - \frac{m+|\gamma_{1,m}|}{p'} = -(m+|\gamma_{1,m}|)\big(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}\big)$, то

$$\big\|I_\gamma^\alpha f(\cdot, x_{m+1,N})\big\|_{L_{q,\gamma_{1,m}}(\mathbb{R}^m_{+,+})} \le C_1 \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{-(m+|\gamma_{1,m}|)(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q})} h(y_{1,m}) y_{1,m}^{\gamma_{1,m}}\, dy_{1,m} \Bigg\|_{L_{q,\gamma_{1,m}}(\mathbb{R}^m_{+,+})}.$$

Если учесть, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{-(m+|\gamma_{1,m}|)(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q})} h(y_{1,m}) y_{1,m}^{\gamma_{1,m}}\, dy_{1,m} = \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{\beta-m-|\gamma_{1,m}|} h(y_{1,m}) y_{1,m}^{\gamma_{1,m}}\, dy_{1,m} = I^\beta_{\gamma_{1,m}} h(x_{1,m}),$$

где $\beta = \frac{m+|\gamma_{1,m}|}{p} - \frac{m+|\gamma_{1,m}|}{q} > 0$, $N = n = m$, то, применяя теорему 1 при $N = n = m$ и учитывая, что $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{m+|\gamma_{1,m}|}$, получим

$$\big\|I_\gamma^\alpha f(\cdot, x_{m+1,N})\big\|_{L_{q,\gamma_{1,m}}(\mathbb{R}^m_{+,+})} = \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^m_{+,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{-(m+|\gamma_{1,m}|)(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q})} h(y_{1,m}) y_{1,m}^{\gamma_{1,m}}\, dy_{1,m} \Bigg\|_{L_{q,\gamma_{1,m}}(\mathbb{R}^m_{+,+})}$$
$$= \big\|I^\beta_{\gamma_{1,m}} h\big\|_{L_{q,\gamma_{1,m}}(\mathbb{R}^m_{+,+})} \le C\|h\|_{L_{p,\gamma_{1,m}}(\mathbb{R}^m_{+,+})} = C\|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от f и $x_{m+1,N}$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Часть (a) теоремы 3 непосредственно следует из леммы 2 и теоремы 1. Докажем части (b) и (c) теоремы 3.

Рассмотрим случай $p = 1$. Из утверждения леммы 2 и теоремы 1 имеем

$$\big|\big\{x_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{n,+} : \big|I^\alpha_\gamma f(x_{1,m}, x_{m+1,N})\big| > \beta\big\}\big|^{1/q}_\gamma$$
$$\le \Bigg|\Bigg\{x_{1,m} \in \mathbb{R}^m_{n,+} : \int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{\alpha-N-|\gamma|} \|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^{N-m})} y^\gamma_{1,n}\, dy_{1,m} > \frac{\beta}{C_2}\Bigg\}\Bigg|^{1/q}_\gamma$$
$$\le \frac{C}{\beta} \int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} \|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^{N-m})} y^\gamma_{1,n} dy_{1,m} = \frac{C}{\beta}\|f\|_{L_{1,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})}.$$

Теперь рассмотрим случай $1 < p < q < \infty$. Из утверждения леммы 2 с учетом обозначения $h(y_{1,m}) = \|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^{N-m})}$ будем иметь

$$\big|I^\alpha_\gamma f(x)\big| \le \int\limits_{\mathbb{R}^N_{n,+}} T^y |x|^{\alpha-N-|\gamma|} |f(y)| y^\gamma_{1,n}\, dy$$
$$\le C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{\alpha-|\gamma|-(\frac{N}{p}+\frac{m}{p'})} \|f(y_{1,m},\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^{N-m})} y^\gamma_{1,n}\, dy_{1,m}$$
$$= C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{\alpha-|\gamma|-(\frac{N}{p}+\frac{m}{p'})} h(y_{1,m}) y^\gamma_{1,n}\, dy_{1,m}.$$

Так как $\alpha - |\gamma| - (N/p + m/p') = -(m + |\gamma|)(1/p' + 1/q)$, то

$$\begin{aligned}&\big\|I_\gamma^\alpha f(\cdot, x_{m+1,N})\big\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^m_{n,+})} \\ &\qquad \le C_2 \Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{-(m+|\gamma|)(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q})} h(y_{1,m}) y_{1,n}^\gamma \, dy_{1,m} \Big\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^m_{n,+})}.\end{aligned}$$

Если учесть, что

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{-(m+|\gamma|)(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q})} h(y_{1,m}) y_{1,n}^\gamma \, dy_{1,m} \\ &\qquad = \int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{\beta - m - |\gamma|} h(y_{1,m}) y_{1,n}^\gamma \, dy_{1,m} = I_\gamma^\beta h(x_{1,m}),\end{aligned}$$

где $\beta = (m + |\gamma|)\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big) > 0$, $N = m$, то, применяя теорему 1 при $N = m$ и учитывая, что $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\beta}{m+|\gamma|}$, получим

$$\begin{aligned}&\big\|I_\gamma^\alpha f(\cdot, x_{m+1,N})\big\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^m_{n,+})} \\ &\qquad \times \Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^m_{n,+}} T^{y_{1,m}}_{x_{1,m}} |x_{1,m}|^{-(m+|\gamma|)(\frac{1}{p'}+\frac{1}{q})} h(y_{1,m}) y_{1,n}^\gamma \, dy_{1,m} \Big\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^m_{n,+})} \\ &\qquad = \big\|I_\gamma^\beta h\big\|_{L_{q,\gamma}(\mathbb{R}^m_{n,+})} \le C\|h\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^m_{n,+})} = C\|f\|_{L_{p,\gamma}(\mathbb{R}^N_{n,+})},\end{aligned}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от f и $x_{m+1,N}$.

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.

3. *Соболев С. Л.* Об одной теореме функционального анализа // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 3. С. 471–497.

4. *Ильин В. П.* О теореме вложения для предельного показателя // Докл. АН СССР. 1954. Т. 96, № 5. С. 905–908.

5. *Киприянов И. А., Иванов Л. А.* Получение фундаментальных решений для однородных уравнений с особенностями по нескольким переменным // Тр. семинара С. Л. Соболева. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1983. № 1. С. 55–77.

6. *Киприянов И. А., Кононенко В. И.* Фундаментальные решения для B-эллиптических уравнений // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 1. С. 114–129.

7. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997.

8. *Ляхов Л. Н.* Неравенства типа Харди — Литтлвуда — Соболева для одного класса дробных интегралов // Функционально-дифференциальные уравнения и их применение. Махачкала, 1991. С. 95.

9. *Garakhanova N. N.* Sobolev type theorems for $B_{k,n}$-Riesz potentials // Proc. IMM of Azerbaijan AS. 2001. V. 15. P. 52–61.

10. *Ляхов Л. Н.* Обращение B-потенциалов Рисса // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321, № 3. С. 466–469.

11. *Гаджиев А. Д., Алиев И. А.* О классах операторов типа потенциала, порожденного обобщенным сдвигом // Докл. расширенных заседаний семинара Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа. Тбилисский гос. университет, 1988. Т. 3, № 2. С.21–24.

12. *Гулиев В. С.* Теорема Соболева для B-потенциалов Рисса // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 4. С. 450–451.

13. *Guliev V. S.* On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator // Math. Inequal. Appl. 2003. V. 6, N 2. P. 317–330.

14. *Бродский А. Л.* Мультипликаторы преобразования Фурье — Бесселя и их приложения: Автореф. канд. ... физ.-мат. наук. Саратов: Саратовск. гос. ун-т, 1979.

Статья поступила 4 ноября 2006 г., окончательный вариант — 31 октября 2007 г.

Гулиев Вагиф Сабир оглы, Гараханова Наргиз Наваи кызы
Институт математики и механики Академии наук Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку AZ 1141, Азербайджан
vagif@guliyev.com, nargizqarakhanova@yahoo.com