

УДК 512.54

## СТРОГО НЕРУЧНЫЕ ПРИМИТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СВОБОДНОЙ МЕТАБЕЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ РАНГА 3

А. Н. Кабанов, В. А. Романьков

**Аннотация.** Доказано, что свободная метабелева алгебра Ли  $M_3$  ранга 3 над произвольным полем  $K$  допускает строго неручные примитивные элементы.

**Ключевые слова:** алгебра Ли, автоморфизм, ручной автоморфизм, примитивный элемент, свободная алгебра, метабелева алгебра, свободное дифференцирование.

### 1. Введение

**Свободные алгебры.** Пусть  $K$  — поле произвольной характеристики,  $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $n \geq 2$ , — конечное множество. Считаем, что  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Определим некоторые свободные алгебры с множеством свободных порождающих  $X_n$ . Через  $P_n = K[X_n]$  обозначим алгебру многочленов над  $K$  от коммутирующих переменных из  $X_n$ . Через  $A_n = K\langle X_n \rangle$  обозначим свободную ассоциативную алгебру над  $K$  с множеством свободных порождающих  $X_n$ .

Хорошо известно, что относительно операции  $[u, v] = uv - vu$ ,  $u, v \in A_n$ , множество  $X_n \subseteq A_n$  свободно порождает алгебру Ли  $L_n = K(X_n)$ .

Для любой алгебры Ли  $T$  полагаем  $T' = [T, T]$ ,  $T'' = [T', T']$ . Свободная метабелева алгебра Ли  $M_n = K((X_n))$ , свободно порожденная множеством  $X_n$ , определяется как  $M_n = L_n/L_n''$ .

**Автоморфизмы.** Будем записывать произвольный автоморфизм (более общо, эндоморфизм)  $\varphi$  свободной алгебры  $F_n$  с множеством свободных порождающих  $X_n$  как  $\varphi = (f_1, \dots, f_n)$ , где  $\varphi(x_i) = f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Если  $F_n$  — алгебра Ли, то автоморфизм (эндоморфизм)  $\varphi \in \text{Aut } F_n$  ( $\varphi \in \text{End } F_n$ ) называется *IA-автоморфизмом* (*IA-эндоморфизмом*), если  $\varphi$  индуцирует тождественное отображение на алгебре  $F_n/F_n'$ . Мы имеем соответственно подгруппу  $\text{IAut } F_n \leq \text{Aut } F_n$  и подполугруппу  $\text{IAEnd } F_n \leq \text{End } F_n$ , состоящие из автоморфизмов (эндоморфизмов) указанного вида.

**Ручные автоморфизмы.** Пусть  $F_n$  — свободная алгебра над  $X_n$ . Автоморфизм  $\varphi \in \text{Aut } F_n$  называется *элементарным*, если он имеет вид

$$\varphi = (x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha x_j + u(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), x_{j+1}, \dots, x_n),$$

где  $\alpha \in K^*$ , элемент  $u(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$  не зависит от  $x_j$ .

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07.01.00392).

Автоморфизм  $\psi$ , принадлежащий подгруппе  $\text{TAut } F_n \leq \text{Aut } F_n$ , порожденной всеми элементарными автоморфизмами, называется *ручным*. В противном случае  $\psi$  называется *неручным* или *диким*.

**Известные результаты.** В 1964 г. Кон [1] доказал, что все автоморфизмы свободной алгебры Ли  $L_n$  являются ручными. Хорошо известно [2–5], что все автоморфизмы алгебры многочленов  $P_2$  и свободной ассоциативной алгебры  $A_2$  являются ручными при любом поле  $K$ .

В 1972 г. Нагата [6] предположил, что ставший впоследствии известным автоморфизм

$$\sigma = (x_1 + (x_1^2 - x_2x_3)x_3, x_2 + 2(x_1^2 - x_2x_3)x_1 + (x_1^2 - x_2x_3)^2 x_3, x_3)$$

алгебры многочленов  $P_3$  является неручным, если поле  $K$  имеет характеристику 0.

И. П. Шестаков и У. У. Умирбаев [7–9], используя метод скобок Пуассона, ограничение степени и слабую редукцию, доказали, что автоморфизм Нагаты  $\sigma$  действительно неручной.

В случае свободной ассоциативной алгебры  $A_3$  вопрос о существовании диких автоморфизмов известен как проблема Кона. У. У. Умирбаев [10] доказал, что так называемый автоморфизм Аника

$$\delta = (x_1 + x_3(x_1x_3 - x_3x_2), x_2 + (x_1x_3 - x_3x_2)x_3, x_3)$$

алгебры  $A_3 = K\langle X_3 \rangle$  над полем  $K$  характеристики 0 является диким.

В случае свободных метабелевых алгебр Ли  $M_n$ ,  $n \geq 2$ , кроме ручных автоморфизмов выделяется естественная подгруппа  $\text{Inn } M_n$  так называемых внутренних автоморфизмов, аналог сопряжений в группах. Автоморфизм  $\mu \in \text{Inn } M_n$  задается как  $\mu = \mu(u) = (x_1 + [x_1, u], x_2 + [x_2, u], \dots, x_n + [x_n, u])$ , где  $u \in M'_n$ . Легко проверить, что  $\mu(u_1)\mu(u_2) = \mu(u_1 + u_2)$ , следовательно,  $\text{Inn } M_n \simeq (M'_n, +)$ . В. А. Артамонов [11] доказал, что  $\text{Aut } M_2 = \text{TAut } M_2 \cdot \text{Inn } M_2$ . Легко видеть, что группа  $\text{TAut } M_2$  изоморфна группе  $GL_2(K)$ , а любой автоморфизм  $\varphi \in \text{TAut } M_2$  взаимно однозначно соответствует невырожденной линейной замене  $X_2$ . Итак,  $\text{Aut } M_2$  изоморфна  $GL_2(K) \cdot (M_2, +)$  и очевидным образом содержит неручные автоморфизмы. Ю. А. Бахтурин и С. Набиев [12] установили подобным же образом наличие неручных автоморфизмов в группе  $\text{Aut } M_n$  при любом  $n \geq 3$ .

Однако, по существу, внутренние автоморфизмы из  $\text{Inn } M_n$  в силу их простоты следует также считать ручными. Если придерживаться этой точки зрения, то естественно возникает вопрос о наличии в группах  $\text{Aut } M_n$ ,  $n \geq 3$ , автоморфизмов, не принадлежащих подгруппе, порожденной всеми ручными и всеми внутренними автоморфизмами. Назовем автоморфизмы вне указанной подгруппы *строго неручными*.

В недавней работе [13] В. А. Романьков доказал, что строго неручные автоморфизмы существуют в группе  $\text{Aut } M_3$  при любом поле  $K$ . Он указал способ массового построения таких автоморфизмов. Кроме того, в работе [13] установлен ряд существенно более сильных утверждений, касающихся структуры группы  $\text{Aut } M_3$ . Из анонсированного В. А. Романьковым утверждения [14] о порождающих элементах группы  $\text{Aut } M_n$ ,  $n \geq 4$ , следует, что при  $n \geq 4$  строго неручных автоморфизмов не существует.

**Примитивные элементы.** Элемент  $g$  свободной алгебры  $F_n$  называется *примитивным*, если он может быть включен в некоторое свободное множество

$Y_n$  порождающих алгебры  $F_n$ . Прimitивный элемент  $g \in F_n$  называется *ручным*, если он является образом  $\varphi(x_1) = g$  при некотором ручном автоморфизме  $\varphi \in \text{TAut } F_n$ . В противном случае  $g$  называется *неручным* или *диким*.

Если примитивный элемент  $g$  свободной метабелевой алгебры  $M_n$  не является образом  $\varphi(x_1) = g$  ни для какого автоморфизма  $\varphi$ , принадлежащего подгруппе, порожденной всеми ручными и внутренними автоморфизмами, то он называется *строго неручным*.

Целью данной работы является доказательство того, что алгебра  $M_3$  обладает строго неручными примитивными элементами при любом поле  $K$ .

Из уже упомянутого результата В. А. Романькова [14] следует, что в алгебре  $M_n$  при  $n \geq 4$  нет строго неручных примитивных элементов.

**Дифференцирования Фокса.** Пусть  $KG_n$  обозначает групповую алгебру над полем  $K$  свободной группы  $G_n$  ранга  $n$  с множеством свободных порождающих  $X_n$ .

В [15] Фокс дал детальное описание дифференциального исчисления в групповом кольце  $ZG_n$ , которое очевидным образом распространяется на любую групповую алгебру  $KG_n$ . Поскольку любая свободная ассоциативная алгебра  $A_n = K\langle X_n \rangle$  естественно вложена в  $KG_n$  и в то же время значения частных свободных производных Фокса на  $KG_n$  переводят  $A_n \leq KG_n$  в себя, большинство технических утверждений относительно этих производных остаются верными для  $A_n$ .

Напомним, что (частные) свободные дифференцирования алгебры  $A_n$ , индуцированные соответствующими дифференцированиями групповой алгебры  $KG_n$ , суть отображения

$$d/dx_j : A_n \rightarrow A_n, \quad 1 \leq j \leq n,$$

удовлетворяющие следующим условиям для  $\alpha, \beta \in K$ ;  $u, v \in A_n$ :

$$\begin{aligned} dx_i/dx_j &= \delta_{ij} \quad (\text{символ Кронекера}); \\ d(\alpha u + \beta v)/dx_j &= \alpha du/dx_j + \beta dv/dx_j; \\ d(uv)/dx_j &= du/dx_j v^\varepsilon + u dv/dx_j, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon : A_n \rightarrow K$  — гомоморфизм специализации, определенный как  $x_j^\varepsilon = 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Из определения следует, что  $d\alpha/dx_j = 0$  для любых  $\alpha \in K$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Прямое вычисление показывает, что

$$d[x_i, x_j]/dx_i = 1 - x_j.$$

Следующая формула известна как *основное тождество для дифференцирований Фокса*:

$$\sum_{j=1}^n du/dx_j (x_j - 1) = u - u^\varepsilon.$$

Поскольку  $L_n$  является подалгеброй Ли алгебры  $A_n$ , мы можем рассматривать также дифференцирования

$$d/dx_j : L_n \rightarrow A_n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть  $\pi : A_n \rightarrow P_n$  — стандартный эпиморфизм. Определим производные  $\partial/\partial x_j : A_n \rightarrow P_n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , полагая для любого  $u \in A_n$

$$\partial u/\partial x_j = (du/dx_j)^\pi.$$

Поскольку  $\partial u/\partial x_j = 0$  для любого  $u \in L''_n$ ,  $j = 1, \dots, n$  (это легко проверяется), также определены производные

$$\partial/\partial x_j : M_n \rightarrow P_n, \quad j = 1, \dots, n.$$

### Нормальная форма элемента свободной метабелевой алгебры Ли.

Следующие тождества имеют место в любой свободной метабелевой алгебре Ли  $M_n$  над произвольным полем:

$$[u, v] = -[v, u];$$

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad (\text{тождество Якоби});$$

$$[[u, v], [w, t]] = 0;$$

$$[z_1, [z_2, [\dots, [z_k, [x, y]] \dots]]] = [z_{\sigma(1)}, [z_{\sigma(2)}, [\dots, [z_{\sigma(k)}, [x, y]] \dots]]]$$

для любого  $\sigma \in S_k$ .

Следовательно, подалгебра  $M_n^2 = M'_n$  свободной метабелевой алгебры Ли  $M_n$  ранга  $n \geq 2$  может рассматриваться как модуль над алгеброй многочленов  $P_n$  следующим образом.

Любой элемент  $v \in P_n$  однозначно представим в виде

$$v = \alpha + \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in N^n} \alpha_{k_1, \dots, k_n} (x_1 - 1)^{k_1} \dots (x_n - 1)^{k_n}, \quad (1)$$

где  $\alpha, \alpha_{k_1, \dots, k_n} \in K$ . Для любого  $u \in M_n^2$  и любого  $v \in P_n$  вида (1) полагаем

$$u^v = \alpha u + \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in N^n} \alpha_{k_1, \dots, k_n} [x_n, [\dots, [x_1, u] \dots]],$$

где  $x_j$  повторяется  $k_j$  раз. Легко видеть, что

$$\partial u^v/\partial x_j = v \partial u/\partial x_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Определим правонормированный коммутатор  $[x_{i_1}, \dots, x_{i_m}]$ , полагая

$$[x_{i_1}, \dots, x_{i_m}] = [x_{i_1}, [\dots, [x_{i_{m-1}}, x_{i_m}] \dots]].$$

При  $m = 1$  имеем  $[x_{i_1}] = x_{i_1}$ . В дальнейшем будем рассматривать только элементы с правонормированной расстановкой скобок.

Согласно [16] базис свободной метабелевой алгебры Ли  $M_n$  состоит из всевозможных коммутаторов вида  $[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$ , где  $x_{i_j} \in X_n$ ,  $x_{i_k} > x_{i_{k-1}}$ ,  $x_{i_{k-1}} \leq \dots \leq x_{i_1}$ . Будем говорить, что элемент алгебры  $M_n$  записан в *нормальной форме*, если он представлен в виде линейной комбинации базисных элементов.

## 2. Предварительные результаты

В дальнейшем для сокращения записи будем обозначать  $x_i - 1$  через  $b_i$ . Пусть  $\lambda$  — отображение, которое каждому эндоморфизму  $\varphi$  из  $\text{IAEnd } M_n$  ставит в соответствие матрицу Якоби  $J_\varphi = (\partial x_i^\varphi/\partial x_j)$ .

**Лемма 1.** *Отображение  $\lambda$  является гомоморфизмом.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\varphi, \psi \in \text{IAEnd } M_n$  и  $x_i^\varphi = x_i + u_i$ ,  $x_i^\psi = x_i + v_i$ , где  $u_i = u_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $v_i = v_i(x_1, \dots, x_n) \in M_n^2$ . Докажем, что  $J_\varphi J_\psi = J_{\varphi\psi}$ . Имеем

$$J_\varphi = E + (\partial u_i / \partial x_j), \quad J_\psi = E + (\partial v_i / \partial x_j).$$

С другой стороны,  $x_i^{\varphi\psi} = x_i + v_i + u_i(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n)$ . Значит, достаточно доказать, что

$$\partial w_i / \partial x_j = \partial u_i / \partial x_j + \sum_{k=1}^n \partial u_i / \partial x_k \cdot \partial v_k / \partial x_j,$$

где  $w_i = u_i(x_1 + v_1, \dots, x_n + v_n)$ .

Допустим, что  $u_i = [x_m, x_l]^s$ , где  $s \in P_n$ ,  $m < l \leq n$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^n \partial u_i / \partial x_k \cdot \partial v_k / \partial x_j = -b_l s \cdot \partial v_m / \partial x_j + b_m s \cdot \partial v_l / \partial x_j,$$

а  $w_i = u_i - v_m^{b_l s} + v_l^{b_m s}$ . Значит,

$$\partial w_i / \partial x_j = \partial u_i / \partial x_j - b_l s \cdot \partial v_m / \partial x_j + b_m s \cdot \partial v_l / \partial x_j.$$

Отсюда, учитывая, что произвольный элемент  $u_i$  является линейной комбинацией элементов вида  $[x_m, x_l]^s$ , получаем  $J_\varphi J_\psi = J_{\varphi\psi}$ , что и требовалось доказать.

**Лемма 2.** *Ядро отображения  $\lambda$  тривиально.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Допустим, что существует нетождественный эндоморфизм  $\varphi \in \text{IAEnd } M_n$ , матрица Якоби которого  $J_\varphi$  единичная. Пусть  $x_i^\varphi = x_i + u_i$ , где  $u_i \in M_n^2$ . Тогда из  $\partial x_i^\varphi / \partial x_j = \delta_{ij}$  следует, что  $\partial u_i / \partial x_j = 0$ . При дифференцировании  $u_i$ , представленного в нормальной форме, по переменной  $x_1$  не обращаются в нуль только элементы вида  $[x_1, x_m]^s$ , где  $m > 1$ ,  $s \in P_n$ . Из вида нормальной формы одночлена  $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}]$  ( $i_k > i_{k-1}$ ,  $i_{k-1} \leq i_{k-2} \leq \dots \leq i_1$ ) следует, что при различных  $m_1$  и  $m_2$  производные элементов  $[x_1, x_{m_1}]^{s_1}$  и  $[x_1, x_{m_2}]^{s_2}$  не могут сократиться. Значит, элементов вида  $[x_1, x_m]^s$  в  $u_i$  нет. Отсутствие в  $u_i$  других элементов можно доказать по индукции с помощью дифференцирования по соответствующей переменной. Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Пусть  $\varphi, \psi \in \text{IAEnd } M$  и  $J(\varphi\psi) = J(\varphi)J(\psi) = E$ . Тогда  $\varphi, \psi \in \text{IAut } M$  и  $\varphi = \psi^{-1}$ .*

Определим стабилизатор

$$\text{Stab}(b_1, \dots, b_n)^T = \{A \in GL_n(P_n) \mid A \cdot (b_1, \dots, b_n)^T = (b_1, \dots, b_n)^T\},$$

где  $T$  означает транспонирование.

**Лемма 3.** *Пусть  $A \in \text{Stab}(b_1, \dots, b_n)^T$ . Тогда существует автоморфизм  $\varphi \in \text{IAut } M$ , матрица Якоби которого  $J_\varphi$  равна  $A$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $A = E + (a_{ij})$ . Так как

$$A \cdot (b_1, \dots, b_n)^T = (b_1, \dots, b_n)^T,$$

для любого  $i$  имеем

$$a_{i1}b_1 + \dots + a_{in}b_n = 0.$$

Докажем существование  $u_i \in M_n^2$  такого, что  $\partial u_i / \partial x_j = a_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Доказательство ведем по индукции. Если  $n = 1$ , то  $a_{11}b_1 = 0$ , откуда  $a_{11} = 0$ .

В этом случае  $u_1$  можно взять равным 0. Пусть  $n > 1$ . Запишем  $a_{ij}$  в виде  $a_{ij} = c_{ij}b_n + d_{ij}$ , где  $d_{ij}$  не содержит  $b_n$ . Тогда

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}b_nb_j + a_{in}b_n + \sum_{j=1}^{n-1} d_{ij}b_j = 0.$$

При специализации  $x_n \rightarrow 1, x_i \rightarrow x_i, i \neq n$ , получаем  $\sum_{j=1}^{n-1} d_{ij}b_j = 0$ . По предположению индукции существует  $v_i \in M_{n-1}^2$  такой, что  $\partial v_i / \partial x_j = d_{ij}, j = 1, \dots, n-1$ . Теперь

$$\sum_{j=1}^{n-1} c_{ij}b_nb_j + a_{in}b_n = 0.$$

Рассмотрим элемент

$$w_i = \sum_{j=1}^{n-1} [x_n, x_j]^{c_{ij}},$$

его производные имеют вид

$$\partial w_i / \partial x_j = c_{ij}b_n \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n-1} \partial w_i / \partial x_j \cdot b_j + a_{in}b_n = 0.$$

С другой стороны, известно, что

$$\sum_{j=1}^{n-1} \partial w_i / \partial x_j \cdot b_j + \partial w_i / \partial x_n \cdot b_n = 0,$$

значит,  $a_{in} = \partial w_i / \partial x_n$ . В качестве  $u_i$  можно взять  $u_i = v_i + w_i$ . Полученное отображение  $\varphi$  является эндоморфизмом. Но те же вычисления можно провести для матрицы  $A^{-1}$  и получить некоторый эндоморфизм  $\psi$ . Поскольку  $J(\varphi\psi) = E$ , по следствию  $1 \varphi = \psi^{-1} \in \text{IAut } M$ . Лемма доказана.

Рассмотрим сопряжение матрицы Якоби  $J_\varphi$  некоторого автоморфизма  $\varphi \in \text{IAut } M_3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}^{-1} J_\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\varphi) & 0 \\ * & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$A(\varphi) = E + \begin{pmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 - b_1 b_3^{-1} \partial u_3 / \partial x_1 & \partial u_1 / \partial x_2 - b_1 b_3^{-1} \partial u_3 / \partial x_2 \\ \partial u_2 / \partial x_1 - b_2 b_3^{-1} \partial u_3 / \partial x_1 & \partial u_2 / \partial x_2 - b_2 b_3^{-1} \partial u_3 / \partial x_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Обозначим через  $\mu$  гомоморфизм, ставящий в соответствие каждому автоморфизму  $\varphi \in \text{IAut } M_3$  матрицу  $A(\varphi) \in GL_2(P_3 + b_3^{-1}P_2)$ .

**Лемма 4.** Ядро гомоморфизма  $\mu : \text{IAut } M_3 \rightarrow GL_2(P_3 + b_3^{-1}P_2)$  состоит из внутренних автоморфизмов.

**Доказательство.** Приравняв матрицу  $A(\varphi)$  к единичной, получаем, что

$$\partial u_i / \partial x_j - b_i b_3^{-1} \partial u_3 / \partial x_j = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Отсюда

$$b_3 \partial u_i / \partial x_j = b_i \partial u_3 / \partial x_j.$$

Следовательно, существуют многочлены  $v_j \in P_3$  ( $j = 1, 2$ ) такие, что  $\partial u_i / \partial x_j = b_i v_j$  для любых  $i = 1, 2, 3$ . Значит, существует элемент  $w \in M_3^2$  такой, что  $u_i = w^{b_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , что и требовалось доказать.

Так как произвольный элемент  $c \in P_3$  однозначно записывается в виде  $c = b_3^2 c_2 + b_3 c_1 + c_0$ , где  $c_2 \in P_3$ ,  $c_1, c_0 \in P_2$ , то матрица  $A(\varphi)$  однозначно представима в виде

$$A(\varphi) = E + b_3^2 A_2 + b_3 A_1 + A_0 + b_3^{-1} A_{-1}, \quad (3)$$

где  $A_2 \in M_2(P_3)$ ,  $A_1, A_0, A_{-1} \in M_2(P_2)$ .

Рассмотрим автоморфизм  $\psi \in \text{IAut } M_3$ , оставляющий  $x_1$  и  $x_2$  на месте, а  $x_3$  переводящий в  $x_3 + [x_1, x_2]$  (якобиан такого отображения равен 1, так что это действительно автоморфизм). Применив к нему гомоморфизм  $\mu$ , получаем

$$A(\psi) = E + \begin{pmatrix} b_1 b_3^{-1} b_2 & -b_1 b_3^{-1} b_1 \\ b_2 b_3^{-1} b_2 & -b_2 b_3^{-1} b_1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицу

$$X = \begin{pmatrix} b_1 b_2 & -b_1^2 \\ b_2^2 & -b_2 b_1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тогда  $A(\psi) = E + b_3^{-1} X$ .

Аннулятором матрицы  $A \in M_2(P_2)$  называется множество  $\text{Ann } A = \{B \in M_2(P_2) \mid BA = AB = 0\}$ .

**Лемма 5.** Пусть матрица  $X \in M_2(P_2)$  имеет вид (4). Тогда  $\text{Ann } X = \alpha X$ , где  $\alpha \in P_2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_2(P_2)$$

и  $AX = XA = 0$ . Вычисляя  $AX$  и приравнявая ее элементы к 0, получаем

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0, \quad a_3 b_1 + a_4 b_2 = 0.$$

Отсюда  $a_1 = \alpha_1 b_2$ ,  $a_2 = -\alpha_1 b_1$ ,  $a_3 = \alpha_2 b_2$ ,  $a_4 = -\alpha_2 b_1$ , где  $\alpha_1, \alpha_2 \in P_2$ . Аналогично из  $XA = 0$  выводим, что  $a_1 = \alpha_3 b_1$ ,  $a_3 = \alpha_3 b_2$ ,  $a_2 = \alpha_4 b_1$ ,  $a_4 = \alpha_4 b_2$ , где  $\alpha_3, \alpha_4 \in P_2$ . Так как  $a_1 = \alpha_1 b_2 = \alpha_3 b_1$ , имеем  $\alpha_1 = \alpha b_1$ ,  $\alpha_3 = \alpha b_2$ , где  $\alpha \in P_2$ . Точно так же получаем  $\alpha_2 = \alpha_3$ ,  $\alpha_4 = -\alpha_1$ . Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha b_1 b_2 & -\alpha b_1^2 \\ \alpha b_2^2 & -\alpha b_2 b_1 \end{pmatrix} = \alpha X.$$

Лемма доказана.

Возьмем произвольный автоморфизм  $\varphi \in \text{IAut } M_3$  и вычислим  $A(\varphi\psi)$ . Обозначая  $A = A(\varphi)$  и учитывая разложение (3), приходим к равенству

$$A(E + b_3^{-1} X) = A + b_3^{-1} X + b_3 A_2 X + A_1 X + b_3^{-1} A_0 X + b_3^{-2} A_{-1} X.$$

Но  $A(\varphi\psi)$  должна иметь вид (2), следовательно, в ее записи не может содержаться  $b_3^{-2}$ , отсюда  $A_{-1} X = 0$ . Аналогично, вычисляя  $A(\psi\varphi)$ , получаем  $X A_{-1} = 0$ . Значит,  $A_{-1} \in \text{Ann } X$ , и по лемме 5  $A_{-1} = \alpha X$ ,  $\alpha \in P_2$ .

В записи  $A(\psi\varphi\psi)$  присутствует  $b_3^{-2}XA_0X$ , следовательно,  $XA_0X = 0$ . Из записи  $A(\varphi\psi\psi)$  вытекает, что  $A_0X^2 = 0$ , откуда  $A_0X = \beta X$ ,  $\beta \in P_2$ . Аналогично из записи  $A(\psi\psi\varphi)$  следует, что  $X^2A_0 = 0$ , тем самым  $XA_0 = \gamma X$ ,  $\gamma \in P_2$ . Точно так же, рассматривая  $A(\psi\varphi\psi\psi)$  и  $A(\psi\psi\varphi\psi)$ , получаем  $(XA_1X)X = X(XA_1X) = 0$ , откуда  $XA_1X = \delta X$ ,  $\delta \in P_2$ .

Определим отображение

$$\rho : \varphi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 + \beta & \alpha \\ \delta & 1 + \gamma \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \text{IAut } M_3.$$

**Лемма 6.** *Отображение  $\rho : \text{IAut } M_3 \rightarrow GL_2(P_2)$  является гомоморфизмом.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\varphi, \psi \in \text{IAut } M_3$  и  $\mu(\varphi) = A$ ,  $\mu(\psi) = B$ . Тогда, используя разложения вида (3) матриц  $A$  и  $B$ , получаем

$$\begin{aligned} (AB)_{-1} &= A_{-1}B_0 + A_0B_{-1} + A_{-1} + B_{-1} = \alpha_1XB_0 + \alpha_2A_0X + \alpha_1X + \alpha_2X \\ &= \alpha_1\gamma_2X + \alpha_2\beta_1X + \alpha_1X + \alpha_2X. \end{aligned}$$

Аналогично, учитывая, что  $X^2 = 0$ , имеем  $(AB)_0X = (A_0 + B_0 + A_1B_{-1} + A_{-1}B_1 + A_0B_0)X = (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_1\delta_2 + \beta_1\beta_2)X$ ,  $X(AB)_0 = (\gamma_1 + \gamma_2 + \alpha_2\delta_1 + \gamma_1\gamma_2)X$ ,  $X(AB)_1X = X(A_1 + B_1 + A_2B_{-1} + A_{-1}B_2 + A_1B_0 + A_0B_1)X = (\delta_1 + \delta_2 + \beta_2\delta_1 + \gamma_1\delta_2)X$ . Значит,  $\rho(\varphi\psi) = \rho(\varphi)\rho(\psi)$ , что и требовалось доказать.

Теперь найдем формулы для вычисления коэффициентов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Обозначим через  $u_{ij}$  производную  $\partial u_i / \partial x_j$  элемента  $u_i \in M_3$ , через  $u_{ij}^k$  — компоненту, отвечающую степени  $b_3^k$  в разложении  $u_{ij} = b_3^2u_{ij}^2 + b_3u_{ij}^1 + u_{ij}^0$ .

**Лемма 7.** *Пусть  $\varphi = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3) \in \text{IAut } M_3$ ,  $u_i \in M_3^2$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и*

$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 + \beta & \alpha \\ \delta & 1 + \gamma \end{pmatrix},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in P_2$ . Тогда элементы матрицы  $\rho(\varphi)$  можно вычислить по следующим формулам:

$$\alpha = -u_{31}^0b_2^{-1} = u_{32}^0b_1^{-1}; \quad (5)$$

$$\beta = -u_{31}^1b_1 - u_{32}^1b_2; \quad (6)$$

$$\gamma = u_{11}^0 - u_{21}^0b_1b_2^{-1} = u_{22}^0 - u_{12}^0b_2b_1^{-1}; \quad (7)$$

$$\delta = u_{23}^0b_1 - u_{13}^0b_2. \quad (8)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Представим матрицу  $A(\varphi)$ , как показано в (3). Из (2) видно, что

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} -b_1u_{31}^0 & -b_1u_{32}^0 \\ -b_2u_{31}^0 & -b_2u_{32}^0 \end{pmatrix}.$$

Значит,  $\alpha b_2 = -u_{31}^0$ ,  $\alpha b_1 = u_{32}^0$ . Следовательно,

$$\alpha = -u_{31}^0b_2^{-1} = u_{32}^0b_1^{-1}.$$

Из (2)  $A_0 = (u_{ij}^0 - b_iu_{3j}^1)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Вычисляя  $A_0X$  и приравнивая ее компоненты к соответствующим компонентам  $\beta X$ , получаем

$$(u_{11}^0 - b_1u_{31}^1)b_1 + (u_{12}^0 - b_1u_{32}^1)b_2 = \beta b_1, \quad (u_{21}^0 - b_2u_{31}^1)b_1 + (u_{22}^0 - b_2u_{32}^1)b_2 = \beta b_2.$$



Так как  $u_{11}b_1 + u_{12}b_2 + u_{13}b_3 = 0$ , то  $u_{11}^0b_1 + u_{12}^0b_2 = 0$ . Аналогично  $u_{21}^0b_1 + u_{22}^0b_2 = 0$ . Следовательно,

$$-u_{31}^1b_1^2 - u_{32}^1b_1b_2 = \beta b_1, \quad -u_{31}^1b_1b_2 - u_{32}^1b_1^2 = \beta b_2.$$

Значит,  $\beta = -u_{31}^1b_1 - u_{32}^1b_2$ .

Точно так же из  $XA_0 = \gamma X$  получаем

$$u_{11}^0b_2 - u_{21}^0b_1 = \gamma b_2, \quad u_{12}^0b_2 - u_{22}^0b_1 = \gamma b_1.$$

Поэтому

$$\gamma = u_{11}^0 - u_{21}^0b_1b_2^{-1} = u_{22}^0 - u_{12}^0b_2b_1^{-1}.$$

Из (2)  $A_1 = (u_{ij}^1 - b_1u_{3j}^2)$ ,  $i, j = 1, 2$ . Так как  $XA_1X = \delta X$ , то  $XA_1 = \delta E$ . Отсюда

$$\delta = b_1b_2(u_{11}^1 - b_1u_{31}^2) - b_1^2(u_{21}^1 - b_2u_{31}^2) + b_2^2(u_{12}^1 - b_1u_{32}^2) - b_1b_2(u_{22}^1 - b_2u_{32}^2)$$

и

$$\delta = b_1b_2(u_{11}^1 - u_{22}^1) - b_1^2u_{21}^1 + b_2^2u_{12}^1 = b_2(b_1u_{11}^1 + b_2u_{12}^1) - b_1(b_1u_{21}^1 + b_2u_{22}^1).$$

Из (6) следует  $u_{11}b_1 + u_{12}b_2 = -u_{13}b_3$ . Тогда

$$\delta = u_{23}^0b_1 - u_{13}^0b_2.$$

Лемма доказана.

Следовательно, образом  $IA$ -автоморфизма при гомоморфизме  $\rho$  будет матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 + \Delta_2 & P_2 \\ \Delta_2^2 & 1 + \Delta_2 \end{pmatrix},$$

где  $\Delta_2 = \text{id}(b_1, b_2)$ . При этом поскольку  $\rho$  — гомоморфизм, определитель этой матрицы будет равен 1. Действительно, если  $\varphi \in \text{IAut } M_3$  и  $\rho(\varphi) = A$ , то  $\rho(\varphi^{-1}) = A^{-1}$ . Значит,  $\det A \in K$  и из вида матрицы получаем, что  $\det A = 1$ .

Обозначим множество всех таких матриц через  $SL_2(P_2, \Delta_2, \Delta_2^2) = \widetilde{SL}_2$ . Подгруппу группы  $\widetilde{SL}_2$ , состоящую из всех ручных матриц указанного вида, обозначим через  $SE_2(P_2, \Delta_2, \Delta_2^2) = \widetilde{SE}_2$ .

**Лемма 8.** Если  $\text{char } K \neq 2$ , то гомоморфизм  $\rho$  сюръективен.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & a_2 \\ b_1^2a_{31} + b_1b_2k + b_2^2a_{32} & 1 + a_4 \end{pmatrix} \in \widetilde{SL}_2,$$

где  $a_1, a_4 \in \Delta_2, a_2, a_{31}, a_{32} \in P_2, k \in K$ .

Учитывая, что  $\text{char } K \neq 2$ , возьмем автоморфизм

$$\sigma = (x_1 + [x_1, x_3]^{k/2} - [x_2, x_3]^{k/2}, x_2 + [x_1, x_3]^{k/2} - [x_2, x_3]^{k/2}, x_3).$$

Непосредственные вычисления показывают, что  $\det J(\sigma) = 1$ , так что это действительно автоморфизм. Используя формулы (5)–(8), получаем

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_\sigma & 1 \end{pmatrix} = t_{21}(\delta_\sigma),$$

где  $\delta_\sigma = (b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2)k/2$ .

Домножив матрицу  $A$  на трансвекцию  $t_{21}(\delta_\sigma)$ , мы избавимся от элемента  $b_1 b_2 k$  и получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 + a'_1 & a_2 \\ b_1^2 a'_{31} + b_2^2 a'_{32} & 1 + a_4 \end{pmatrix} \in \widetilde{SL}_2,$$

где  $a'_1 \in \Delta_2$ ,  $a'_{31}, a'_{32} \in P_2$ .

Матрицу  $B$  можно представить в виде

$$B = E + B_1 + b_2 B_2,$$

где  $B_1$  не зависит от  $b_2$ . Поскольку  $B \in \widetilde{SL}_2$ , то и  $E + B_1 \in \widetilde{SL}_2$ . Действительно,  $\det B = \det(E + B_1) + d = 1$ , где  $d = b_2 d'$ ,  $d' \in P_2$ . Но  $\det(E + B_1)$  зависит только от  $b_1$ , следовательно,  $d = 0$  и  $\det B_1 = 1$ . Значит,  $B(E + B_1)^{-1} = E + b_2 B_3$ , где  $B_3 = B_2(E + B_1)^{-1}$ . Матрица  $E + B_1$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + b_1 c_1 & c_2 \\ b_1^2 c_3 & 1 + b_1 c_4 \end{pmatrix},$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in P_2$ .

Прообразом этой матрицы является автоморфизм

$$\varphi_1 = (x_1, x_2 + [x_1, x_2]^{c_4} + [x_1, x_3]^{c_3}, x_3 + [x_1, x_2]^{c_2} + [x_1, x_3]^{c_1}).$$

Это автоморфизм, так как  $\det J(\varphi_1) = 1$ . То, что  $\rho(\varphi_1) = E + B_1$ , проверяется прямыми вычислениями по формулам (5)–(8).

Достаточно доказать, что у матрицы  $E + b_2 B_3$  тоже есть прообраз в  $\text{IAut } M_3$ . Матрица  $E + b_2 B_3$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 + b_2 d_1 & b_2 d_2 \\ b_2^2 d_3 & 1 + b_2 d_4 \end{pmatrix},$$

где  $d_1, d_2, d_3, d_4 \in P_2$ .

Аналогично случаю с матрицей  $(E + B_1)^{-1}$  прообразом матрицы  $(E + b_2 B_3)$  является автоморфизм

$$\varphi_2 = (x_1, x_2 + [x_1, x_2]^{d_4} + [x_1, x_3]^{d_3}, x_3 + [x_1, x_2]^{d_2} + [x_1, x_3]^{d_1}).$$

Таким образом,  $A = \rho(\varphi_2 \varphi_1 \sigma^{-1})$ , что и требовалось доказать.

**Лемма 9.** *Образ любого ручного IA-автоморфизма при эпиморфизме  $\rho$  лежит в группе  $\widetilde{SE}_2$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\psi \in \text{Aut } M_3$  — произвольный элементарный автоморфизм. Он имеет вид

$$\psi = \left( x_1, \dots, x_{i-1}, \sum_{j=1}^3 \alpha_j x_j + u, x_{i+1}, \dots, x_3 \right),$$

где  $\alpha_j \in K$ ,  $\alpha_i \neq 0$  и  $u \in M_3^2$  не зависит от  $x_i$ . Запишем по-другому:  $\psi = \tau \varphi$ , где

$$\tau = \left( x_1, \dots, x_{i-1}, \sum_{j=1}^3 \alpha_j x_j, x_{i+1}, \dots, x_3 \right)$$

и  $\varphi$  — элементарный IA-автоморфизм. Пусть  $\xi \in T \text{IAut } M_3$ . Тогда

$$\xi = \prod_{i=1}^m \tau_i \varphi_i,$$

где  $\tau_i$  — линейные автоморфизмы и  $\varphi_i$  — элементарные  $IA$ -автоморфизмы. Но

$$\prod_{i=1}^m \tau_i \varphi_i = \prod_{i=1}^m \tau_i (\tau_m^{-1} \dots \tau_2^{-1} \varphi_1 \tau_2 \dots \tau_m) \dots (\tau_m^{-1} \varphi_{m-1} \tau_m) \varphi_m.$$

Таким образом,

$$\xi = \prod_{i=1}^m \tau_i \prod_{i=1}^m \varphi_i^{\lambda_i},$$

где

$$\varphi_i^{\lambda_i} = \lambda_i^{-1} \varphi_i \lambda_i, \quad \lambda_i = \prod_{j=i+1}^m \tau_j \quad (i < m), \quad \lambda_m = \text{id}.$$

Так как  $\xi \in \text{IAut } M_3$ , имеем

$$\prod_{i=1}^m \tau_i = \text{id} \quad \text{и} \quad \xi = \prod_{i=1}^m \varphi_i^{\lambda_i}.$$

Достаточно доказать, что  $\rho(\varphi^\tau) \in \widetilde{SE}_2$  для произвольного элементарного  $\varphi \in \text{IAut } M_3$  и произвольного линейного автоморфизма  $\tau$ .

Пусть  $\tau$  задается отображением  $x \rightarrow Ax$ , где  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ,  $A = (\alpha_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Соответственно  $\tau^{-1} : x \rightarrow Bx$ , где  $B = A^{-1} = (\beta_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Рассмотрим случай  $\varphi = (x_1, x_2, x_3 + u)$ , где  $u \in M_3^2$  не содержит  $x_3$ , т. е.  $u = [x_1, x_2]^s$ , где  $s \in P_2$ . Далее,

$$x_i^{\varphi^\tau} = x_i + \alpha_{i3} w \quad (i = 1, 2, 3),$$

где  $w = [x_1, x_2]^{M_{33}s'} + [x_1, x_3]^{M_{32}s'} + [x_2, x_3]^{M_{31}s'}$ ,  $M_{ij}$  — миноры матрицы  $B$ ,  $s' = \tau^{-1}(s)$ . Отсюда

$$\partial w / \partial x_1 = -(M_{33}b_2 + M_{32}b_3)s', \quad \partial w / \partial x_2 = (M_{33}b_1 - M_{31}b_3)s'.$$

Учитывая разложение  $s' = s'_2 b_3^2 + s'_1 b_3 + s'_0$ , где  $s'_1, s'_0 \in P_2$ , и используя формулы (5)–(8), получаем

$$\alpha = -\alpha_{33} M_{33} s'_0, \quad \beta = \alpha_{33} (M_{32} b_1 + M_{31} b_2) s'_0,$$

$$\gamma = M_{33} (\alpha_{23} b_1 - \alpha_{13} b_2) s'_0, \quad \delta = -(M_{32} b_1 + M_{31} b_2)^2 s'_0.$$

Но  $B = A^{-1}$ , следовательно,

$$M_{31} = \alpha_{13}, \quad M_{32} = -\alpha_{23}, \quad M_{33} = \alpha_{33}.$$

Если  $\alpha_{33} = 0$ , то  $\rho(\varphi^\tau) = t_{21}(\delta) \in \widetilde{SE}_2$ . Иначе

$$\rho(\varphi^\tau) = \begin{pmatrix} 1 + k\alpha & \alpha \\ -k^2\alpha & 1 - k\alpha \end{pmatrix} = t_{21}(-k)t_{12}(\alpha)t_{21}(k) \in \widetilde{SE}_2,$$

где  $k = \alpha_{33}^{-1}(\alpha_{23}b_1 - \alpha_{13}b_2)$ .

Случаи  $\varphi = (x_1, x_2 + u, x_3)$  и  $\varphi = (x_1 + u, x_2, x_3)$  доказываются аналогично.

**Лемма 10.** В  $\text{IAut } M_3$  существуют строго неручные автоморфизмы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [1], что  $SL_2(P_2) \neq SE_2(P_2)$ , т. е. в  $SL_2(P_2)$  существуют неручные матрицы. Пусть  $A \in SL_2(P_2)$  — неручная матрица. Она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} k_1 + a_{11} & k_2 + a_{12} \\ k_3 + a_{21} & k_4 + a_{22} \end{pmatrix},$$

где  $a_{ij} \in \Delta_2$ . Пусть  $k_2 \neq 0$ . Домножим  $A$  на трансвекцию  $t_{21}(\lambda_1)$ , где  $\lambda_1 = (1 - k_1)/k_2$ . Тогда

$$A t_{21}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} + \lambda_1 a_{12} & k_2 + a_{12} \\ k_3 + \lambda_1 k_4 + a_{21} + \lambda_1 a_{22} & k_4 + a_{22} \end{pmatrix} = A_1.$$

Далее, домножим на  $t_{21}(\lambda_2)$ , где  $\lambda_2 = -k_3 - \lambda_1 k_4$ , на  $A_1$ . Получим

$$t_{21}(\lambda_2)A_1 = \begin{pmatrix} 1 + a_{11} + \lambda_1 a_{12} & k_2 + a_{12} \\ \lambda_2 a_{11} + \lambda_1 \lambda_2 a_{12} + a_{21} + \lambda_1 a_{22} & k_4 + \lambda_2 k_2 + \lambda_2 a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}.$$

Так как  $A \in SL_2(P_2)$ , имеем  $\det A = k_1 k_4 - k_2 k_3 = 1$ . Отсюда

$$k_4 + \lambda_2 k_2 = k_4 - k_3 k_2 - k_4(1 - k_1) = 1.$$

Значит,  $A_1 \in \widetilde{SL}_2$  и  $A_1$  неручная, поскольку получена из  $A$  домножением на трансвекции.

Если  $k_2 = 0$ , то  $k_1 \neq 0$  и  $k_4 \neq 0$ , иначе  $\det A \neq 1$ . В этом случае аналогичного результата можно добиться, домножив сперва на  $t_{21}(-k_3/k_4)$ , а потом — на диагональную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1/k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} = t_{12}(1/k_1)t_{21}(1 - k_1)t_{12}(-1)t_{21}(1 - 1/k_1).$$

Если  $\text{char } K \neq 2$ , то согласно лемме 8 в  $\text{IAut } M_3$  найдется такой автоморфизм, образ которого при эпиморфизме  $\rho$  лежит в  $\widetilde{SL}_2 \setminus \widetilde{SE}_2$ . Поскольку  $\text{Inn } M_3 \leq \ker \rho$ , по лемме 9 этот автоморфизм строго неручной.

Если  $\text{char } K = 2$ , то из доказательства леммы 8 видно, что либо  $\text{Im } \rho = \widetilde{SL}_2$ , либо  $\text{Im } \rho$  содержит все матрицы из  $\widetilde{SL}_2$ , кроме матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 + \Delta_2 & P_2 \\ b_1^2 P_2 + b_2^2 P_2 + kb_1 b_2 & 1 + \Delta_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $k \in K^* = K \setminus \{0\}$ . Если  $\text{Im } \rho \neq \widetilde{SL}_2$ , то возьмем неручную матрицу из  $\widetilde{SL}_2 \setminus \text{Im } \rho$ . Она имеет вид (9). Домножив эту матрицу на  $t_{21}(-kb_1 b_2)$ , получим неручную матрицу из  $\text{Im } \rho$ . Лемма доказана.

**Теорема.** Пусть  $\varphi \in \text{IAut } M_3$  — неручной автоморфизм. Тогда элемент  $g = \varphi(x_3) \in M_3$  примитивный строго неручной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что  $g$  примитивный ручной, т. е. существует ручной автоморфизм  $\psi = (g_1, g_2, g_3 = g)$ . Без ограничения общности можно считать, что множество свободных порождающих  $\{g_1, g_2, g\}$   $IA$ -ручное.

Действительно, пусть

$$g_1 = \sum_{j=1}^3 \alpha_{1j} x_j + v_1, \quad g_2 = \sum_{j=1}^3 \alpha_{2j} x_j + v_2,$$

где  $\alpha_{ij} \in K$ ,  $v_1, v_2 \in M_3^2$ . Перепишем автоморфизм  $\psi$  в виде

$$\psi : X \rightarrow DX + V,$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $\psi$  — автоморфизм, матрица  $D$  обратима, так как обратный автоморфизм должен иметь вид

$$\psi^{-1} : X \rightarrow D^{-1}X + W,$$

где  $W = (w_1, w_2, w_3)^T$ ,  $w_i \in M_3^2$ . Подействовав на  $G = (g_1, g_2, g_3)^T$  автоморфизмом  $\theta : X \rightarrow D^{-1}X$ , получим  $G^\theta = X + V'$ , где  $V' = (v_1^\theta, v_2^\theta, v_3^\theta)^T$ . Таким образом, вместо  $\psi$  можно рассматривать ручной (в силу линейности  $\theta$ )  $IA$ -автоморфизм  $\psi' = \psi\theta = (g'_1, g'_2, g)$ .

Образ  $\psi'$  при эпиморфизме  $\rho$  будет лежать в  $\widetilde{SE}_2$ . Из формул (5), (6) следует, что первая строка матрицы  $B = \rho(\psi')$  зависит только от  $u_3$ . Значит, первые строки матриц  $B$  и  $A = \rho(\varphi)$  совпадают. Таким образом, если  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ , то

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где  $b_{21} \in \Delta_2^2$ ,  $b_{22} \in 1 + \Delta_2$ . Отсюда  $B = CA$ , где

$$C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in P_2.$$

Так как  $B \in \widetilde{SE}_2$ , имеем  $c_2 = 1$ . Значит,  $C$  — трансвекция, и если  $A \notin \widetilde{SE}_2$ , то и  $B \notin \widetilde{SE}_2$ . Противоречие доказывает, что элемент  $g = \varphi(x_3)$  примитивный неручной. Доказательство того, что  $g$  строго неручной, фактически такое же, поскольку  $\text{Inn } M_3 \leq \ker \rho$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cohn P. M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 56. P. 618–632.
2. Jung H. W. E. Uber ganze birationale Transformationen der Ebene // J. Reine Angew. Math. 1942. Bd 184. S. 161–174.
3. Kulk, W. van der. On polynomial rings in two variables // Nieuw Arch. Wiscd. (5). 1953. Bd 3. N 1. S. 33–41.
4. Czerniakiewicz A. G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1971, V. 160. P. 393–401; 1972. V. 171. P. 309–315.
5. Makar-Limanov L. The automorphisms of the free algebra of two generators // Funct. Anal. Appl. 1970. V. 4, N 3. P. 262–263.
6. Nagata M. On the automorphism group of  $k[x, y]$ . Kinokuniya; Tokyo: Kyoto Univ., 1972. (Lect. in Math.).
7. Shestakov I. P., Umirbaev U. U. The Nagata automorphism is wild // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2003. V. 100, N 22. P. 12561–12563.
8. Shestakov I. P., Umirbaev U. U. The tame and the wild automorphisms of rings of polynomials in three variables // J. Amer. Math. Soc. 2004. V. 17. P. 197–227.
9. Умирбаев У. У., Шестаков И. П. Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 6. С. 745–748.
10. Umirbaev U. U. Tame and wild automorphisms of polynomial algebras and free associative algebras. Bonn, 2004. (Preprint / Max-Planck Institute fur Mathematik; N 108).

11. Artamonov V. A. The categories of free metabelian groups and Lie algebras // Comment. Math. Univ. Card. 1977. V. 18, N 1. P. 143–159.
12. Bahturin Y. A., Nabijev S. Automorphisms and derivations of Abelian extensions of some Lie algebras // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1992. V. 62. P. 43–57.
13. Roman'kov V. On the automorphism group of a free metabelian Lie algebra // Int. J. Algebra Comput. 2008. V. 18, N 2. P. 209–226.
14. Романьков В. А. Группы автоморфизмов свободных метабелевых алгебр Ли // Междунар. конф. «Алгебра и ее приложения»: Тез. докл. Красноярск, 12–18 авг. 2007 г. Сиб. фед. ун-т. Новосибирск: ИМ СОРАН, ИВМ СОРАН, 2007. С. 114–115.
15. Fox R. H. Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring // Ann. Math. 1953. V. 57, N 2. P. 547–560.
16. Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985.

*Статья поступила 27 августа 2007 г.*

Романьков Виталий Анатольевич, Кабанов Александр Николаевич  
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,  
пр. Мира, 55-А, Омск 644077  
m01kab@mail.ru , romankov@math.omsu.omskreg.ru, romankov48@mail.ru