Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 512.554

ОБРАЩЕНИЕ В НУЛЬ СТЕПЕНЕЙ КОММУТАТОРОВ С ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯМИ

Б. Дхара, Р. К. Шарма

Аннотация. Пусть R — первичное кольцо с $\operatorname{char} R \neq 2$, d — ненулевое дифференцирование на R и ρ — ненулевой правый идеал в R такой, что $[[d(x)x^n, d(y)]_m, [y,x]_s]^t = 0$ для всех $x, y \in \rho$, $n \geq 1$, $m \geq 0$, $s \geq 0$, $t \geq 1$ фиксированные целые. Если $[\rho, \rho]\rho \neq 0$, то $d(\rho)\rho = 0$.

Ключевые слова: первичное кольцо, дифференцирование, расширенный центроид, мартиндейловское кольцо частных.

1. Введение

Всюду далее, если не оговорено иное, R — первичное кольцо с центром $Z(R)$ и расширенным центроидом C, Q — его двустороннее мартиндейловское кольцо частных. Через d будем обозначать ненулевое дифференцирование на R. Для $x, y \in R$ положим $[x,y]_0 = x$, $[x,y]_1 = [x,y] = xy - yx$ и $[x,y]_k = [[x,y]_{k-1}, y]$ при $k > 1$.

В данной работе мы рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся обращения в нуль степеней коммутаторов с дифференцированиями в первичном кольце. В [1] Херштейн доказал, что если R, $\operatorname{char} R \neq 2$, допускает ненулевое дифференцирование d такое, что $[d(x), d(y)] = 0$ для всех $x, y \in R$, то R коммутативно. В [2] доказано, что если ρ — ненулевой правый идеал в R такой, что $d(x)x^n = 0$ для всех $x \in \rho$, $n \geq 1$ фиксированное целое, то $d(\rho)\rho = 0$. Недавно Филиппис [3] показал, что если $\operatorname{char} R \neq 2$ и ρ — ненулевой правый идеал в R такой, что $[d(x)x^n, d(y)] = 0$ для всех $x, y \in \rho$, то либо R коммутативно, либо $d(\rho)\rho = 0$. Для полупервичного кольца R в [4] доказано, что ненулевой правый идеал ρ в R централен, если $[d(x), d(y)] = [x, y]$ для всех $x, y \in \rho$. После коммутирования обеих частей этого равенства с $[x, y]$ оно становится таким: $[[d(x), d(y)], [x, y]] = 0$. Совсем недавно мы изучали это равенство в более общем виде в [5]. Результат настоящей статьи показывает, что если ρ — ненулевой правый идеал в R такой, что $[[d(x), d(y)]_n, [y, x]_m] = 0$ для всех $x, y \in \rho$, то либо $[\rho, \rho]\rho = 0$, либо $d(\rho)\rho = 0$. Эти ранее полученные результаты естественно приводят к рассмотрению случая, когда $[[d(x)x^n, d(y)]_m, [y, x]_s]^t = 0$ для всех x, y в некотором ненулевом правом идеале в R, где $n \geq 1$, $m \geq 0$, $s \geq 0$, $t \geq 1$ фиксированные целые.

Укажем пример ненулевого дифференцирования и ненулевого правого идеала в первичном кольце R, которые удовлетворяют этому дифференциальному равенству.

The first author is grateful to University Grants Commission of India for financial support under grant No.F. PSW–156/06–07.

Пример. Пусть $R = M_k(F)$, $k > 1$, — кольцо всех $k \times k$-матриц над полем F и $\rho = e_{11}R$. Дифференцирование $\delta : F \to F$ порождает другое дифференцирование в $R = M_k(F)$ следующим образом: $d : R \to R$ определяется как

$$d\Big(\sum_{i,j} \alpha_{ij} e_{ij}\Big) = \sum_{i,j} \delta(\alpha_{ij}) e_{ij},$$

где $\alpha_{ij} \in F$ и e_{ij} — обычная матричная единица в R. В этом случае имеем $[[d(x)x^n, d(y)]_m, [y, x]_s]^t = 0$ для всех $x, y \in \rho$ и $n \geq 1$, $m \geq 1$, $s \geq 1$, $t \geq 1$. Очевидно, что $[\rho, \rho]\rho = 0$, но $d(\rho)\rho \neq 0$.

Известно, что любое дифференцирование в R может быть единственным образом распространено до дифференцирования в Q и тем самым любое дифференцирование в R может быть определено на всем Q. Более того, Q — первичное кольцо, как и R, и расширенный центроид C кольца R совпадает с центром Q. Детали можно найти в [6, 7].

Обозначим через $Q *_C C\{X, Y\}$ свободное произведение C-алгебры Q и $C\{X, Y\}$, свободной C-алгебры от некоммутирующих переменных X, Y.

2. Основные результаты

Нам потребуется следующая

Лемма 2.1 [8]. *Пусть ρ — ненулевой правый идеал в R и d — ненулевое дифференцирование в R. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(i) *d — внутреннее дифференцирование, индуцированное дифференцированием $b \in Q$ таким, что $b\rho = 0$;*

(ii) *$d(\rho)\rho = 0$.*

Прежде чем доказывать наши теоремы, напомним для полноты некоторые важные понятия и несложные следствия из теоремы Харченко [9] о дифференциальных тождествах на первичном кольце R. Обозначим через $\mathrm{Der}(Q)$ множество всех дифференцирований на Q. Под *дифференциальным словом* Δ на R мы понимаем $\Delta = d_1 d_2 d_3 \dots d_m$ с некоторыми дифференцированиями d_i на R. Для $x \in R$ обозначим через x^{Δ} образ x при Δ, так что $x^{\Delta} = (\cdots (x^{d_1})^{d_2} \cdots)^{d_m}$. Под *дифференциальным полиномом* мы понимаем обобщенный полином с коэффициентами в Q вида $\Phi\big(x_i^{\Delta_j}\big)$, включающие некоммутирующие переменные x_i, на котором дифференциальные слова Δ_j действуют как унарные операции. Равенство $\Phi\big(x_i^{\Delta_j}\big) = 0$ называют *дифференциальным тождеством* на подмножестве T в Q, если оно обращается в нуль при любой подстановке значений его переменных x_i из T.

Пусть D_{int} — C-подпространство в $\mathrm{Der}(Q)$, состоящее из всех внутренних дифференцирований на Q. Из теоремы Харченко [9, теорема 2] вытекает следующий результат (см. также [10, с. 795–797] и [7, теорема 1]).

Пусть R — первичное кольцо. Если $\Phi\big(x_i^{\Delta_j}\big)$ — редуцированное дифференциальное тождество для ненулевого идеала в R, то $\Phi(z_{ij})$ — обобщенное дифференциальное тождество (GPI) *для R, где z_{ij} — различные переменные.*

В частности, имеет место следующий результат.

Если d — ненулевое дифференцирование на R и $\Phi\big(x_1, \dots, x_n, x_1^d, \dots, x_n^d\big)$ — дифференциальное тождество на R, то справедливо одно из следующих утверждений:

(i) $d \in D_{\mathrm{int}}$

(ii) *R удовлетворяет* GPI $\Phi(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n)$.

Теорема 2.2. *Пусть R — первичное кольцо с $\operatorname{char} R \neq 2$, d — ненулевое дифференцирование в R и $n \geq 1$, $m \geq 0$, $s \geq 0$, $t \geq 1$ фиксированные целые. Если $[[d(x)x^n, d(y)]_m, [y, x]_s]^t = 0$ для всех $x, y \in R$, то R коммутативно.*

Доказательство. Если R коммутативно, доказывать нечего. Пусть R некоммутативно. Если d не является Q-внутренним, то по теореме Харченко [9] из условия получаем
$$[[ux^n, v]_m, [y, x]_s]^t = 0 \tag{1}$$
для всех $x, y, u, v \in R$. Это полиномиальное тождество, поэтому существует поле F такое, что $R \subseteq M_k(F)$ с $k > 1$, причем R, $M_k(F)$ удовлетворяют такому же полиномиальному тождеству [11, лемма 1]. Взяв $u = e_{12}$, $v = e_{11}$, $x = e_{22}$ и $y = e_{21}$, имеем
$$0 = [[ux^n, v]_m, [y, x]_s]^t = (-1)^{(m+s)t}(e_{11} + (-)^t e_{22});$$
противоречие.

Пусть теперь d — Q-внутреннее дифференцирование, скажем, $d = ad(a)$ для некоторого $a \in Q$ т. е. $d(x) = [a, x]$ для любого $x \in R$. Так как $d \neq 0$, имеем $a \notin C$. Положим $f(x, y) = [[[a, x]x^n, [a, y]]_m, [y, x]_s]^t$. Тогда $f(x, y)$ — нетривиальное GPI для R. Согласно [12, теорема 2] $f(x, y)$ — также GPI для Q. Обозначим через F либо алгебраическое замыкание C, либо C соответственно тому, будет ли C бесконечным или конечным. Стандартными рассуждениями (см., например, [13, предложение]) можно показать, что $f(x, y)$ также GPI для $Q \otimes_C F$. Поскольку $Q \otimes_C F$ — центрально замкнутая первичная F-алгебра [14, теоремы 2.5, 3.5], заменяя R, C на $Q \otimes_C F$ и F соответственно, можем считать, что R центрально замкнуто и C либо конечен, либо алгебраически замкнут. По теореме Мартиндейла [15] R в таком случае примитивное кольцо с ненулевым цоколем H, где C — ассоциированное кольцо с делением. Отсюда согласно теореме Джекобсона [16, с. 75] R изоморфно плотному кольцу линейных отображений некоторого векторного пространства V над C и H состоит из линейных отображений в R конечного ранга. Если V конечномерно над C, то из плотности R в V вытекает, что $R \cong M_k(C)$, где $k = \dim_C V$.

Так как R некоммутативно, $\dim_C V \geq 2$.

Покажем, что v и av линейно C-зависимы для любых $v \in V$. Допустим, что v и av линейно независимы для некоторого $v \in V$. Если $a^2 v \notin \operatorname{Span}_C\{v, av\}$, то $v, av, a^2 v$ линейно независимы над C. Ввиду плотности существуют $x, y \in R$ такие, что
$$xv = v, \quad xav = 0, \quad xa^2 v = 0, \quad yv = 0, \quad yav = v, \quad ya^2 v = 3av.$$
Тогда $[y, x]_s v = 0$, $[y, x]_s av = (-1)^s v$ и $[[a, x], [a, y]]_m v = av$. Отсюда
$$0 = [[[a, x]x^n, [a, y]]_m, [y, x]_s]^t v = (-1)^{(s+1)t} v;$$
противоречие.

Если $a^2 v \in \operatorname{Span}_C\{v, av\}$, то $a^2 v = v\alpha + av\beta$ для некоторых $\alpha, \beta \in C$. Поскольку v, av линейно независимы над C, ввиду плотности существуют $x, y \in R$ такие, что
$$xv = v, \quad xav = 0, \quad yv = 0, \quad yav = v.$$
Тогда $[y, x]_s v = 0$, $[y, x]_s av = (-1)^s v$ и $[[a, x], [a, y]]_m v = (-1)^m (2^m av - v\gamma)$ для какого-то $\gamma \in C$. Отсюда
$$0 = [[[a, x]x^n, [a, y]]_m, [y, x]_s]^t v = (-1)^{(m+s+1)t} 2^{mt} v;$$

вновь противоречие.

Мы получили, что v и av линейно C-зависимы. Следовательно, $av = v\alpha_v$ для любого $v \in V$ с некоторым $\alpha_v \in C$. Легко доказать, что α_v не зависит от выбора $v \in V$. Тем самым $av = v\alpha$ для любых $v \in V$ и фиксированного $\alpha \in C$.

Возьмем $r \in R$, $v \in V$. Так как $av = v\alpha$, имеем $r(av) = r(v\alpha)$, а также $a(rv) = (rv)\alpha$.

Итак, $[a,r]v = 0$ для любых $v \in V$ откуда $[a,r]V = 0$. Поскольку V — левый точный неприводимый R-модуль, $[a,r] = 0$ для любого $r \in R$. Поэтому из $a \in Z(R)$ вытекает, что $d = 0$; противоречие с предположением.

Теорема 2.3. *Пусть R — первичное кольцо с* $\operatorname{char} R \neq 2$, *$d$ — ненулевое дифференцирование в R и ρ — ненулевой правый идеал в R такой, что*

$$[[d(x)x^n, d(y)]_m, [y,x]_s]^t = 0$$

для любых $x, y \in \rho$; $n \geq 1$, $m \geq 0$, $s \geq 0$, $t \geq 1$ фиксированные целые. Если $[\rho,\rho]\rho \neq 0$, то $d(\rho)\rho = 0$.

Начнем доказательство со следующей леммы.

Лемма 2.4. *Если $d(\rho)\rho \neq 0$ и $[[d(x)x^n, d(y)]_m, [y,x]_s]^t = 0$ для всех $x, y \in \rho$; $n \geq 1$, $m \geq 0$, $s \geq 0$, $t \geq 1$ фиксированные целые, то R удовлетворяет нетривиальному* GPI.

Доказательство. Предположим, что R не удовлетворяет какому-либо GPI. Можно считать, что R некоммутативно, в ином случае R, очевидно, удовлетворяет нетривиальному GPI. Рассмотрим два случая.

Случай I. Допустим, что d — Q-внутреннее дифференцирование, индуцированное элементом $a \in Q$. Тогда для любого $x \in \rho$

$$[[[a, xX](xX)^n, [a, xY]]_m, [xY, xX]_s]^t$$

есть GPI для R, так что это нулевой элемент в $Q *_C C\{X,Y\}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Bigg([xY, xX]_s \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \binom{m}{j}[a, xY]^j[a, xX](xX)^n[a, xY]^{m-j} \\ - \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \binom{m}{j}[a, xY]^j[a, xX](xX)^n[a, xY]^{m-j}[xY, xX]_s\Bigg) \\ \times [[[a, xX](xX)^n, [a, xY]]_m, [xY, xX]_s]^{t-1} = 0,\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}\Bigg([xY, xX]_s \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \binom{m}{j}(axY - xYa)^j[a, xX](xX)^n[a, xY]^{m-j} \\ - \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \binom{m}{j}(axY - xYa)^j[a, xX](xX)^n[a, xY]^{m-j}[xY, xX]_s\Bigg) \\ \times [[[a, xX](xX)^n, [a, xY]]_m, [xY, xX]_s]^{t-1} = 0.\end{aligned}$$

Если ax и x линейно C-независимы для некоторого $x \in \rho$, то

$$\begin{aligned}\Bigg(- \sum_{j=0}^{m}(-1)^j \binom{m}{j} axY(axY - xYa)^{j-1}[a, xX](xX)^n[a, xY]^{m-j}[xY, xX]_s\Bigg) \\ \times [[[a, xX](xX)^n, [a, xY]]_m, [xY, xX]_s]^{t-1} = 0.\end{aligned}$$

Повторение процесса дает

$$\left(-\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(axY)^j(axX)(xX)^n(axY)^{m-j}[xY,xX]_s\right) \times [[[a,xX](xX)^n,[a,xY]]_m,[xY,xX]_s]^{t-1}=0$$

и тем самым

$$\left(-\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(axY)^j(axX)(xX)^n(axY)^{m-j}[xY,xX]_s\right)^{t-1}=0$$

в $Q *_C C\{X,Y\}$. Следовательно,

$$(-axX(xX)^n(axY)^m[xY,xX]_s)^{t-1}=0$$

в $Q *_C C\{X,Y\}$, откуда $ax=0$; противоречие. Значит, ax и x для любого $x\in\rho$ C-зависимы. Тогда $(a-\alpha)\rho=0$ для некоторого $\alpha\in C$. Заменяя a на $a-\alpha$, можем считать, что $a\rho=0$. Тогда по лемме 2.1 $d(\rho)\rho=0$; противоречие.

Случай II. Допустим, что d — не Q-внутреннее дифференцирование. Если $d(x)\in xC$ для любого $x\in\rho$, то $[d(x),x]=0$, откуда вытекает, что R коммутативно (см. [17]). Поэтому существует $x\in\rho$ такой, что $d(x)\notin xC$, т. е. x и $d(x)$ линейно C-независимы. Согласно предположению R удовлетворяет тождеству

$$[[d(xX)(xX)^n,d(xY)]_m,[xY,xX]_s]^t=0.$$

По теореме Харченко [9]

$$[[(d(x)X+xr_1)(xX)^n,d(x)Y+xr_2]_m,[xY,xX]_s]^t=0$$

для любых $X,Y,r_1,r_2\in R$. В частности, для $r_1=r_2=0$

$$[[d(x)X(xX)^n,d(x)Y]_m,[xY,xX]_s]^t=0,$$

что является нетривиальным GPI для R, поэтому x и $d(x)$ линейно C-независимы; противоречие.

Доказательство теоремы 2.3. Допустим, что $d(\rho)\rho\neq0$, и придем к противоречию. По лемме 2.4 R является первичным GPI-кольцом, а значит, таковым будет и Q ввиду [12]. Поскольку Q центрально замкнут над C, из [15] вытекает, что Q — примитивное кольцо с $H=\mathrm{Soc}(Q)\neq0$. Тогда $[\rho H,\rho H]\rho H\neq0$. Действительно, иначе согласно [12] $[\rho Q,\rho Q]\rho Q=0$; противоречие. Аналогично по лемме 2.1 можно также считать, что $d(\rho H)\rho H\neq0$. В силу [18, лемма 1] H — регулярное кольцо. Тем самым для любого $r\in\rho H$ существует идемпотент $e\in\rho H$ такой, что $r=er$ и $e\in rH$.

В силу предположения и [7] можно считать, что тождество

$$[[d(x)x^n,d(y)]_m,[y,x]_s]^t=0 \tag{2}$$

выполнено на ρQ, а значит, и на ρH. Пусть $e=e^2\in\rho H$ и $y\in H$. Заменяя x на e и y на $ey(1-e)$ в (2) и умножая результат справа на e, получим

$$\begin{aligned}0&=[[d(e)e,d(ey(1-e))]_m,[ey(1-e),e]_s]^te\\&=[[d(e)e,d(ey(1-e))]_m,(-1)^sey(1-e)]^te\\&=((-1)^sey(1-e)[d(e)e,d(ey(1-e))]_m)^te\end{aligned}$$

$$= (-1)^{st}\left(ey(1-e)\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}(d(ey(1-e)))^i d(e)e(d(ey(1-e)))^{m-i}\right)^t e$$

$$= (-1)^{st}\Bigg\{ey(1-e)\Bigg(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m}{i}(d(ey(1-e)))^i d(e)e(d(ey(1-e)))^{m-i}$$
$$+ (-1)^m(d(ey(1-e)))^m d(e)e\Bigg)\Bigg\}^t e.$$

Имеем $0 = d(ey(1-e)e) = ey(1-e)d(e) + d(ey(1-e))e$, т. е. $d(ey(1-e))e = -ey(1-e)d(e)$ и $(1-e)d(ey(1-e)) = (1-e)d(e)ey(1-e)$. Используя эти равенства, из предыдущего заключаем, что

$$0 = (-1)^{st}\Bigg\{ey(1-e)\Bigg(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{m}{i}(d(e)ey(1-e))^i d(e)e(-ey(1-e)d(e))^{m-i}$$
$$+ (-1)^m(d(e)ey(1-e))^m d(e)e\Bigg)\Bigg\}^t e$$

$$= (-1)^{st}\left\{ey(1-e)\sum_{i=0}^{m}(-1)^m\binom{m}{i}(d(e)ey(1-e))^i d(e)e(ey(1-e)d(e))^{m-i}\right\}^t e$$

$$= (-1)^{st}\left\{ey(1-e)\sum_{i=0}^{m}(-1)^m\binom{m}{i}(d(e)ey(1-e))^m d(e)e\right\}^t e$$

$$= (-1)^{st}\left\{(-1)^m ey(1-e)(d(e)ey(1-e))^m d(e)e\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\right\}^t e$$

$$= (-1)^{st+mt}\{(ey(1-e)d(e))^{m+1}2^m\}^t e = (-1)^{(s+m)t}2^{mt}\{ey(1-e)d(e)\}^{(m+1)t}e.$$

Так как $\operatorname{char} R \neq 2$, имеем $(ey(1-e)d(e))^{(m+1)t}e = 0$ для всех $y \in H$. Отсюда $((1-e)d(e)ey)^{(m+1)t+1} = 0$ для всех $y \in H$. По лемме Левицкого (см. [19, лемма 1.1]) $(1-e)d(e)eH = 0$. Из первичности H получаем $(1-e)d(e)e = 0$. Следовательно, $(1-e)d(e) = (1-e)d(e^2) = (1-e)d(e)e = 0$. Тем самым $d(e) = ed(e) \in eH \subseteq \rho H$. Наконец, $d(r) = d(er) = d(e)er + ed(er) \in \rho H$. Отсюда $d(\rho H) \subseteq \rho H$.

Положим

$$\overline{\rho H} = \rho H/(\rho H \cap\ l_H(\rho H))$$

с $l_H(\rho H)$ в качестве левого аннулятора ρH в H. Тогда d индуцирует каноническое дифференцирование $\bar{d}$ на $\overline{\rho H}$ такое, что

$$[[\bar{d}(\bar{x})\bar{x}^n, \bar{d}(\bar{y})]_m, [\bar{y}, \bar{x}]_s]^t = 0$$

для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{\rho H}$. По теореме 2.2 либо $\bar{d} = 0$, либо $\overline{\rho H}$ коммутативно. Следовательно, либо $d(\rho H)\rho H = 0$, либо $[\rho H, \rho H]\rho H = 0$. В обоих случаях приходим к противоречию. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herstein I. N.* A note on derivations // Canad. Math. Bull. 1978. V. 21, N 3. P. 369–370.

2. *Chang C. M., Lin Y. C.* Derivations on one-sided ideals of prime rings // Tamsui Oxf. J. Math. Sci. 2001. V. 17, N 2. P. 139–145.

3. *Filippis V. D.* Derivations on right ideals of prime rings // Tamsui Oxf. J. Math. Sci. 2005. V. 21, N 2. P. 191–200.
4. *Bell H. E., Daif M. N.* On commutativity and strong commutativity-preserving Maps // Canad. Math. Bull. 1994. V. 37, N 4. P. 443–447.
5. *Sharma R. K., Dhara B.* Engel type identities with derivations for right ideals in prime rings // Mediterr. J. Math. 2006. V. 3, N 1. P. 15–29.
6. *Beidar K. I., Martindale III W. S., Mikhalev A. V.* Rings with generalized identities. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1996.
7. *Lee T. K.* Semiprime rings with differential identities // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. 1992. V. 20, N 1. P. 27–38.
8. *Brešar M.* One-sided ideals and derivations of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 122, N 4. P. 979–983.
9. *Харченко В. К.*. Дифференциальные тождества первичных колец // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 2. С. 220–238.
10. *Lee T. K.* Differential identities of Lie ideals or large right ideals in prime rings // Comm. Algebra. 1999. V. 27, N 2. P. 793–810.
11. *Lanski C.* An Engel condition with derivation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118, N 3. P. 731–734.
12. *Chuang C. L.* GPI's having coefficients in Utumi quotient rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103, N 3. P. 723–728.
13. *Lee P. H., Wong T. L.* Derivations cocentralizing Lie ideals // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. 1995. V. 23, N 1. P. 1–5.
14. *Erickson T. S., Martindale III W. S., Osborn J. M.* Prime nonassociative algebras // Pacific J. Math. 1975. V. 60, N 1. P. 49–63.
15. *Martindale III W. S.* Prime rings satisfying a generalized polynomial identity // J. Algebra. 1969. V. 12, N 4. P. 576–584.
16. *Jacobson N.* Structure of rings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1964. (Amer. Math. Soc. Colloq. Pub.).
17. *Bell H. E., Deng Q.* On derivations and commutativity in semi-prime rings // Comm. Algebra. 1995. V. 23, N 10. P. 3705–3713.
18. *Faith C., Utumi Y.* On a new proof of Litoff's theorem // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1963. V. 14. P. 369–371.
19. *Herstein I. N.* Topics in ring theory. Chicago: The University of Chicago Press, 1969.

Статья поступила 12 марта 2007 г.

Basudeb Dhara
Department of Mathematics, Belda College, Belda
Paschim Medinipur-721424(W.B.), India
basu_dhara@yahoo.com

Sharma R. K.
Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Delhi,
Hauz Khas, New Delhi-110016, India
rksharma@maths.iitd.ac.in