Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 512.816

О КОМПАКТНЫХ СОЛВМНОГООБРАЗИЯХ РАЗМЕРНОСТИ ≤ 4

В. В. Горбацевич

Аннотация. Изучаются компактные солвмногообразия размерностей 3 и 4 (случаи размерностей 1 и 2 почти тривиальны). Дается подробное описание этих солвмногообразий с точностью до диффеоморфизма в терминах фундаментальной группы и ее разложения в полупрямое произведение. Изучаются особенности топологического строения таких солвмногообразий, в частности — связанные с расслоением Мостова и с разложимостью солвмногообразий в прямое произведение многообразий меньшей размерности. Выделяются специальные классы таких солвмногообразий и соответствующие им классы фундаментальных групп.

Ключевые слова: солвмногообразие, расслоение Мостова.

Введение

Солвмногобразия — это связные гладкие многообразия, которые являются однородными пространствами разрешимых групп Ли. Солвмногообразие M может быть записано в виде $M = R/H$, где R — связная разрешимая группа Ли, а H — замкнутая подгруппа Ли в R. При этом можно считать, что группа Ли R односвязна (переходя в случае необходимости к группе Ли, ее универсально накрывающей), а транзитивное действие группы R на M локально эффективно (что эквивалентно отсутствию в H нетривиальных связных нормальных делителей группы Ли R). Многие подробности об общих свойствах солвмногообразий можно найти в обзорах [1] и [2].

Транзитивное действие группы Ли G на некотором гладком многообразии M называется *несократимым*, если оно локально эффективно и в G нет собственных связных подгрупп Ли, транзитивных на M. Если задано некоторое транзитивное действие группы Ли на M, то от него всегда можно перейти к несократимому действию. Для этого нужно вначале профакторизовать транзитивную группу Ли по связной компоненте единицы в ядре неэффективности действия G на M. Затем, если в получившейся в результате группе Ли G' существуют собственные связные транзитивные подгруппы, нужно выбрать среди них наименьшую (не содержащую нетривиальных связных транзитивных подгрупп). Такой выбор всегда возможен (хотя и не однозначен) в силу конечности размерности группы Ли G'.

Выделим два важных для нас топологических свойства произвольных солвмногообразий M.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00230).

(i) Фундаментальная группа $\pi = \pi_1(M)$ разрешима. Более того, группа π даже полициклична (т. е. получается последовательностью расширений с помощью циклических групп) и обладает другими дополнительными свойствами (например, свободна от кручения и как полициклическая группа есть результат последовательности расширений с помощью группы $\mathbf{Z}$, т. е. является $\mathbf{Z}$-полициклической, подробнее см. [1, 2]).

(ii) Многообразие M асферично, т. е. все его гомотопические группы $\pi_k(M)$ при $k \geq 2$ тривиальны.

Пусть теперь M — компактное однородное многообразие (т. е. компактное гладкое многообразие, на котором существует транзитивное гладкое действие некоторой конечномерной группы Ли). Такое многообразие M оказывается солвмногообразием (т. е. транзитивную на нем группу Ли можно выбрать разрешимой) тогда и только тогда, когда многообразие M асферично и его фундаментальная группа $\pi_1(M)$ разрешима (тем самым указанные выше свойства (i) и (ii) выделяют солвмногообразия в классе всех компактных однородных многообразий). Более того, компактное солвмногообразие однозначно с точностью до диффеоморфизма определяется своей фундаментальной группой (подробнее см. [1, 2]).

В § 1 данной работы рассматривается возможность разложения компактного солвмногообразия в прямое произведение солвмногообразий меньшей размерности. В связи с этим рассматривается классификация компактных солвмногообразий размерности ≤ 4. Важную роль при этом играет изучение расслоения Мостова.

В § 2 изучаются свойства, связанные с параллелизуемостью солвмногообразий, и обсуждается существование локально свободного транзитивного действия на них групп Ли.

В § 3 рассматриваются классы компактных солвмногообразий, обладающих различными дополнительными алгебраическими свойствами.

На протяжении этой статьи все рассматриваемые многообразия гладкие, а расслоения гладкие и локально тривиальные.

Напомним, что *равномерная подгруппа* в группе Ли — это такая замкнутая подгруппа, фактор-пространство по которой компактно; если она еще и дискретна, то называется *решеткой* (иногда — *равномерной решеткой*) в группе Ли.

Некоторые результаты данной статьи навеяны интересными вопросами о трехмерных компактных солвмногообразиях, которые заданы были автору В. Марзантовичем (W. Marzantowicz).

§ 1. Об однородно разложимых компактных солвмногообразиях малой размерности

При изучении компактных солвмногообразий значительную роль играет расслоение Мостова. Оно строится следующим образом.

Пусть N — нильрадикал в разрешимой связной группе Ли R, транзитивной на компактном солвмногообразии M $(M = R/H)$. Тогда известно (именно это и доказал Мостов), что подгруппа $N \cap H$ равномерна в N (т. е. фактор-пространство $N/N \cap H$ компактно), при этом произведение подгрупп $H \cdot N$ есть замкнутая подгруппа Ли в R. Далее, если действие R на M локально эффективно (что мы всегда можем предполагать, см. выше), то на самом деле имеем также включение $H_0 \subset N$, где H_0 — связная компонента единицы стационарной подгруппы H. Рассмотрим расслоение (гладкое и локально тривиальное)

$$N/N \cap H \to R/H \to R/H \cdot N$$

над базой $R/H \cdot N$ со слоем $N/N \cdot H$.

В этом расслоении слой $N/N \cap H$ — компактное нильмногообразие (т. е. однородное пространство нильпотентной группы Ли, в данном случае группы Ли N). При этом подгруппа $(N \cap H)_0$ нормальна в N и потому на слое $N/N \cap H$ транзитивна односвязная нильпотентная группа Ли $N' = N/(N \cap H)_0$, причем стационарная подгруппа Γ' этого действия, изоморфная $H \cap N/(H \cap N)_0$, является решеткой в группе Ли N'. База этого расслоения $R/H \cdot N$ диффеоморфна некоторому тору. Это следует из того, что многообразие $R/H \cdot N$ диффеоморфно A/D, где $A = R/N$ — связная абелева группа Ли, а $D = H/H \cap N$ — решетка в A. Тем самым для компактного солвмногообразия M получаем расслоение (гладкое, локально тривиальное) над тором со слоем — компактным нильмногообразием. Это расслоение и называют *расслоением Мостова.*

На основе конструкции расслоения Мостова легко показать, что компактное солвмногообразие M можно представить в виде башни одномерных расслоений, т. е. рассматривать M как результат последовательных расслоений (начиная с точки) со слоем — окружностью S^1. В частности, из этого выводится утверждение о $\mathbf{Z}$-полицикличности фундаментальной группы компактных солвмногообразий и некоторые другие их свойства.

Рассмотрим подробнее компактные солвмногообразия M малой размерности.

При $\dim M = 1$ имеем $M = S^1$ — окружность (или, что то же, одномерный тор T^1), это единственное одномерное компактное многообразие, на нем транзитивна, в частности, одномерная абелева группа Ли $\mathbf{R}$, поэтому S^1 — солвмногообразие.

При $\dim M = 2$ компактное однородное солвмногообразие диффеоморфно тору T^2 или бутылке Клейна K^2 (всего существует три компактных однородных двумерных многообразия, третье — сфера S^2 — не является солвмногообразием, ибо сфера не асферична).

Отметим некоторые важные для дальнейшего изложения детали относительно многообразия K^2. Это многообразие неориентируемо, оно двулистно накрывается тором T^2. Натуральное расслоение для K^2 имеет вид $S^1 \to K^2 \to S^1$, т. е. его база и слой — окружности (структурная группа здесь $\mathbf{Z}_2$). Можно также представить K^2 и в виде связной суммы $\mathbf{R}P^2 \sharp \mathbf{R}P^2$ двух экземпляров проективной плоскости. Фундаментальная группа $\mathscr{K} = \pi_1(K^2)$ разлагается в полупрямое произведение двух бесконечных циклических групп $\mathscr{K} = \mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}$, задаваемое эпиморфизмом $\phi : \mathbf{Z} \to \operatorname{Aut} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_2$ (ясно, что эпиморфизм $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{Z}_2$ существует только один).

В дальнейшем нас будут интересовать компактные солвмногообразия размерностей 3 и 4. Здесь полное описание с точностью до диффеоморфизма не так элементарно, как для размерностей 1 и 2, причем топологические свойства трехмерных и четырехмерных компактных солвмногообразий весьма интересны. Такого рода компактные многообразия представляют определенный интерес при рассмотрении некоторых вопросов топологии, геометрии и др. Отметим, что общая классификация всех компактных однородных многообразий размерностей 3 и 4 с точностью до диффеоморфизма получена в [3, 4] (причем для трехмерного случая описаны и все односвязные несократимые транзитивные группы Ли).

Некоторые солвмногообразия диффеоморфны прямым произведениям солвмногообразий меньшей размерности. Например, таковы трехмерный тор $T^3 = T^2 \times T^1$ и солвмногообразие $K^2 \times T^1$. На самом деле, очевидно, других трехмерных компактных совмногообразий, разложимых в прямые произведения, не существует. Но существует много неразложимых трехмерных компактных солвмногообразий. Например, среди них трехмерные нильмногообразия $N_3(\mathbf{R})/\Gamma$, где $N_3(\mathbf{R})$ — унипотентная группа матриц третьего порядка (она состоит из унипотентных вещественных матриц третьего порядка, ее размерность равна 3), а Γ — некоторая решетка (все такие решетки с точностью до изоморфизма могут быть явно описаны, см., например, [5]). Но самое большое число компактных трехмерных солвмногообразий — это однородные пространства ненильпотентных разрешимых групп Ли. Именно эти однородные пространства и представляют определенные трудности для изучения.

Пусть M — некоторое компактное солвмногообразие. Положим $\pi = \pi_1(M)$. Нас будет поначалу интересовать топологическое строение многообразия M. Начнем с известного описания группы π (определяющей, как было сказано выше, компактное солвмногообразие M однозначно с точностью до диффеоморфизма). Ее строение для произвольного компактного солвмногообразия выводится (с помощью точной гомотопической последовательности расслоения) из расслоения Мостова для M (описанного выше): любая такая группа включается в точную последовательность вида

$$\{e\} \to \Delta \to \pi \to \mathbf{Z}^s \to \{e\},$$

где $\Delta = \pi_1(N/N \cap H)$ — конечнопорожденная нильпотентная группа, свободная от кручения, а $s = \dim R/N$, причем $s \geq 1$ (последнее неравенство следует из того, что группа π всегда $\mathbf{Z}$-полициклична). При этом оказывается, что можно так выбрать подгруппу Δ, что $s = b_1(\pi) = b_1(M)$ (т. е. число s будет равно первому числу Бетти группы π и равному ему первому числу Бетти многообразия M). Абстрактная группа изоморфна фундаментальной группе некоторого компактного солвмногообразия тогда и только тогда, когда она включается в точную последовательность указанного выше вида, т. е. является расширением конечнопорожденной нильпотентной группы без кручения с помощью конечнопорожденной абелевой группы, свободной от кручения (см., например, обзоры [1, 2]).

Напомним теперь, что для полициклических групп π определен ранг (называемый еще *числом Хирша* полициклической группы), обозначаемый $r(\pi)$ (или $h(\pi)$), для $\mathbf{Z}$-полициклических групп он равен числу последовательных расширений с помощью $\mathbf{Z}$, которыми из $\{e\}$ получаются эти группы. Например, $r(\mathbf{Z}^s) = s$. Ранг аддитивен (относительно прямых произведений и расширений групп), поэтому для группы π, входящей в приведенную выше точную последовательность, имеем $r(\pi) = r(\Delta) + s$. Далее, для компактного солвмногообразия будет $\dim M = r(\pi_1(M))$.

Пусть π — некоторая $\mathbf{Z}$-полициклическая группа. Если $r(\pi) = 1$, то группа π, очевидно, изоморфна $\mathbf{Z}$. При $r(\pi) = 2$ нетрудно проверить, что π будет изоморфна группе $\mathbf{Z}^2$ или же группе $\mathscr{K}$, описанной выше.

При классификациях однородных пространств часто можно ограничиться рассмотрением только однородно неразложимых однородных пространств. Однородное многообразие M называется *однородно разложимым*, если оно диффеоморфно прямому произведению $M_1 \times M_2$ двух однородных многообразий

M_i ($i = 1, 2$) положительной размерности, и *однородно неразложимым* в противном случае. Нужно отметить, что однородная разложимость однородного многообразия не эквивалентна его диффеоморфности прямому произведению двух каких-либо многообразий (не предполагаемых однородными), т. е. не эквивалентна топологической разложимости (в гладкой категории). Например, трехмерное компактное многообразие $S^3 \times F_2$ (где F_2 — неориентируемая поверхность рода 2) является однородным многообразием, но не является однородно разложимым (ибо F_2 не допускает транзитивных действий групп Ли, см. [2, 3]). Однако оказывается, что для случая компактных солвмногообразий однородная разложимость эквивалентна их разложимости (в прямое произведение двух компактных многообразий, мы будем в этом случае говорить о топологической разложимости).

Предложение 1. *Компактное солвмногообразие M однородно разложимо тогда и только тогда, когда оно разложимо в прямое произведение двух многообразий положительной размерности.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно: если однородное многообразие однородно разложимо, то оно разложимо и топологически. Докажем обратное утверждение.

Предположим, что компактное солвмногообразие M диффеоморфно прямому произведению $M_1 \times M_2$ некоторых двух многообразий положительной размерности. Тогда группа $\pi_1(M)$ разлагается, конечно, в прямое произведение фундаментальных групп $\pi_1(M_1) \times \pi(M_2)$. Группы $\pi_1(M_i)$ (как подгруппы в π) можно представить, очевидно, как расширения некоторых конечнопорожденных нильпотентных групп без кручения с помощью некоторых групп вида $\mathbf{Z}^k$, поэтому они изоморфны, как отмечено выше, фундаментальным группам некоторых компактных солвмногообразий, обозначим их через M_2', M_2'. Но тогда солвмногообразие M будет диффеоморфно прямому произведению $M_1' \times M_2'$ этих солвмногообразий (которое, очевидно, тоже является компактным солвмногообразием), ибо его фундаментальная группа изоморфна $\pi_1(M)$, а два компактных солвмногообразия диффеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их фундаментальные группы.

Замечания. 1. Как видно из доказательства предложения 1, разложимость (однородная или топологическая) компактного солвмногообразия M эквивалентна разложимости фундаментальной группы в прямое произведение двух нетривиальных (тем самым в данном случае бесконечных и полициклических) групп.

2. На самом деле в доказательстве предложения 1 солвмногообразиям будут гомеоморфны уже сами многообразия M_i, прямое произведение которых диффеоморфно M. Это вытекает из того факта, что они компактны и асферичны и имеют разрешимые фундаментальные группы, а потому гомеоморфны солвмногообразиям (в [6] это доказано для всех размерностей, кроме 3, а теперь, когда Г. Перельманом доказана геометризационная теорема Терстона, это установлено и в трехмерном случае).

Как отмечено выше, при $\dim M \leq 2$ компактными однородно неразложимыми солвмногообразиями M являются только S^1 и K^2.

При изучении однородно неразложимых компактных солвмногообразий будет полезно такое простое утверждение. Напомним, что через $b_1(X)$ обозначается число Бетти (объекта X — группы или многообразия). Для группы число Бетти b_1 равно рангу абелианизации этой группы (т. е. фактор-группы по коммутанту): $b_1(\pi) = r(\pi/[\pi,\pi])$. Если M — асферичное многообразие, то $b_1(M) = b_1(\pi_1(M))$.

Лемма 1. *Пусть M — компактное солвмногообразие и $b_1(M) = 1$. Тогда оно не является однородно разложимым (и даже просто топологически разложимым — в непрерывной или гладкой категории) многообразием.*

Доказательство. Если такое M однородно разложимо, т. е. $M = M_1 \times M_2$, то $b_1(M) = b_1(M_1)+b_1(M_2)$. Многообразия M_i можно считать компактными солвмногообразиями (см. замечание 2 выше), поэтому для них $b_1(M_i) \geq 1$. Но тогда $b_1(M) \geq 2$, что противоречит сделанному предположению.

Переходим к рассмотрению компактных солвмногообразий небольшой (но большей, чем 1 или 2) размерности. Следующее утверждение очень важно в дальнейшем.

Предложение 2. *Пусть M — компактное солвмногообразие размерности ≤ 4, причем пусть для него $b_1(M) \geq 2$. Тогда для этого солвмногообразия выполнено одно из трех утверждений:*

(a) *M однородно разложимо;*

(b) *M — (неразложимое) нильмногообразие;*

(c) *M двулистно накрывается прямым произведением неразложимого трехмерного нильмногообразия и окружности.*

Доказательство. Так как группа $\pi_1(M)$ $\mathbf{Z}$-полициклична, а многообразие M асферично, то $b_1(M) \leq 4$. Поэтому $b_1(M)$ равно 2, 3 или 4.

Вначале рассмотрим случай, когда $b_1(M) = 2$.

Положим $\pi = \pi_1(M), r = r(\pi)$. Группа π является $\mathbf{Z}$-полициклической, и $r \leq 4$. Случаи $r = 1, 2$ тривиальны, они рассмотрены выше, и утверждение предложения 2 для них выполняется.

Пусть теперь $r = 3$ (тем самым мы прежде всего рассмотрим трехмерные компактные солвмногообразия). В этом случае в точной последовательности для π, приведенной выше, будет $s = 2$, поэтому группа Δ изоморфна $\mathbf{Z}$ (так как для нее в силу аддитивности ранга $r = 1$). Тем самым мы имеем точную последовательность $\{0\} \to \mathbf{Z} \to \pi \to \mathbf{Z}^2 \to \{0\}$. Рассмотрим естественное действие группы $\mathbf{Z}^2$ автоморфизмами на $\mathbf{Z}$ (в силу абелевости $\mathbf{Z}$ это действие не зависит от выбора представителей группы $\mathbf{Z}^2$ в π). Оно дает гомоморфизм $\lambda : \mathbf{Z}^2 \to \operatorname{Aut}\mathbf{Z} \simeq \mathbf{Z}_2$. Если он тривиален, то группа π нильпотентна. В этом случае M является нильмногообразием, что дает варианты (a) или (b) предложения. При этом $b_1 = 2$, следовательно, группа π неабелева и $r = 3$, а потому нильмногообразие M на самом деле будет неразложимым, т. е. вариант (a) здесь невозможен.

Если же гомоморфизм λ нетривиален, то он обязательно эпиморфен и его ядро $\ker\lambda$ — это подгруппа индекса 2 в $\mathbf{Z}^2$. Но для любой подгруппы индекса 2 в $\mathbf{Z}^2$ всегда можно выбрать такое разложение группы $\mathbf{Z}^2$ в прямое произведение групп $\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$, что $\ker\lambda = 2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. Тогда, взяв произведение нормального делителя $\mathbf{Z} \subset \pi$ (входящего в указанную выше точную последовательность групп) и второго прямого множителя $\mathbf{Z}$ (а точнее, его прообраза при естественном эпиморфизме $\pi \to \mathbf{Z}^2$), мы получим в π нормальную подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z}^2$, фактор-группа по которой будет изоморфна $\mathbf{Z}$ (фактически она изоморфна первому прямому множителю в указанном выше прямом разложении группы $\mathbf{Z}^2$). Получаем такую точную последовательность для π: $\{0\} \to \mathbf{Z}^2 \to \pi \to \mathbf{Z} \to \{0\}$.

Как легко видеть из приведенного рассуждения, группа π на самом деле изоморфна прямому произведению $\mathbf{Z} \times \mathscr{K}$. Поэтому солвмногообразие M будет однородно разложимым (и диффеоморфным $K^2 \times S^1$).

Рассмотрим теперь случай, когда $r = 4$ (т. е. случай, когда компактное солвмногообразие M четырехмерно), а b_1 все еще равно 2. В этом случае мы имеем, очевидно, точную последовательность $\{0\} \to \mathbf{Z}^2 \to \pi \to \mathbf{Z}^2 \to \{0\}$ (так как Δ — нильпотентная группа ранга 2, свободная от кручения и, значит, изоморфная $\mathbf{Z}^2$). Тем самым группа π является расширением группы $\mathbf{Z}^2$ с помощью группы $\mathbf{Z}^2$. Это расширение задает естественный гомоморфизм $\rho : \mathbf{Z}^2 \to GL(2, \mathbf{Z})$. Отметим, что группа $GL(2, \mathbf{Z})$ является подгруппой в группе $SL_{\pm}(2, \mathbf{R})$ — группе Ли, состоящей из вещественных матриц второго порядка, определитель которых равен ± 1 (эта группа является алгебраической подгруппой в $GL(2, \mathbf{R})$ и имеет две связные компоненты).

Рассмотрим образ $\mathrm{Im}(\rho)$ этого гомоморфизма. Это некоторая абелева подгруппа в $SL_{\pm}(2, \mathbf{R})$. Предположим вначале, что она цикличная (конечная или бесконечная). Тогда тем же приемом (разложением $\mathbf{Z}^2$ подходящим образом в прямую сумму $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$), как выше для случая $h = 3$, показывается, что в этом случае группа π разложима (причем один прямой множитель изоморфен $\mathbf{Z}$). Поэтому компактное солвмногообразие M однородно разложимо.

Предположим теперь, что группа $\mathrm{Im}(\rho)$ конечна. Тогда она как конечная абелева подгруппа в $GL(2, \mathbf{Z})$ в силу хорошо известной классификации конечных подгрупп в $GL(2, \mathbf{Z})$ тривиальна или изоморфна $\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_6$ (во всех этих случаях она, в частности, циклична) или группе $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. В случаях, когда $\mathrm{Im}(\rho)$ циклична, однородная разложимость M вытекает из сказанного выше. Если же она изоморфна $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, то, как нетрудно понять, наша группа π изоморфна $\mathscr{K} \times \mathscr{K}$, поэтому компактное солвмногообразие M диффеоморфно $K^2 \times K^2$, в частности, M однородно разложимо.

Остается рассмотреть случай, когда группа $\mathrm{Im}(\rho)$ бесконечна, но не циклична. Рассмотрим ее алгебраическое замыкание. Это некоторая абелева алгебраическая подгруппа в $SL_{\pm}(2, \mathbf{R})$, причем положительной размерности. Она содержится в некоторой максимальной абелевой подгруппе, которая, очевидно, тоже будет алгебраичной. Но в группе $SL_{\pm}(2, \mathbf{R})$ есть только две максимальные абелевы подгруппы положительной размерности: ортогональная подгруппа $O(2)$ и прямое произведение унипотентной односвязной группы Ли и центральной подгруппы, изоморфной $\mathbf{Z}_2$ (и состоящей из скалярных матриц). Разберем эти два случая. Подгруппа $\mathrm{Im}(\rho)$ дискретна (так как она содержится в дискретной подгруппе $GL(2, \mathbf{Z})$) и, значит, содержится в $O(2)$ тогда и только тогда, когда она конечна, но этот случай уже рассмотрен выше, а в нашем контексте он просто невозможен ($O(2)$ не может быть алгебраическим замыканием подгруппы $\mathrm{Im}(\rho)$). В втором случае π имеет нильпотентную подгруппу индекса 2, которая есть прямое произведение $\mathbf{Z}$ и нильпотентной группы ранга 3, свободной от кручения. В этом случае многообразие M двулистно накрывается прямым произведением окружности и трехмерного компактного нильмногообразия, фундаментальная группа которого изоморфна указанной выше нильпотентной группе. Мы пришли к к варианту (c) предложения 2.

До сих пор мы предполагали, что $b_1 = 2$. Теперь рассмотрим случаи, когда $b_1(M) > 2$ (напомним, что $b_1 \leq 4$). При $r = 3$ группа π абелева, поэтому $M = T^3$. При $r = 4$ имеем расширение $\{0\} \to \mathbf{Z} \to \pi \to \mathbf{Z}^3 \to \{0\}$ и так же, как выше при рассмотрении случая $b_2 = 2$, выводим, что группа π разложима в нетривиальное прямое произведение и, значит, солвмногообразие M однородно разложимо. Предложения 2 доказано.

Из доказательства предложения 1 вытекает, в частности, что для трехмерного компактного солвмногообразия M всегда существует точная последовательность вида $\{0\} \to \mathbf{Z}^2 \to \pi = \pi_1(M) \to \mathbf{Z} \to \{0\}$. Другими словами, группа π всегда может рассматриваться как расширение группы $\mathbf{Z}^2$ (нормальной подгруппы) с помощью группы $\mathbf{Z}$. Поэтому группа π может быть представлена в виде полупрямого произведения $\pi = \mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$, где $\phi : \mathbf{Z} \to GL(2, \mathbf{Z})$ — некоторый гомоморфизм. Рассмотрим это представление подробнее.

Группа $GL(2, \mathbf{Z})$ состоит из целочисленных обратимых матриц (их определители равны ± 1). Гомоморфизм $\phi : \mathbf{Z} \to GL(2, \mathbf{Z})$ однозначно определяется элементом $\phi(1) \in GL(2, \mathbf{Z})$. При этом матрица $A = \phi(1)$ определяется группой π однозначно с точностью до целочисленного подобия (т. е. с точностью до сопряжения элементами из $GL(2, \mathbf{Z})$) и перехода $A \to A^{-1}$ к обратной матрице (последнее связано с двузначным выбором образующей в группе $\mathbf{Z}$).

Рассмотрим два простых примера. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то $\pi = \mathbf{Z} \times \mathscr{K}$. При $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в группе π имеется не только нормальный делитель, изоморфный $\mathscr{K}$, но и другой, изоморфный $\mathbf{Z}^2$, хотя сама группа в прямое произведение в этом случае в отличие от первого примера не разлагается. Следующая ниже теорема показывает, что расслоения типа расслоения Мостова для компактных солвмногообразий малой размерности можно выбрать имеющими весьма простой вид. Отметим, что для компактного солвмногообразия M размерности 2 имеется расслоение вида $S^1 \to M \to S^1$.

Теорема 1. *Для компактного солвмногообразия размерности* 3 *существует расслоение вида* $T^2 \to M \to T^1$.

Доказательство. Если M — нильмногообразие, то существование расслоения указанного вида доказывается очень легко (отметим, что для нильмногообразий это расслоение не будет расслоением Мостова). Дело в том, что для компактных нильмногообразий стационарная подгруппа всегда дискретна (если транзитивное действие локально эффективно, что мы всегда можем предполагать). Но существуют только две односвязные нильпотентные группы Ли: $\mathbf{R}^3$ и $N_3(\mathbf{R})$. Для каждой из них требуемое расслоение строится совершенно очевидно (для $N_3(\mathbf{R})$ см., например, [2]).

Для доказательства в общем случае нам потребуются некоторые специальные методы описания компактных солвмногообразий. Детали можно найти, например, в [1, 2]. Пусть M — некоторое компактное солвмногообразие размерности 3 или 4. Вообще говоря, расслоение Мостова, построенное для произвольного транзитивного действия ненильпотентной разрешимой группы Ли на M, вовсе не обязательно будет иметь вид, указанный в теореме 1. Покажем, что, выбрав транзитивную группу подходящим образом, мы сможем получить расслоение указанного в теореме 1 вида.

Из доказательства предложения 2 при $\dim M = 3$ для группы $\pi = \pi_1(M)$ имеем разложение группы π в полупрямое произведение $\pi = \mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$; здесь имеется точная последовательность групп

$$\{0\} \to \mathbf{Z}^2 \to \pi \to \mathbf{Z} \to \{0\}.$$

Известно, что по такой точной последовательности (и даже в более общей ситуации, см. [1]) можно построить такое компактное солвмногообразие M, фундаментальная группа которого изоморфна группе π (этой группой многообразие M определяется однозначно с точностью до диффеоморфизма, хотя на нем могут действовать транзитивно различные группы Ли). Явная конструкция для этого специального случая приведена в [1, с. 244, 245]. Дадим ее краткое изложение.

Рассмотрим двумерную комплексную плоскость $\mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^2 \otimes \mathbf{C}$ как тензорное произведение подгруппы $\mathbf{Z}^2 \subset \mathbf{R}^2$ на $\mathbf{C}$. Действие группы $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{Z}^2$, заданное гомоморфизмом ϕ (см. выше), продолжается естественным образом на $\mathbf{C}^2$. Рассмотрим элемент $A = \phi(1) \in GL(2, \mathbf{Z})$, однозначно определяющий гомоморфизм ϕ. Если существует такая матрица X, что $A = \exp(X)$ (где exp — экспоненциальное отображение матриц), то действие группы $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{C}^2$ продолжается до линейного действия группы $\mathbf{R}$. Но в общем случае вещественной матрицы X, для которой $A = \exp(X)$, может и не существовать. Именно по этой причине приходится переходить к комплексификации и рассматривать не $\mathbf{R}^2 = \mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{R}$, а $\mathbf{C}^2$, ибо, как хорошо известно, экспоненциальное отображение $\exp : gl(n, \mathbf{C}) \to GL(n, \mathbf{C})$ является отображением на всю группу $GL(2, \mathbf{C})$ (см., например, [7], более общий результат получен в [8]). Поэтому всегда существует такая матрица $X \in gl(2, \mathbf{C})$, что $A = \exp(X)$, тем самым естественное действие группы $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{C}^2$ продолжается (хотя и неоднозначно, так как матрица X определяется по A далеко не однозначно) до действия группы $\mathbf{R} \supset \mathbf{Z}$ на $\mathbf{C}^2$. В силу этого мы можем ввести полупрямое произведение $R = \mathbf{R} \times_\phi \mathbf{C}^2$, где ϕ рассматривается как гомоморфизм $\mathbf{R} \to GL(2, \mathbf{C})$, $\phi(t) = \exp(tX)$ $(t \in \mathbf{R})$. Получили пятимерную односвязную разрешимую группу Ли R — именно она и будет нужной нам транзитивной на M группой Ли (для нее расслоение Мостова будет иметь вид, указанный в формулировке теоремы 1).

Для построения транзитивного действия полученной группы Ли R на M нужно указать стационарную подгруппу. Для этого разложим $\mathbf{C}$ в прямую сумму двух вещественных подпространств («вещественного» и «чисто мнимого»): $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$. Группа π, рассматриваемая как полупрямое произведение $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$, вкладывается естественным образом в $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{R}^2$. Вложив $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{C}^2$ в качестве первого («вещественного») прямого слагаемого, мы получим и вложение группы π в группу Ли R в качестве дискретной подгруппы (хотя и не равномерной). Положим теперь $H = \pi \cdot i\mathbf{R}^2$. Это произведение группы π (отождествленной с ее образом при указанном выше вложении в R) и двумерной абелевой подгруппы $i\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{C}^2 \subset R$. Как нетрудно убедиться, H — замкнутая равномерная подгруппа Ли в группе Ли R, причем группа H/H_0 изоморфна π.

Рассмотрим солвмногообразие R/H. Оно компактно и его фундаментальная группа изоморфна π (ибо R односвязна, а $H/H_0 \simeq \pi$). Но тогда компактное солвмногообразие R/H диффеоморфно M (так как компактные солвмногообразия с изоморфными фундаментальными группами диффеоморфны). Тем самым получаем, что построенная группа Ли R транзитивна на заданном компактном солвмногообразии M. Именно исходя из этого транзитивного действия на M и рассмотрим расслоение Мостова для M.

Ясно, что нильрадикал N группы Ли R совпадает с $\mathbf{C}^2$ (при условии, что гомоморфизм ϕ не унипотентен, что мы можем предполагать заранее, так как для унипотентного ϕ группа π нильпотентна и утверждение теоремы 1 в этом случае уже рассмотрено выше). Слой $N/N \cap H$ расслоения Мостова совпадает с

$\mathbf{C}^2/(\mathbf{Z}^2 \oplus i\mathbf{R}^2) = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, т. е. диффеоморфен тору T^2. База расслоения Мостова имеет вид $R/H \cdot \mathbf{C}^2$ и потому диффеоморфна окружности $\mathbf{R}/\mathbf{Z} = T^1$. Мы видим, что расслоение Мостова является тем самым расслоением, существование которого утверждается в теореме 1. Это завершает доказательство теоремы 1.

Замечания. 1. Отметим, что справедливо утверждение, обратное (причем в более общей ситуации) теореме 1. А именно, если компактное многообразие допускает расслоение над тором со слоем, являющимся тором, то оно гомеоморфно солвмногообразию. Это вытекает из того, что существует компактное солвмногообразие, фундаментальная группа которого изоморфна фундаментальной группе исходного многообразия, поэтому два эти многообразия гомотопически эквивалентны, даже гомеоморфны.

2. Утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо и для некоторых классов компактных четырехмерных солвмногообразий M. А именно, в некоторых случаях для таких M существует расслоение вида $T^2 \to M \to T^2$. Например, это верно для компактных четырехмерных нильмногообразий. Чтобы убедиться в этом, нужно только заметить, что $M = N/\Gamma$, где Γ — решетка в некоторой нильпотентной односвязной группе Ли N. Так как N нильпотентна, то $\operatorname{codim}_N[N,N] \geq 2$. Поскольку хорошо известно, что $\Gamma \cap [N,N]$ будет решеткой в $[N,N]$, то, как нетрудно показать, существует такая содержащая $[N,N]$ замкнутая подгруппа $F \subset N$, что $\operatorname{codim}_N F = 2$, а $\Gamma \cap F$ — решетка в F. Тогда расслоение $F/F \cap \Gamma \to M = N/\Gamma \to N/\Gamma F$ и будет нужным нам расслоением. Покажем это. База $N/\Gamma F$ — однородное пространство абелевой группы Ли N/F (напомним, что $F \supset [N,N]$) размерности 2 и с дискретной стационарной подгруппой, т. е. база указанного расслоения диффеоморфна тору T^2. Слой является компактным нильмногообразием размерности 2 и, значит, обязательно диффеоморфен тору.

Далее, если $b_1(M) \geq 2$, то для компактного четырехмерного солвмногообразия M расслоение $T^2 \to M \to T^2$ тоже всегда существует. В этом случае базу подходящего расслоения Мостова можно считать диффеоморфной T^2, а слой (двумерный), будучи нильмногообразием, обязательно диффеоморфен T^2.

Отметим теперь, что если четырехмерное компактное солвмногообразие M однородно разложимо, то для него тоже существует расслоение вида $T^2 \to M \to T^2$. Доказательство сводится к рассмотрению случаев солвмногообразий меньшей размерности. А вот для произвольных четырехмерных компактных солвмногообразий расслоение вида $T^2 \to M \to T^2$ существует, как нетрудно убедиться на примерах, не всегда.

3. Теорема 1 позволяет заметно упростить изучение компактных трехмерных солвмногообразий M. Дело в том, что до сих пор при изучении таких солвмногообразий по отдельности рассматривались случаи, когда расслоение Мостова имело вид $T^1 \to M \to T^2$ и $T^2 \to M \to T^1$. В силу теоремы 1 для этого во многих случаях нет необходимости — первое из указанных расслоений можно всегда заменить вторым.

Теперь рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся классификации трехмерных компактных солвмногообразий с точностью до диффеоморфизма. Как уже неоднократно было отмечено выше, это эквивалентно классификации с точностью до изоморфизма групп вида $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$. Классификация таких групп сводится к классификации целочисленных матриц $A \in GL(2,\mathbf{Z})$ с точностью до $\mathbf{Z}$-подобия (еще возможен переход от A к A^{-1}, но он почти несуществен).

Рассмотрим вопрос о подобии целочисленных матриц подробнее.

Две матрицы $A, B \in GL(2, \mathbf{Z})$ называются $\mathbf{Z}$-*эквивалентными* (это обозначается через $A \sim_{\mathbf{Z}} B$), если существует такая матрица $C \in GL(2, \mathbf{Z})$, что $B = CAC^1$, т. е. матрицы A, B сопряжены с помощью матрицы C. Аналогично две матрицы называются $\mathbf{Q}$-*эквивалентными* (это обозначается через $A \sim_{\mathbf{Q}} B$), если $B = CAC^{-1}$ для некоторой матрицы $C \in GL(2, \mathbf{Q})$. Отметим, что для этих отношений эквивалентности инвариантами являются определитель матрицы, который в нашем случае равен ± 1, и ее след, который в нашем случае есть некоторое целое число: $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = m \in \mathbf{Z}$. Характеристический многочлен равен $x^2 - mx \pm 1$. Для отношения $\sim_{\mathbf{Q}}$ значения этих двух инвариантов однозначно определяют класс эквивалентности, а для $\sim_{\mathbf{Z}}$ это уже не так. Дело в том, что отношения $\sim_{\mathbf{Q}}$ и $\sim_{\mathbf{Z}}$ существенно различны. Если выполнено второе из них, то выполнено и первое, а обратное утверждение неверно. Рассмотрим несколько примеров такого рода.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Ясно, что над $\mathbf{Q}$ две эти матрицы подобны (так же, как и над $\mathbf{R}$). Целочисленной сопрягающей матрицы с определителем, равным ± 1 для матриц A, B, как нетрудно проверить, не существует. Отметим, что определитель матриц A, B в этом случае равен -1. Группы вида $\mathbf{Z} \times_{\phi} \mathbf{Z}^2$, соответствующие матрицам A и B, неизоморфны. Эти группы суть фундаментальные группы некоторых трехмерных компактных солвмногообразий, но они не могут быть вложены в качестве решеток в трехмерные односвязные группы Ли.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Эти матрицы тоже рационально подобны, но не являются, как и в предыдущем примере, целочисленно подобными. В примере 2 в отличие от предыдущего определитель равен $+1$. При этом собственные значения этих двух матриц вещественны и положительны (как корни характеристического многочлена $x^2 - 3x + 1$). Соответствующие группы тоже неизоморфны, но могут быть вложены в качестве решеток в одну и ту же трехмерную разрешимую группу Ли типа (R) (см. § 3 ниже).

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Здесь ситуация с различием двух типов подобий та же, что и в предыдущих двух примерах, определитель равен 1, характеристические корни тоже вещественны и положительны.

Фиксируем значения двух инвариантов: $\mathrm{tr}(A) = m \in \mathbf{Z}, \det(A) = \pm 1$. Множество всех матриц $B \in GL(2, \mathbf{Z})$ с такими же значениями этих инвариантов обычно называют *матричным классом.* На этом множестве естественным образом действует (сопряжениями) группа $GL(2, \mathbf{Z})$, орбиты этого действия — классы $\mathbf{Z}$-эквивалентных матриц. Как показано выше на примерах, число таких орбит может быть больше единицы. Однако имеет место следующее важное утверждение: число этих орбит всегда конечно [9]. Это утверждение доказано в [9] через сопоставление указанным орбитам идеалов в кольце, порожденном собственными значениями матриц из орбиты. Данное утверждение о конечности числа орбит в сочетании с тем, что сказано выше о фундаментальной группе компактных трехмерных солвмногообразий, дает доказательство такого утверждения.

Теорема 2. *Для данной матрицы $A \in GL(2, \mathbf{Z})$ число недиффеоморфных между собой компактных трехмерных солвмногообразий M^3, для которых*

$\pi_1(M) = \mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$ и $\phi(1) = A$, конечно.

Само число недиффеоморфных солвмногообразий в теореме 2 связано с числом представлений числа ± 1 квадратичной формой $x^2+mxy+y^2$. Некоторые конструктивные соображения по явному вычислению числа орбит в пространстве целочисленных матриц можно найти в [10]. Но рассчитывать на простые явные формулы не приходится.

§ 2. Параллелизуемые и специальные компактные солвмногообразия

Далее в этой статье будем рассматривать различные классы компактных солвмногообразий малой размерности. Начнем с рассмотрения специальных солвмногообразий — так будем (следуя предложению В. Марзантовича и его соавторов) называть компактные солвмногообразия в случае, если стационарная подгруппа соответствующего транзитивного действия разрешимой группы Ли дискретна (здесь было бы уместно и название «локально групповые многообразия», а для соответствующего транзитивного действия — «локально свободное»). Специальность солвмногообразия — это не топологическое свойство, на диффеоморфных многообразиях и даже на одном и том же многообразии могут существовать как специальные транзитивные действия, так и транзитивные действия разрешимых групп Ли, для которых стационарная подгруппа не дискретна (т. е. не специальные). Например, на торе T^2 транзитивно действует не только группа $\mathbf{R}^2$ (так, что $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, это дает специальное однородное пространство), но и группа движений $E(2)$ евклидовой плоскости, которая является трехмерной разрешимой группой Ли (стационарная подгруппа одномерна — ее связная компонента единицы состоит из вращений вокруг фиксированной точки плоскости).

Говоря несколько иначе, специальное однородное пространство допускает транзитивное действие группы Ли, которое является локально свободным (это условие в точности эквивалентно дискретности стационарной подгруппы).

Специальные солвмногообразия представляются в виде $M = R/\Gamma$, где R — односвязная разрешимая группа Ли, а Γ — решетка в R (т. е. дискретная подгруппа с компактным фактор-пространством). Отметим, что любое специальное солвмногообразие обязательно параллелизуемо (т. е. его касательное расслоение тривиально), в частности, оно должно быть ориентируемо. Однако если солвмногообразие M ориентируемо, то оно не обязательно параллелизуемо (хотя до размерности 4 включительно это все же верно, см. ниже) и не обязательно специально. Тем самым существуют ориентируемые, но не параллелизуемые и параллелизуемые, но не специальные компактные солвмногообразия.

Можно дать необходимые и достаточные условия для того, чтобы компактное солвмногообразие можно было считать специальным. Это сделано, например, в [1] в виде условий, которым должна удовлетворять фундаментальная группа компактного солвмногообразия. Они основаны на конструкции полупростого расщепления (за деталями отсылаем к [1]).

В [1] доказано, что любое компактное солвмногообразие конечнолистно накрывается специальным, некоторые уточнения этого утверждения для малых размерностей приводятся ниже.

Рассмотрим простые примеры. В двумерном случае ситуация такова: тор T^2 специален, а бутылка Клейна — нет (ибо она неориентируема), но она двулистно накрывается тором — специальным солвмногообразием. Ясно, что тор

T^3 и многообразие Ивасавы $N_3(\mathbf{R})/N_3(\mathbf{Z})$ являются трехмерными специальными компактными солвмногообразиями.

В трехмерном случае компактных солвмногообразий не два, как в двумерном случае, а намного больше (с точностью до диффеоморфизма их счетное множество), но, как оказывается, все же имеет место некоторая аналогия с двумерным случаем.

Теорема 3. *Любое трехмерное компактное солвмногообразие либо специально, либо двулистно накрывается специальным. Любое четырехмерное компактное солвмногообразие либо само специально, либо имеет двух- или четырехлистное накрытие специальным солвмногообразием.*

Доказательство. Специальность компактного солвмногообразия эквивалентна тому, что его фундаментальную группу (имеющую, как мы знаем, вид $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$) можно реализовать в виде решетки в некоторой односвязной разрешимой группе Ли. Этому препятствует, как отмечено выше, тот факт, что для вещественных матриц экспоненциальное отображение $\exp : gl(2,\mathbf{R}) \to GL(2,\mathbf{R})$ не является сюръективным (даже если ограничиться связной компонентой единицы группы $GL(2,\mathbf{R})$ — подгруппы индекса 2, состоящей из матриц с положительными определителями). Если же матрица $A = \phi(1) \in GL(2,\mathbf{Z})$ лежит в образе экспоненциального отображения, то мы можем взять группу Ли $R = \mathbf{R} \times_\phi \mathbf{R}^2$ и вложить в нее группу $\pi = \pi_1(M)$ в качестве решетки так же, как это сделано в схожей ситуации при доказательстве теоремы 1.

Но что делать, если матрица A не лежит в образе экспоненциального отображения? Здесь на помощь приходит одно свойство матриц, которое в нужном нам виде сформулировано ниже в виде леммы 1. На самом деле подобное утверждение справедливо и в более общей ситуации (см., например, [7]), а для матриц оно хорошо известно уже очень давно. Для полноты изложения приведем краткое описание доказательства в нужном нам случае.

Лемма 1. *Для любой матрицы $A \in GL(2,\mathbf{R})$ ее квадрат логарифмируем, т. е. существует такой элемент $X \in gl(2,\mathbf{R})$, что $A^2 = \exp(X)$.*

Доказательство леммы 1. В [7] показано, что вещественная матрица (вещественно) логарифмируема тогда и только тогда, когда у нее совсем нет элементарных делителей, соответствующих отрицательным собственным значениям, или же каждый такой элементарный делитель повторяется четное число раз. Там же отмечено (гл. VIII), что второе условие выполнено автоматически для любой матрицы вида $A = B^2$.

Продолжим доказательство теоремы 3. Переход от A к A^2 эквивалентен переходу от группы π к подгруппе индекса 2 или, что эквивалентно, от M к двулистному накрытию, которое и дает нам специальное солвмногообразие. Этим завершено доказательство теоремы 3 в трехмерном случае.

Рассмотрим четырехмерные компактные солвмногообразия M.

Компактные нильмногообразия всегда специальны. Пусть теперь M — разложимое компактное четырехмерное солвмногообразие. Тогда либо оно диффеоморфно прямому произведению окружности на трехмерное солвмногообразие и в силу доказанного выше или специально, или имеет специальное двулистное накрытие, либо диффеоморфно прямому произведению двух двумерных солвмногообразий. Двумерное солвмногообразие диффеоморфно тору или бутылке Клейна. Неспециальными будут прямое произведение тора и бутылки Клейна, а также прямое произведение двух бутылок Клейна. В первом случае

M двулистно накрывается тором, во втором случае — тоже тором, но четырехлистно. Нетрудно показать, что любое двулистное накрытие солвмногообразия $K^2 \times K^2$ специальным быть не может (ибо никакая подгруппа конечного индекса в $\mathscr{K} \times \mathscr{K}$ не изоморфна решетке в четырехмерной разрешимой односвязной группе Ли), так что в этом случае двулистного накрытия для получения специально солвмногообразия недостаточно и приходится переходить к четырехлистному (а трехлистное, как легко понять, совершенно не подходит).

Теперь применим предложение 2 и заметим, что для доказательства теоремы 3 достаточно рассмотреть еще два случая — исключительный случай (вариант (c)) и случай, когда $b_1 = 1$. Но в исключительных случаях M либо само является нильмногообразием (и потому специально), либо двулистно накрывается нильмногообразием, поэтому здесь теорема 3 тоже доказана.

Пусть теперь $b_1(M) = 1$. Тогда группа $\pi_1(M)$ есть расширение с помощью $\mathbf{Z}$ группы $\mathbf{Z}^3$ или некоторой решетки в $N_3(\mathbf{R})$. С помощью аналога леммы 1 в этих случаях так же, как выше в трехмерном случае, доказывается существование специального двулистного накрытия. Это завершает доказательство теоремы 3.

Отметим, что вопрос о специальности того или иного трехмерного компактного солвмногообразия может быть решен совершенно конструктивно. Для этого рассмотрим матрицу $A \in GL(2, \mathbf{Z})$, задающую структуру полупрямого произведения для фундаментальной группы $\pi = \pi_1(M)$. Пусть λ_1, λ_2 — собственные числа матрицы A. Матрица A логарифмируема тогда и только тогда, когда эти собственные значения оба положительны или оба отрицательны и при этом еще равны между собой (см. цитированное выше утверждение из [7]). В этом случае соответствующее солвмногообразие M^3 специально (точнее, оно диффеоморфно специальному). Если среди них есть отрицательные, то обычно нужно от A переходить к A^2 и от M — к двулистному накрытию (так как само M в этом случае обычно не является специальным). Например, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, то ее собственные значения отрицательны и различны. Поэтому для группы $\pi = \mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$, у которой $\phi(1) = A$, соответствующее трехмерное компактное солвмногообразие специальным не будет.

Конструктивное описание четырехмерных компактных специальных солвмногообразий тоже в принципе может быть получено, но оно будет довольно громоздким, так как будет состоять из нескольких отдельных серий частных случаев. Отметим, что пример неспециального компактного четырехмерного ориентируемого (и потому параллелизуемого, см. ниже) солвмногообразия уже был приведен выше. Это двулистное ориентируемое накрытие над прямым произведением двух экземпляров бутылки Клейна $K^2 \times K^2$.

Теперь рассмотрим вкратце вопрос о параллелизуемости компактных солвмногообразий малой размерности. Если многообразие параллелизуемо (т. е. его касательное расслоение тривиально), то оно ориентируемо. В [11] без доказательства отмечено, что все ориентируемые компактные солвмногообразия размерности ≤ 4 параллелизуемы, и доказано, что структурная группа касательного расслоения для компактного солвмногообразия M может быть редуцирована к $\mathbf{Z}_2^k$ при некотором $k \geq 0$ (на самом деле из анализа того доказательства можно понять, что $k \leq b_1(M)$). Там также доказано, что любое компактное ориентируемое солвмногообразие M линейно параллелизуемо, а это эквивалентно указанному выше утверждению относительно структурной группы касательного расслоения. Используя методы работы [11], можно подробнее рассмотреть четырехмерный случай и убедиться, что действительно все компактные ориентируемые четырехмерные солвмногообразия параллелизуемы (в [11] имеется и некоторая конструкция, пригодная для построения параллелизаций). Там же приведен пример непараллелизуемого ориентируемого компактного солвмногообразия размерности 5 (его расслоение Мостова имеет вид $T^3 \to M \to T^2$). Из [11] также видно, что вопрос о параллелизуемости компактного солвмногообразия сводится к изучению строения его фундаментальной группы.

В [12] намечено доказательство утверждения работы [11] о параллелизуемости четырехмерных ориентируемых солвмногообразий (параллелизация строилась с помощью некоторых специальных конструкций, конкретизирующих построения из [11]). Но при этом оставалось неясным, в чем же подлинная причина параллелизуемости именно четырехмерных солвмногообразий (для размерности 3 имеется чисто топологическое объяснение — любое компактное ориентируемое многообразие размерности 3 параллелизуемо [13]). Предложение 2 и теорема 1 настоящей работы могут быть использованы для упрощения доказательства из [11], если разобрать по отдельности случаи $b_1(M) = 1, 2, 3, 4$.

§ 3. Некоторые классы солвмногообразий

Рассмотрим некоторые классы компактных солвмногообразий. Они тесно связаны с несколькими классами разрешимых групп и алгебр Ли, нас будут в основном интересовать трехмерные и четырехмерные солвмногообразия из этих классов. Подробнее об этих классах можно прочесть в обзоре [2].

Напомним вначале, что алгебра Ли L называется *треугольной* или *алгеброй Ли типа* (R), если для любого $X \in L$ все собственные значения присоединенного линейного оператора ad_X вещественны. Группа Ли называется *треугольной* (или *типа* (R), или *вполне разрешимой*), если ее алгебра Ли треугольна. Прямое определение тоже возможно: связная группа Ли G называется *треугольной*, если для любого ее элемента $g \in G$ все собственные значения линейного оператора Ad_g вещественны (тогда они автоматически будут положительными), Ad — это присоединенное представление группы Ли G. По аналогии с теорией групп Ли можно ввести понятие треугольной группы и для некоторых абстрактных групп (см. [14]). Для одного частного случая такое определение выглядит очень просто.

Рассмотрим группу π вида $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^m$ — полупрямое произведение, задаваемое элементом $A = \phi(1) \in GL(m, \mathbf{Z})$. Через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ обозначим собственные значения матрицы A. Группу π назовем *треугольной*, если собственные значения λ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, вещественны и положительны. В [14] доказано, что некоторая группа, включаемая в точную последовательность вида $\{0\} \to \Delta \to \pi \to \mathbf{Z}^s \to \{0\}$, изоморфна решетке в односвязной треугольной группе Ли тогда и только тогда, когда она треугольна как абстрактная группа. В случае групп π ранга 3 (соответствующих трехмерным компактным солвмногообразиям) это означает, что все треугольные группы вида $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$ реализуются как решетки в треугольных группах Ли. На самом деле множественное число здесь почти излишне: с точностью до изоморфизма существуют только три трехмерные треугольные односвязные группы Ли, которые могут содержать решетки — абелева $\mathbf{R}^3$, нильпотентная $N_3(\mathbf{R})$ и треугольная ненильпотентная $R_3 = \mathbf{R} \times_\phi \mathbf{R}^2$ — полупрямое произведение, задаваемое гомоморфизмом $\phi(t) = \mathrm{diag}(e^t, e^{-t})$ (подробнее см., например, [15]). Полезно отметить, что солвмногообразия, отвечающие треугольным фундаментальным группам, обязательно будут специальными.

Рассмотрим подходы к классификации всех треугольных групп вида $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$. Собственные значения матрицы $A = \phi(1)$ — это λ, λ^{-1}, где λ — некоторое положительное число. Так как $A \in GL(2, \mathbf{R})$, должно быть, что $\lambda + \lambda^{-1} = n$ — некоторое натуральное число (равное $\mathrm{tr}(A)$), причем $n \geq 2$. Матрица A подобна диагональной матрице $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, но это подобие над $\mathbf{R}$. Существуют матрицы из $GL(2, \mathbf{Z})$, подобные над $\mathbf{R}$, но не подобные над $\mathbf{Z}$, поэтому соответствующие им полупрямые произведения $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$ не изоморфны как абстрактные группы. Отметим, что характеристический многочлен для A имеет вид $x^2 - nx + 1$ и любому такому многочлену соответствуют целочисленные матрицы, одна из которых — каноническая матрица Смита $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & n \end{pmatrix}$. Число классов матриц, подобных над $\mathbf{R}$, но не подобных над $\mathbf{Z}$, всегда конечно, но оно вычисляется непросто (подробнее об этом см. выше).

Две группы называются *соизмеримыми* (в широком смысле этого слова), если они имеют подгруппы конечных индексов, изоморфные между собой. Например, все решетки в группе Ли $N_3(\mathbf{R})$ соизмеримы с решеткой $N_3(\mathbf{Z})$ и, в частности, соизмеримы между собой. А вот среди решеток в трехмерной треугольной группе Ли R_3 имеется счетное число классов попарно несоизмеримых решеток (см. [16]). Каждый класс соизмеримых между собой решеток в R_3 задается некоторым натуральным числом, свободным от квадратов. Можно рассматривать и группы вида $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$, для которых собственные значения матрицы A вещественны, но не обязательно положительны. Эти группы изоморфны фундаментальным группам компактных солвмногообразий, но тогда соответствующие компактные трехмерные солвмногообразия не обязательно будут специальными. Ясно, что при возведении матрицы A в квадрат отрицательные собственные значения «исчезнут» (т. е. станут положительными), а это в полном соответствии с общей теоремой 2 показывает, что подходящие двулистные накрытия указанных неспециальных солвмногообразий будут специальными. Для четырехмерных солвмногообразий тоже можно рассматривать треугольные группы вида $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^3$, для которых ситуация такая же, как в трехмерном случае. Но в четырехмерном случае в качестве фундаментальных групп компактных солвмногообразий фигурируют и треугольные группы более общего вида — полупрямые произведения группы $\mathbf{Z}$ и нильпотентных групп ранга 3 (все такие нильпотентные конечно порожденные группы, свободные от кручения, могут быть легко описаны, см., например, [5]). Здесь явные конструкции более громоздки (примеры такого рода см. в [10]).

Переходим к рассмотрению следующего класса солвмногообразий. Алгебра Ли L называется *алгеброй типа* (I), если все собственные значения линейных операторов ad_X, $X \in L$, мнимые (возможно, нулевые). Группа Ли G называется *группой типа* (I), если ее алгебра Ли типа (I). Эквивалентно G — *группа Ли типа* (I), если все собственные значения линейных операторов Ad_g, $g \in G$, по модулю равны 1 (в частности, они могут сами быть равными 1). Например, группа Ли движений евклидова пространства $E(n) = O(n) \cdot \mathbf{R}^n$ типа (I). Вообще, полупрямое произведение компактной и нильпотентной групп Ли всегда есть группа Ли типа (I). Отметим, что группа Ли $E(2)$ разрешима и имеет размерность 3. Строение связных групп Ли типа (I) хорошо известно — любая такая группа Ли локально вкладывается в виде подгруппы Ли в полупрямое произведение компактной и нильпотентной групп Ли (точнее, она может быть локально вложена в свое полупростое расщепление, которое и имеет указанное полупрямое расщепление, см. [1]). Связная разрешимая группа Ли является группой Ли типа (I) тогда и только тогда, когда она локально вкладывается в виде подгруппы Ли в полупрямое произведение тора (компактной абелевой группы Ли) и нильпотентной группы Ли.

Компактное солвмногообразие R/H называется *солвмногообразием типа* (I), если разрешимая группа Ли R, транзитивная на этом солвмногообразии, типа (I). Например, бутылка Клейна K^2 типа (I). В частности, среди солвмногообразий типа (I) имеются и такие, которые не являются специальными (в отличие от случая солвмногообразий типа (R)). Как следует из приведенной ниже леммы 2, условие (I) на компактные солвмногообразия, будучи по своей природе чисто алгебраическим, на самом деле топологически инвариантно (т. е. на солвмногообразии типа (I) могут транзитивно и локально эффективно действовать только группы Ли типа (I)).

Следующее утверждение хорошо известно специалистам и несколько раз в той или иной форме доказано разными авторами. Мы приведем схему доказательства, основанного на понятии полупростого расщепления (групп и алгебр Ли, а также решеток в разрешимых группах Ли и др.).

Лемма 2. *Компактное солвмногообразие* R/H *типа* (I) *тогда и только тогда, когда его фундаментальная группа* $\pi = \pi_1(R/H)$ *почти нильпотентна (т. е. имеет нильпотентную подгруппу конечного индекса).*

Любая разрешимая группа Ли, транзитивная и локально эффективная на компактном многообразии с почти нильпотентной фундаментальной группой, является группой Ли типа (I).

Доказательство. В [15] доказано два утверждения, приводящие к нужному нам результату. Доказательства эти основаны на понятии полупростого расщепления, подробнее о котором можно прочесть там же или в обзоре [1].

Если $\pi_1(R/H)$ нильпотентна, то группа Ли R типа (I) (предполагая, что транзитивное действие R локально эффективно). Если же $\pi_1(R/H)$ почти нильпотентна, то доказательство из [15] тоже применимо. Обратно, если R типа (I), то в [15] доказано, что $\pi_1(R/H)$ почти нильпотентна.

В последние время для описания солвмногообразий типа (I) и их фундаментальных групп стали использовать понятие групп полиномиального роста. Известно, что абстрактные почти нильпотентные группы — это в точности группы полиномиального роста. Отметим, что для трехмерного случая нильпотентная фундаментальная группа либо абелева (и изоморфна $\mathbf{Z}^3$), либо содержит подгруппу конечного индекса, изоморфную $N_3(\mathbf{Z})$ (группе целых точек в $N_3(\mathbf{R})$). Подробнее о классификации трехмерных солвмногообразий в этом случае см. выше.

Рассмотрим произвольную группу π, которая разлагается в полупрямое произведение вида $\pi = \mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^m$, где $\phi : \mathbf{Z} \to GL_m(\mathbf{Z})$ — некоторый гомоморфизм (можно рассмотреть и случай произвольных полициклических групп, но мы ограничимся лишь некоторыми группами, изоморфными фундаментальным группам компактных солвмногообразий). Такая группа π называется *группой типа* (I), если все собственные значения матрицы $A = \phi(1)$ по модулю равны 1. Нетрудно показать, что все такие группы почти нильпотентны.

Для компактного солвмногообразия M типа (I) и размерности ≤ 4 существует конечнолистное накрытие степени 1, 2 или 3 тором или нильмногообразием (см. [11, с. 7] или [13]).

Рассмотрим компактные трехмерные солвмногообразия типа (I) и соответствующие им фундаментальные группы $\pi = \pi_1(M)$. Для рассматриваемых групп вида $\pi = \mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$ имеется вложение их в виде решеток в группу Ли $E(2) = O(2) \cdot \mathbf{R}^2$ движений евклидовой плоскости. Группа Ли $E(2)_0$ трехмерная разрешимая типа (I). Отметим, что группа π не имеет кручения. Все такие дискретные подгруппы классифицированы как группы, соответствующие компактным плоским римановым трехмерным многообразиям (см., например, [17]). Всего имеется 10 таких групп (с точностью до изоморфизма). Но нам нужны не все эти группы — необходимо отобрать среди них те, которые имеют вид $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$. Для этого нужно вначале вычислить коммутант $[\pi, \pi]$ (уже сделано в [17]). Фактор-группа $\pi/[\pi, \pi]$ абелева, в нашем случае она должна быть бесконечной, но может иметь кручение. Представителей элементов кручения в π нужно добавить к коммутанту и проверить, будет ли абелевой порожденная таким образом подгруппа. Если да, то получаем нужное нам разложение в полупрямое произведение. Если нет, то группа нам не подходит.

Последовательным перебором всех 10 случаев легко убеждаемся, что три группы не реализуются как фундаментальные группы трехмерного компактного солвмногообразия типа (I). Тем самым имеется ровно 7 трехмерных компактных солвмногообразий типа (I), фундаментальная группа которых почти абелева (т. е. имеет подгруппу конечного индекса, изоморфную $\mathbf{Z}^3$). В явном виде они перечислены в [18].

Описание случая, когда $\pi = \pi_1(M)$ соизмерима с $N_3(\mathbf{Z})$, тоже можно получить, но это требует дополнительных вычислений.

Для четырехмерных компактных солвмногообразий существует больше возможностей. Если $\pi_1(M)$ почти абелева, то эта группа плоская. Классификация таких групп хорошо известна, а описание всех четырехмерных солвмногообразий в этом случае см. в [18] — всего их 19. Тем самым имеется с точностью до диффеоморфизма 21 четырехмерное компактное солвмногообразие типа (I).

Вообще, если фундаментальная группа $\pi = \pi_1(M)$ компактного солвмногообразия M почти абелева, то она будет изоморфна некоторой плоской группе (или, по другой терминологии, некоторой группе Бибербаха). Это утверждение хорошо известно. В [18] дана классификация всех плоских солвмногообразий размерностей 3, 4 и 5. Другими словами, там классифицированы все компактные солвмногообразия указанных размерностей, фундаментальные группы которых почти абелевы. Интересно отметить, что поначалу работа [18] рассматривалась некоторыми специалистами как не очень интересная. В ней изучались многообразия, сочетающие две разнородные структуры — солвмногообразия и плоского риманова многообразия. Но как видно из вышесказанного, условие на риманову структуру можно заменить чисто алгебраическим условием (I), и результаты работы [18] приобретают вполне определенное значение.

Рассмотрим солвмногообразия типа (NR) (введенные в [19]). Группа Ли R называется *группой типа* (NR), когда выполнено условие: если собственное число некоторого линейного оператора Ad_g, $g \in R$, есть корень из 1, то оно должно быть равно 1. Например, любая нильпотентная группа Ли типа (NR), так как для таких групп Ли все собственные значения операторов Ad_g равны 1. Более того, треугольные группы Ли тоже типа (NR). А вот группа Ли типа (I) будет группой типа (NR) тогда и только тогда, когда она нильпотентна, так как если существует собственное значение, по модулю равное единице и отличное от единицы, то существует и собственное значение (возможно, для другого элемента группа Ли), являющееся корнем из 1. Тем самым класс (NR) можно рассматривать как своего рода дополнительный к классу (I). Среди трехмерных компактных солвмногообразий специальные солвмногообразия типа (NR) — это только солвмногообразия типа (R). Для четырехмерного случая это уже не так: легко построить такую решетку Γ в группе Ли $R = \mathbf{R} \times_\alpha \mathbf{R}^3$, что солвмногообразие $M = R/\Gamma$ типа (NR), но не типа (R).

Группу вида $\mathbf{Z} \times_\phi \mathbf{Z}^2$ будем называть *группой типа* (NR), если при $\lambda^n = 1$ для некоторого собственного числа матрицы $A = \phi(1)$ обязательно будет $\lambda = 1$.

Для случая групп вида $\mathbf{Z}\times_\phi\mathbf{Z}^2$ установим два соотношения между классами (I) и (NR) (то же и для соответствующих трехмерных нильмногообразий):

$$(I_3) \cap (NR_3) = (N_3),$$

где (N_3) — это класс конечнопорожденных нильпотентных групп ранга 3 без кручения (и соответствующий им класс компактных нильмногообразий):

$$(I_3) \cup (NR_3) = (\mathrm{Sol}_3),$$

где (Sol_3) — это класс всех групп вида $\mathbf{Z}\times_\phi\mathbf{Z}^2$ и соответственно класс всех трехмерных компактных солвмногообразий. Это второе соотношение доказывается следующим образом. Во-первых, матрица A имеет только два собственных значения, произведение которых равно ± 1, поэтому равенство по модулю 1 одного из них дает то же для другого. Во вторых, для группы Ли равенство собственных значений по модулю единице эквивалентно тому, что это группа Ли типа (I).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Auslander L.* An exposition of the structure of solvmamifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1973. V. 79, N 2. P. 227–261.
2. *Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Группы Ли преобразований // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 103–240. (Итоги науки и техники).
3. *Горбацевич В. В.* О трехмерных однородных пространствах // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 2. С. 280–293.
4. *Горбацевич В. В.* О классификации четырехмерных компактных однородных пространств // Успехи мат. наук. 1977. Т. 32, № 2. С. 207–208.
5. *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Шварцман О. В.* Дискретные подгруппы групп Ли // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. С. 5–120. (Итоги науки и техники).
6. *Farrell F. T., Jones L. E.* The surgery L-groups of poly- (finite or cyclic) groups // Inv. Math. 1988. V. 91, N 3. P. 559–586.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
8. *Горбацевич В. В.* Обобщенная теорема Ляпунова на многообразиях Мальцева // Мат. сб. 1974. Т. 94, № 6. С. 163–177.
9. *Taussky O.* Matrices of rational integers // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 327–345.
10. *Шевченко В. Н., Сидоров С. В.* О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Изв. вузов. Математика. 2006. № 4. С. 57–64.
11. *Auslander L., Szczarba R.* Characteristic classes of compact solvmanifolds // Ann. Math. 1962. V. 76, N 1. P. 1–8.
12. *Hasegawa K.* Four-dimensional compact solvmanifolds with and without complex analytic structures. 2004. Available at: arXiv:math/0401413v1
13. *Стинрод Н.* Топология косых произведений. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
14. *Горбацевич В. В.* О решетках в группах Ли типов (E) и (R) // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1975. № 6. С. 56–63.
15. *Ауслендер Л, Грин Л., Хан Ф.* Потоки на однородных пространствах. М.: Мир, 1966.

16. *Горбацевич В. В.* О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой IV // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1991. С. 88–98.

17. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.

18. *Morgan A.* The classification of flat solvmanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1978. V. 239. P. 321–351.

19. *Keppelmann E., McCord Ch.* The Anosov theorem for exponential solvmanifolds // Pac. J. Math. 1995. V. 170, N 1. P. 143–159.

Статья поступила 15 октября 2007 г.

Горбацевич Владимир Витальевич
Московский гос. технологический университет МАТИ им. К. Э. Циолковского,
кафедра высшей математики,
ул. Оршанская, 3, Москва 121552
vgorvich@yandex.ru