Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 510.67

ОПРЕДЕЛИМЫЕ ФУНКЦИИ В $\aleph_0$–КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО ЦИКЛИЧЕСКИ МИНИМАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ

Б. Ш. Кулпешов

Аннотация. Продолжено исследование аналогов o-минимальности и слабой o-минимальности для циклически упорядоченных множеств. Представлена полная характеризация поведения унарных определимых функций в $\aleph_0$-категоричной 1-транзитивной слабо циклически минимальной структуре. Далее на ее основе дано с точностью до бинарности описание $\aleph_0$-категоричных 1-транзитивных непримитивных слабо циклически минимальных структур ранга выпуклости, большего 1.

Ключевые слова: циклически упорядоченное множество, слабая циклическая минимальность, $\aleph_0$-категоричность, ранг выпуклости.

1. Введение

Пусть L — счетный язык первого порядка. Повсюду в этой статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит символ тернарного отношения K, который интерпретируется как циклический порядок в этих структурах. Напомним, что такое отношение K является отношением *циклического* порядка, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(co1) $\forall x \forall y \forall z\, (K(x,y,z) \to K(y,z,x))$,
(co2) $\forall x \forall y \forall z\, (K(x,y,z) \wedge K(y,x,z) \Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x)$,
(co3) $\forall x \forall y \forall z\, (K(x,y,z) \to \forall t[K(x,y,t) \vee K(t,y,z)])$,
(co4) $\forall x \forall y \forall z\, (K(x,y,z) \vee K(y,x,z))$.

Подмножество A структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ имеет место следующее: для любого $c \in M$ с условием $K(a,c,b)$ имеем $c \in A$ или для любого $c \in M$ с условием $K(b,c,a)$ имеем $c \in A$. Данная статья продолжает исследование понятия *слабой циклической минимальности*, первоначально изученного в [1]. *Слабо циклически минимальная структура* есть циклически упорядоченная структура $M = \langle M, =, K, \dots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Заметим, что если $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ — слабо o-минимальная структура, то в силу факта 2.2 и предложения 2.8 из [1] M является слабо циклически минимальной относительно отношения $K(x,y,z) := (x \le y \le z) \vee (z \le x \le y) \vee (y \le z \le x)$, которое является $\varnothing$-определимым отношением циклического порядка на M. Говорят, что M является 1-*транзитивной*, если для любых $a, b \in M$ существует $g \in \mathrm{Aut}(M)$ такой, что $g(a) = b$. Под *конгруэнцией* на M мы подразумеваем $\mathrm{Aut}(M)$-инвариантное отношение эквивалентности на M. Говорят, что M *примитивна*, если она 1-транзитивна и не существует нетривиальных собственных конгруэнций на M.

© 2009 Кулпешов Б. Ш.

Пусть M, N — циклически упорядоченные структуры. Под 2-*редуктом* структуры M мы подразумеваем циклически упорядоченную структуру с тем же универсумом, что и M, имеющую символ отношения для каждого $\varnothing$-определимого отношения структуры M арности не более 2 и также символ тернарного отношения K для циклического упорядочения, но не имеющую никаких других символов отношений большей арности. Мы говорим, что M изоморфна структуре N *с точностью до бинарности*, если 2-редукт структуры M изоморфен структуре N. $\aleph_0$-категоричные примитивные слабо циклически минимальные структуры описаны с точностью до бинарности в [1]. $\aleph_0$-категоричные 1-транзитивные непримитивные слабо циклически минимальные структуры ранга выпуклости 1 описаны с точностью до бинарности в [2]. Вспомним, что теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов. Здесь мы продолжаем исследование $\aleph_0$-категоричных 1-транзитивных слабо циклически минимальных структур. В разд. 2 мы представляем полную характеризацию поведения унарных определимых функций в $\aleph_0$-категоричной 1-транзитивной слабо циклически минимальной структуре (теорема 2.18). Далее в разд. 3 на основе полученной характеризации мы даем с точностью до бинарности описание $\aleph_0$-категоричных 1-транзитивных непримитивных слабо циклически минимальных структур ранга выпуклости, большего 1 (теоремы 3.3, 3.4).

Лемма 1.1. *Пусть M — 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура. Предположим что $E_1(x,y), E_2(x,y)$ — $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие M на бесконечные выпуклые классы, причем $E_1 \not\equiv E_2$. Тогда для всех $a \in M$ либо $E_1(M,a) \subset E_2(M,a)$, либо $E_2(M,a) \subset E_1(M,a)$.*

Доказательство. Допустим противное: существует $a \in M$ такой, что $E_1(M,a) \not\subset E_2(M,a)$ и $E_2(M,a) \not\subset E_1(M,a)$. Не умаляя общности, предположим что существуют $a, b, c \in M$ такие, что

$$M \models K_0(a,b,c) \wedge E_1(a,b) \wedge \neg E_1(a,c) \wedge \neg E_1(b,c) \wedge \neg E_2(a,b) \wedge \neg E_2(a,c) \wedge E_2(b,c),$$

где $K_0(x,y,z) := K(x,y,z) \wedge y \neq x \wedge y \neq z \wedge x \neq z$. Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$\phi(x) := \exists y[E_1(x,y) \wedge \neg E_2(x,y) \wedge \forall t(E_2(t,y) \wedge \neg E_1(t,x) \rightarrow K(y,t,x))].$$

Очевидно, что $a \in \phi(M)$, но $b \notin \phi(M)$; противоречие с 1-транзитивностью структуры M. $\square$

Следствие 1.2. *Пусть M — $\aleph_0$-категоричная 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура. Предположим, что $E_1(x,y), E_2(x,y)$ — $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие M на бесконечные выпуклые классы, причем M разбивается лишь на конечное число E_2-классов. Тогда $E_1(M,a) \subset E_2(M,a)$ для каждого $a \in M$.*

Доказательство. В силу леммы 1.9 из [2] существует не более одного $\varnothing$-определимого нетривиального отношения эквивалентности, разбивающего M на конечное число бесконечных выпуклых классов. Следовательно, E_1 разбивает M на бесконечное число E_1-классов, откуда по лемме 1.1 $E_1(M,a) \subset E_2(M,a)$ для всех $a \in M$. $\square$

Лемма 1.3. *Пусть M — $\aleph_0$-категоричная 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура. Предположим что $E_1(x,y), E_2(x,y)$ — $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие M на бесконечные выпуклые классы, причем $E_1(M,a) \subset E_2(M,a)$ для некоторого $a \in M$. Тогда E_1 разбивает каждый E_2-класс на бесконечное число классов, так что индуцированный порядок на E_1-подклассах является плотным без концевых точек.*

Доказательство. Допустим противное: существует $a \in M$ такой, что E_1-подклассы, содержащиеся в $E_2(M, a)$, не являются плотно упорядоченными без концевых точек.

Случай 1. Существует самый левый E_1-подкласс (т. е. расположенный левее других подклассов в $E_2(M,a)$). Пусть это будет $E_1(M,b)$ для некоторого $b \in E_2(M,a)$. Так как $E_1(M,a) \subset E_2(M,a)$, существует $b' \in E_2(M,a)$ такой, что $\neg E_1(b', b)$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\phi(x) := \forall y[\neg E_1(x,y) \wedge E_2(x,y) \rightarrow \forall z(\neg E_2(x,z) \rightarrow K(x,y,z))].$$

Очевидно, что $b \in \phi(M)$, но $b' \notin \phi(M)$; противоречие с 1-транзитивностью структуры M.

Случай 2. Существует самый правый E_1-подкласс. Рассматривается аналогично случаю 1.

Случай 3. Существуют $b, b' \in E_2(M,a)$ такие, что

$$M \models \neg E_1(b,b') \wedge \forall y[\neg E_1(b,y) \wedge K(b,y,b') \rightarrow E_1(b',y)].$$

Тогда рассмотрим следующую формулу:

$$\theta(x) := \exists y[\neg E_1(x,y) \wedge E_2(x,y) \wedge \forall z(\neg E_1(x,z) \wedge K(x,z,y) \rightarrow E_1(y,z))].$$

Очевидно, что $b \in \theta(M)$. Тогда в силу 1-транзитивности структуры M будет $b' \in \theta(M)$, т. е. каждый E_1-подкласс, содержащийся в $E_2(M,a)$, имеет непосредственного последователя. Таким образом, E_1-подклассы, содержащиеся в $E_2(M,a)$, являются дискретно упорядоченными без концевых точек, что противоречит $\aleph_0$-категоричности структуры M. $\square$

Определение 1.4 [2, обозначение 7.5]. Пусть $F(x,y)$ — $\varnothing$-определимая формула такая, что $F(M,b)$ является выпуклым бесконечным кобесконечным для каждого $b \in M$. Пусть $F^{\ell}(y)$ — формула, говорящая, что y является левой концевой точкой множества $F(M,y)$:

$$\exists z_1 \exists z_2[K_0(z_1,y,z_2) \wedge \forall t_1(K(z_1,t_1,y) \wedge t_1 \neq y \rightarrow \neg F(t_1,y)) \\ \wedge \forall t_2(K(y,t_2,z_2) \wedge t_2 \neq y \rightarrow F(t_2,y))].$$

Будем говорить, что $F(x,y)$ является *выпуклой вправо*, если

$$M \models \forall y \forall x[F(x,y) \rightarrow F^{\ell}(y) \wedge \forall z(K(y,z,x) \rightarrow F(z,y))].$$

Очевидно, что если $F(x,y)$ выпукла вправо, то $M \models \forall y F(y,y)$. Если $F_1(x,y)$, $F_2(x, y)$ — произвольные выпуклые вправо формулы, то будем говорить, что F_2 *больше, чем* F_1, если существует $a \in M$ такой, что $F_1(M,a) \subset F_2(M,a)$. Если M является 1-транзитивной и это имеет место для некоторого a, то оно имеет место для всех a. Это дает линейное упорядочение на (конечном) множестве всех выпуклых вправо формул $F(x,y)$ (рассматриваемых по модулю эквивалентности $\mathrm{Th}(M)$). Если для некоторого $a \in M$ имеем $\mathrm{dcl}(a) = \{a\}$, то $F(M,a)$

не имеет правой концевой точки в M для каждой выпуклой вправо формулы $F(x,y)$ и любого $a \in M$. Будем писать $f(y) := \operatorname{rend} F(M,y)$, подразумевая, что $f(y)$ является правой концевой точкой множества $F(M,y)$, которая лежит в общем случае в определимом пополнении $\overline{M}$ структуры M. Тогда f является функцией, которая отображает M в $\overline{M}$.

Очевидно, что если M является плотно упорядоченной и $f : M \to M$ — $\varnothing$-определимая нетождественная функция, то $F(x,y) := \exists t[f(y) = t \wedge K(y,x,t) \wedge x \neq t]$ и $F'(x,y) := \exists t[f(y) = t \wedge K(y,x,t)]$ — выпуклые вправо формулы.

Факт 1.5 [2]. *Пусть M — $\aleph_0$-категоричная 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура. Предположим что существуют $a, b_1, b_2 \in M$ такие, что $K_0(a,\, b_1,\, b_2)$ и $tp(b_1/\{a\}) \neq tp(b_2/\{a\})$. Тогда существует выпуклая вправо формула $F(x,y)$ такая, что $F(b_1,a)$ и $\neg F(b_2,a)$.*

Пусть f — унарная функция в $\overline{M}$ с областью определения $\mathrm{Dom}(f) = I \subseteq M$, где I — открытое выпуклое множество. Мы говорим, что f является *монотонной* на I, если она сохраняет или обращает отношение K_0, т. е. либо для любых $a,b,c \in I$ таких, что $K_0(a,b,c)$, имеем $K_0(f(a),f(b),f(c))$, либо для любых $a,b,c \in I$ таких, что $K_0(a,b,c)$, имеем $K_0(f(c),f(b),f(a))$. В частности, будем говорить, что f *монотонна вправо* (*влево*) на I, если f сохраняет (обращает) отношение K_0. Если $\langle M, K\rangle$ циклически упорядочена, то множество открытых интервалов является базисом топологии на M. Если I выпукло, то мы обозначаем через $\mathrm{Int}(I)$ внутренность множества I относительно данной топологии. Мы говорим, что f является *локально монотонной вправо* (*локально монотонной влево, локально константой*) на I, если для всех $x \in I$ существует открытое выпуклое множество $J \subseteq I$ такое, что $x \in \mathrm{Int}(J)$ и f является монотонной вправо (монотонной влево, константой) на J.

Из теоремы 4.3 в [1] следует

Факт 1.6. *Пусть M — 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура, f — $\varnothing$-определимая функция в $\overline{M}$. Тогда f является либо локально монотонной на M, либо локально константой на M.*

Обозначение 1.7. (1) $K(u_1, \dots, u_n)$ обозначает формулу, говорящую, что все подкортежи кортежа $\langle u_1, \dots, u_n\rangle$ (в возрастающем порядке) удовлетворяют K; обозначения для K_0 аналогичны.

(2) Пусть A, B, C — попарно не пересекающиеся выпуклые подмножества циклически упорядоченной структуры M. Будем писать $K(A,B,C)$, если для любых $a,b,c \in M$ всякий раз, когда $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, имеем $K(a,b,c)$. Мы расширяем данное обозначение естественным способом, употребляя, например, запись $K_0(A,b,C,D)$.

2. Унарные функции

Пусть f — $\varnothing$-определимая функция в $\overline{M}$ такая, что f локально монотонная на M, $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Будем говорить, что f *кусочно монотонная вправо* (*влево*) на M/E, если существует $\varnothing$-определимое нетривиальное отношение эквивалентности $E'(x,y)$, разбивающее M на конечное число бесконечных выпуклых классов такое, что f монотонная вправо (влево) на $E'(M,a)/E$ для каждого $a \in M$ и не является монотонной вправо (влево) на M/E'. Будем также говорить, что f *монотонная вправо* (*влево*) на E'/E, если f является монотонной вправо (влево) на $E'(M,a)/E$ для каждого $a \in M$.

Определение 2.1. Пусть f — $\varnothing$-определимая функция в $\overline{M}$, являющаяся локально монотонной вправо (влево) на M, $n, m \in \omega$. Говорят, что f *имеет ранг* $\langle n, m\rangle$, если существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^f(x,y), \dots, E_n^f(x,y)$ такие, что E_i^f разбивает M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов для каждого $i \le n-1$, E_n^f разбивает M на m бесконечных выпуклых классов, так что

- $E_1^f(M,a) \subset E_2^f(M,a) \subset \ldots \subset E_{n-1}^f(M,a) \subset E_n^f(M,a)$ для любого $a \in M$,
- f монотонная вправо (влево) на каждом E_1^f-классе,
- f монотонная влево (вправо) на E_j^f/E_{j-1}^f для каждого четного $2 \le j \le n$,
- f монотонная вправо (влево) на E_j^f/E_{j-1}^f для каждого нечетного $2 \le j \le n$,
- если $m = 1$ и n нечетное (четное), то f монотонная вправо (влево) на M/E_{n-1}^f,
- если $m \neq 1$ и n нечетное, то f монотонная влево (вправо) на M/E_n^f,
- если $m \neq 1$ и n четное, то f монотонная вправо (влево) на M/E_n^f.

Очевидно что если f — монотонная вправо (влево) на M, то f имеет ранг $\langle 1, 1\rangle$. Если f кусочно монотонная влево на M, то в силу [2] f имеет ранг $\langle 1, m\rangle$ для некоторого четного $m \ge 4$.

Пусть $Q^2 = \langle\{(x_0, x_1) \mid x_i \in Q\}, <_{lex}\rangle$ — множество всевозможных пар из рациональных чисел, упорядоченных лексикографически.

Пример 2.2. Пусть $M = \langle M, =, K, E^2, f^1\rangle$ — циклически упорядоченная структура, M — объединение непересекающихся множеств Q_1^2 и Q_2^2, где Q_i^2 для каждого $i = \overline{1,2}$ является копией упорядочения Q^2. Отношение эквивалентности E определяется следующим образом: $E(x,y) \Leftrightarrow x_0 = y_0$ для любых элементов $x = (x_0, x_1), y = (y_0, y_1) \in M$, т. е. первые координаты совпадают. Определим функцию f: $f\bigl(Q_1^2\bigr) = Q_2^2$, $f\bigl(Q_2^2\bigr) = Q_1^2$ и $f((x_0, x_1)) = (-x_0, x_1)$ для любого $x = (x_0, x_1) \in M$.

Очевидно, что f — биекция, $f^2(a) = a$ для всех $a \in M$, f монотонна вправо на каждом E-классе и монотонна влево на M/E, т. е. *локально монотонна вправо ранга* $\langle 2, 1\rangle$. Может быть доказано, что M однородна и, следовательно, $\mathrm{Th}(M)$ допускает элиминацию кванторов и является $\aleph_0$-категоричной. Тогда очевидно, что M является слабо циклически минимальной и 1-транзитивной.

Пример 2.3. Пусть $M = \bigl\langle M, =, K, E_1^2, E_2^2, f^1\bigr\rangle$ — циклически упорядоченная структура, M — объединение непересекающихся множеств Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2 и Q_4^2, так что $K_0\bigl(Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, Q_4^2\bigr)$, где Q_i^2 для каждого $i = \overline{1,4}$ является копией упорядочения Q^2. Отношения эквивалентности E_1 и E_2 определяются следующим образом: $(\forall x = (x_0, x_1),\ y = (y_0, y_1) \in M)\ E_1(x,y) \Leftrightarrow x_0 = y_0$, т. е. первые координаты совпадают; $(\forall x, y \in M\ E_2(x,y) \Leftrightarrow \exists i \le 4)\ x, y \in Q_i^2$. Определим функцию f: $f\bigl(Q_1^2\bigr) = Q_3^2$, $f\bigl(Q_2^2\bigr) = Q_4^2$, $f\bigl(Q_3^2\bigr) = Q_1^2$, $f\bigl(Q_4^2\bigr) = Q_2^2$ и $f((x_0, x_1)) = (-x_0, x_1)$ для любого $x = (x_0, x_1) \in M$.

Очевидно, что E_2 — отношение эквивалентности, разбивающее M на четыре бесконечных выпуклых класса; каждый E_2-класс разбивается на бесконечное число E_1-классов. Также замечаем, что f — биекция, $f^2(a) = a$ для всех $a \in M$, f монотонна вправо на каждом E_1-классе, локально монотонна влево на M/E_1 и монотонна вправо на M/E_2, т. е. *локально монотонна вправо ранга* $\langle 2, 4\rangle$. Может быть также доказано что M однородна и, следовательно, $\mathrm{Th}(M)$ допускает элиминацию кванторов и является $\aleph_0$-категоричной. Тогда очевидно, что M слабо циклически минимальна и 1-транзитивна.

Обозначение 2.4. Пусть $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечные выпуклые классы. Предположим, что y лежит в $\overline{M}$ (не обязательно в M). Тогда

$$E^*(x,y) := \exists y_1 \exists y_2 [y_1 \neq y_2 \wedge \forall t (K(y_1,t,y_2) \to E(t,x)) \wedge K_0(y_1,y,y_2)].$$

Лемма 2.5. *Пусть $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) :=$ $\operatorname{rend} F(M,y)$ нетождественная локально монотонная на M. Тогда для любого $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E(x,y)$, разбивающего M на бесконечные выпуклые классы, имеет место $\neg E^*(a,f(a))$ для каждого $a \in M$.*

Доказательство. Поскольку f нетождественная локально монотонная на M, то существуют $n,m \in \omega$ такие, что f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n,m\rangle$. Следовательно, существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^f(x,y),\dots,E_n^f(x,y)$ с соответствующими в определении 2.1 свойствами. Покажем, что $\neg E_i^{f*}(a,f(a))$ для каждого $i \leq n$.

Шаг 1. $\neg E_1^{f*}(a,f(a))$ следует из леммы 2.8 в [2].

Предположим, что мы уже доказали лемму для всех $j < l$.

Шаг l. Допустим противное: $E_l^{f*}(a,f(a))$.

Случай 1. $F(M,a) \subset E_l^f(M,a)$. Рассмотрим следующие формулы:

$$F_1(x,y) := \exists t[F(t,y) \wedge F(x,t)], \quad F_n(x,y) := \exists t[F_{n-1}(t,y) \wedge F(x,t)], \quad n \geq 2.$$

Тогда $F_n(M,a) \subset E_l^f(M,a)$ для каждого $n \in \omega$ (так как в противном случае существует $b \in E_l^f(M,a)$ такой, что $F(M,b) \not\subset E_l^f(M,a) = E_l^f(M,b)$).

Случай 1a. Функция f монотонная вправо на E_l^f/E_{l-1}^f. По индукционному предположению имеем $\neg E_{l-1}^{f*}(a,f(a))$. Следовательно, существует бесконечно много E_{l-1}^f-классов, содержащихся в $F(M,a)$ (так как E_{l-1}^f-классы плотно упорядочены). Поймем что для любого $a \in M$ существует $b \in F(M,a)$ такой, что $M \models \neg E_{l-1}^f(a,b)$ и $F(M,b) \not\subset F(M,a)$. Допустим противное: существует $a \in M$ такой, что для любого $b \in F(M,a)$ с условием $\neg E_{l-1}^f(a,b)$ мы имеем $F(M,b) \subset F(M,a)$. Возьмем произвольные $b,c \in F(M,a)$ такие, что

$$M \models K_0(a,b,c) \wedge \neg E_{l-1}^f(a,b) \wedge \neg E_{l-1}^f(b,c) \wedge \neg E_{l-1}^f(c,a) \wedge F(c,b).$$

В силу монотонности вправо функции f будет $K_0(f(a),f(b),f(c))$, откуда следует $F(M,c) \not\subset F(M,b)$; противоречие. Следовательно, для любого $a \in M$ существует $b \in F(M,a)$ такой, что $M \models \neg E_{l-1}^f(a,b)$ и $F(M,b) \not\subset F(M,a)$. Тогда получаем $F(M,a) \subset F_1(M,a) \subset \ldots \subset F_n(M,a) \subset \ldots$, что противоречит $\aleph_0$-категоричности структуры M.

Случай 1b. Функция f монотонная влево на E_l^f/E_{l-1}^f. Покажем, что для любого $a \in M$ существует $b \in F(M,a)$ такой, что $\neg E_{l-1}^f(a,b)$ и $F(M,b) \not\subset F(M,a)$. Допустим противное: существует $a \in M$ такой, что для любого $b \in F(M,a)$ с условием $\neg E_{l-1}^f(a,b)$ имеем $F(M,b) \subset F(M,a)$. Зафиксируем b. Возьмем $c \in F(M,a)$ такой, что $K_0(f(b),c,f(a))$. Следовательно, $K_0(a,b,c)$. В силу монотонности влево функции f получаем $K_0(f(c),\ f(b),\ f(a))$, откуда $F(M,c) \not\subset F(M,b)$; противоречие. Тогда вновь $F(M,a) \subset F_1(M,a) \subset \ldots \subset F_n(M,a) \subset \ldots$; противоречие с $\aleph_0$-категоричностью структуры M.

Случай 2. $F(M,a)\not\subset E_l^f(M,a)$. Поскольку $E_l^{f*}(a,f(a))$, существуют $b_1,b_2\in E_l^f(M,a)$ такие, что $K_0(b_1,f(a),b_2,a)$, т. е. $\neg E_l^f(M,a)\subset F(M,a)$. Тогда $\neg F(M,a)\subset E_l^f(M,\,a)$. Рассмотрим следующие формулы:

$$F_1'(x,y):=\exists t[\neg F(t,y)\wedge\neg F(x,t)],\quad F_n'(x,y):=\exists t\big[F_{n-1}'(t,y)\wedge\neg F(x,t)\big],\quad n\geq 2.$$

Покажем, что для любого $a\in M$ существует $b\in\neg F(M,a)$ такой, что $\neg E_{l-1}^f(a,b)$ и $\neg F(M,b)\not\subset\neg F(M,a)$. Допустим противное: существует $a\in M$ такой, что для любого $b\in\neg F(M,a)$ с условием $\neg E_{l-1}^f(a,b)$ выполняется $\neg F(M,b)\subset\neg F(M,a)$.

Случай 2a. Функция f монотонна вправо на E_l^f/E_{l-1}^f. Возьмем произвольные $b,c\in\neg F(M,a)$ такие, что

$$M\models\neg E_{l-1}^f(b,c)\wedge\neg E_{l-1}^f(b,a)\wedge\neg E_{l-1}^f(c,a)\wedge K_0(c,b,a)\wedge\neg F(c,b).$$

В силу монотонности вправо функции f будет $K_0(f(c),f(b),f(a))$, откуда $\neg F(M,c)\not\subset\neg F(M,b)$; противоречие. Тогда $\neg F(M,a)\subset F_1'(M,a)\subset\ldots\subset F_n'(M,a)\subset\ldots$, что противоречит $\aleph_0$-категоричности структуры M.

Случай 2b. Функция f монотонна влево на E_l^f/E_{l-1}^f. Зафиксируем $b\in\neg F(M,a)$ такой, что $\neg E_{l-1}^f(a,b)$ и $\neg F(M,b)\subset\neg F(M,a)$. Возьмем $c\in\neg F(M,a)$ такой, что $K_0(f(a),c,f(b))$. Тогда получаем $K_0(f(a),c,f(b),b,a)$. В силу монотонности влево функции f имеем $K_0(f(a),\,f(b),\,f(c))$, откуда $\neg F(M,c)\not\subset\neg F(M,a)$; противоречие. Тогда вновь $\neg F(M,a)\subset F_1'(M,a)\subset\ldots\subset F_n'(M,a)\subset\ldots$, что противоречит $\aleph_0$-категоричности структуры M.

Таким образом, $\neg E_i^{f*}(a,f(a))$ для любого $i\leq n$.

Предположим, что существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее M на бесконечные выпуклые классы, так что $E\not\equiv E_i^f$ для каждого $i\leq n$. В силу леммы 1.1 либо $E(M,a)\subset E_i^f(M,a)$, либо $E_i^f(M,a)\subset E(M,a)$ для каждого $i\leq n$. Если существует $i\leq n$ такой, что $E(M,a)\subset E_i^f(M,a)$, то, очевидно, будет $\neg E^*(a,f(a))$. Предположим что $E_i^f(M,a)\subset E(M,a)$ для любого $i\leq n$. Тогда доказательство аналогично доказательству шага l. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть $E'(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на два бесконечных выпуклых класса, f — $\varnothing$-определимая функция в $\overline{M}$, $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда если f монотонна вправо (влево) на E'/E, то она монотонна вправо (влево) на M/E.*

Доказательство. Не умаляя общности, предположим, что f монотонна вправо на E'/E (случай монотонной влево функции рассматривается аналогично). Возьмем произвольные $a,b,c\in M$ такие, что $M\models K_0(a,b,c)\wedge\neg E(a,b)\wedge\neg E(b,c)\wedge\neg E(c,a)$, и покажем, что имеет место $K_0(f(a),f(b),f(c))$. Если $b,c\in E'(M,a)$, то доказывать нечего, поэтому предположим, что $E'(a,b)\wedge\neg E'(b,c)$. Поскольку $E'(M,a)$ бесконечно и не имеет концевых точек в M, то существует $d\in E'(M,a)$ такой, что $K_0(a,b,d)\wedge\neg E(b,d)$. В силу монотонности вправо функции f на E'/E имеем $K_0(f(a),f(b),f(d))$. Тогда ввиду леммы 2.2.5 $E'^*(c,f(a))$, $E'^*(c,f(b))$, $E'^*(c,f(d))\wedge\neg E'^*(c,f(c))$, т. е. $E'^*(a,f(c))$. Следовательно, получаем $K_0(f(a),f(b),f(c))$, т. е. f монотонная вправо на M/E. $\square$

Таким образом, в силу последней леммы если f имеет ранг $\langle n,2\rangle$ для некоторого $n\in\omega$, то f имеет ранг $\langle n,1\rangle$.

Обозначение 2.7. Пусть $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на конечное число бесконечных выпуклых классов, $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула, $f(y) := \mathrm{rend}\, F(M,y)$ и $k \in \omega$. Тогда

$$\Phi_k^{f,E}(x) := \neg E^*(x, f(x)) \wedge \exists u_1 \ldots \exists u_k \Bigg[\bigwedge_{i \neq j} \neg E(u_i, u_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \{\neg E(u_i, x) \wedge \neg E^*(u_i, f(x))\}$$

$$\wedge K_0(x, u_1, \ldots, u_k, f(x)) \wedge \forall t \Bigg[K(x, t, f(x)) \to \bigvee_{i=1}^{k} E(t, u_i) \vee E(t, x) \vee E^*(t, f(x)) \Bigg]\Bigg].$$

Лемма 2.8. *Пусть $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула, $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда $f(y) := \mathrm{rend}\, F(M,y)$ не может быть кусочно монотонной вправо на M/E.*

Доказательство. Допустим противное: f кусочно монотонная вправо на M/E. Тогда существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E'(x,y)$, разбивающее M на конечное число (скажем, n) бесконечных выпуклых классов, так что f монотонная вправо на E'/E и не является монотонной вправо на M/E'. В силу леммы 2.6 $n \geq 3$ и существуют $a, b, c \in M$ такие, что

$$M \models K_0(a,b,c) \wedge \neg E'(a,b) \wedge \neg E'(b,c) \wedge \neg E'(c,a) \wedge \neg K_0(f(a), f(b), f(c)).$$

Докажем, что $\neg K_0(f(a), f(b), f(c))$ влечет $K_0(f(c), f(b), f(a))$. Для этого достаточно показать, что $f(a) \neq f(b)$, $f(b) \neq f(c)$ и $f(c) \neq f(a)$. Допустим противное: предположим, например, что $f(a) = f(b)$. Не умаляя общности, предположим, что $K_0(a, b, f(a))$. Существует $k \in \omega$ такой, что $M \models \Phi_k^{f,E'}(a)$. Тогда b не удовлетворяет формуле $\Phi_k^{f,E'}(x)$, что противоречит 1-транзитивности структуры M. Следовательно, $f(a) \neq f(b)$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Получаем, что a, b и c не удовлетворяют $\Phi_k^{f,E'}(x)$ одновременно; вновь противоречие с 1-транзитивностью структуры M. $\square$

Следствие 2.9. *Пусть f локально монотонная вправо (влево) на M, $m > 2$. Тогда f не может иметь ранг $\langle n, m \rangle$ для любого нечетного (четного) n.*

Доказательство. Не умаляя общности, предположим, что f локально монотонная вправо на M. Допустим противное: f имеет ранг $\langle n, m \rangle$ для некоторых нечетного n и $m > 2$. Тогда по определению существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$ такое, что f кусочно монотонная вправо на M/E; противоречие с леммой 2.8. $\square$

Лемма 2.10. *Пусть $E'(x,y)$, $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие M на конечное и бесконечное число бесконечных выпуклых классов соответственно, $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) := \mathrm{rend}\, F(M,y)$ монотонна влево на E'/E и не монотонна влево на M/E'. Тогда f монотонна вправо на M/E'.*

Доказательство. Так как f не монотонна влево на M/E', то она не монотонна влево на M/E и, следовательно, $n \geq 3$ по лемме 2.6. В силу 1-транзитивности структуры M существует $k \in \omega$ такой, что $M \models \Phi_k^{f,E'}(a)$ для любого $a \in M$. Тогда для любых $a, b, c \in M$ таких, что

$$M \models K_0(a,b,c) \wedge \neg E'(a,b) \wedge \neg E'(b,c) \wedge \neg E'(a,c),$$

имеем $K_0(f(a), f(b), f(c))$, т. е. f монотонная вправо на M/E'. $\square$

Лемма 2.11. *Пусть $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) :=$ $\operatorname{rend} F(M,y)$ нетождественная локально монотонная на M, $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечные выпуклые классы. Тогда*

$$M \models \forall x \forall y[E(x,y) \to \exists u(E^*(u,f(x)) \wedge E^*(u,f(y)))].$$

Доказательство. Так как M — $\aleph_0$-категоричная 1-транзитивная структура, существует лишь конечное число (скажем, n) нетривиальных определимых отношений эквивалентности с бесконечными выпуклыми классами $E_1, E_2, \dots, E_n$, так что E_i разбивает M на бесконечное число E_i-классов для каждого $i \le n-1$, E_n разбивает M на конечное (или бесконечное) число E_n-классов, причем $E_1(M,a) \subset E_2(M,a) \subset \ldots \subset E_n(M,a)$.

Шаг 1. Докажем, что для любых $a, b \in M$ с условием $E_1(a,b)$ следует существование $c \in M$ такого, что $E_1^*(c,f(a)) \wedge E_1^*(c,f(b))$. Очевидно, что f монотонна на каждом E_1-классе (действительно, если f не монотонна на каждом E_1-классе, то существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E_0(x,y)$, разбивающее каждый E_1-класс на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, вопреки минимальности отношения эквивалентности E_1). Не умаляя общности, предположим, что f монотонная вправо на каждом E_1-классе. Допустим противное: существуют $a, b \in M$ такие, что $E_1(a,b)$ и для любого $c \in M$ из условия $E_1^*(c,f(a))$ следует $\neg E_1^*(c,f(b))$. Без потери общности предположим, что $K(a,M,b) \subseteq E_1(M,a)$. Рассмотрим следующие формулы:

$$\phi_0(x) := \exists y[E_1(x,y) \wedge \forall t(K(x,t,y) \to E_1(t,x)) \wedge \forall u[E_1^*(u,f(x)) \to \neg E_1^*(u,f(y))]],$$

$$\phi_1(x) := \exists y[E_1(x,y) \wedge \forall t(K(y,t,x) \to E_1(t,x)) \wedge \forall u[E_1^*(u,f(x)) \to \neg E_1^*(u,f(y))]].$$

Очевидно, что $M \models \phi_0(a) \wedge \phi_1(b)$. В силу 1-транзитивности структуры M будет $M \models \phi_0(c) \wedge \phi_1(c)$ для любого $c \in M$. Следовательно, существуют $c_i \in M$, $i \in \omega$, такие, что $\neg E_1(c_i, c_j)$ для любых $i \ne j$ и для любого $i < \omega$ существует $b_i \in E_1(M,a)$ с условием $E_1^*(c_i, f(b_i))$. Рассмотрим следующую формулу:

$$\begin{aligned} E_1'(x,y) := E_1(x,y) \wedge [\forall t_1(K(x,t_1,y) \to E_1(t_1,x)) \to \forall t(K(x,t,y) \\ \to \exists u[E_1^*(u,f(x)) \wedge E_1^*(u,f(t))])] \wedge [\forall t_1(K(y,t_1,x) \to E_1(t_1,x)) \\ \to \forall t(K(y,t,x) \to \exists u[E_1^*(u,f(x)) \wedge E_1^*(u,f(t))])]. \end{aligned}$$

Докажем, что E_1' — отношение эквивалентности. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность. Пусть $M \models E_1'(a,b) \wedge E_1'(b,c)$. Покажем, что $E_1'(a,c)$.

Возможны два случая: (1) $K_0(a,b,c)$ и (2) $K_0(a,c,b)$. Не умаляя общности, предположим, что выполняется (1). Так как $E_1'(a,b)$, то $E_1(a,b)$ и возможны следующие два случая: либо (a) $K(a,M,b) \subseteq E_1(M,a)$, либо (b) $K(b,M,a) \subseteq E_1(M,a)$. Не уменьшая общности, предположим, что выполняется (a). Тогда

$$M \models \forall t(K(a,t,b) \to \exists u[E_1^*(u,f(a)) \wedge E_1^*(u,f(t))]).$$

Так как $E_1'(b,c)$, то $E_1(b,c)$ и возможны следующие случаи: либо (i) $K(b,M,c) \subseteq E_1(M,b)$, либо (ii) $K(c,M,b) \subseteq E_1(M,b)$. Если выполняется (i), то

$$M \models \forall t(K(b,t,c) \to \exists u[E_1^*(u,f(b)) \wedge E_1^*(u,f(t))]).$$

Тогда, очевидно, $M \models \forall t(K(a,t,c) \to \exists u[E_1^*(u,f(a)) \wedge E_1^*(u,f(t))])$, т. е. $E_1'(a,c)$ (действительно, из условий (a) и (i) также следует, что $K(a,M,c) \subseteq E_1(M,a)$)).

Если выполняется (ii), то $M \models \forall t(K(c,t,b) \to \exists u[E_1^*(u,f(c)) \wedge E_1^*(u,f(t))])$ и также имеет место $K_0(c,a,b)$, т. е. $M \models \forall t(K(c,t,a) \to \exists u[E_1^*(u,f(c)) \wedge E_1^*(u,f(t))])$, откуда получаем $E_1'(a,c)$. Аналогично рассматриваются остальные случаи. Таким образом, E_1' является отношением эквивалентности, разбивающим $E_1(M,a)$ на бесконечное число E_1'-классов. Покажем, что каждый E_1'-класс бесконечен. Действительно, рассмотрим следующую формулу:

$$D(x) := \exists y[E_1(x,y) \wedge x \neq y \wedge \exists u(E_1^*(u,f(x)) \wedge E_1^*(u,f(y)))].$$

Предположим, что $M \models D(a)$. Тогда существует $b \in E_1(M,a)$ такой, что $a \neq b$ и $M \models \exists u[E_1^*(u,f(a)) \wedge E_1^*(u,f(b))]$. Не умаляя общности, полагаем, что $K(a,M,b) \subseteq E_1(M,a)$. Тогда $M \models \forall t(K(a,t,b) \to \exists u[E_1^*(u,f(a)) \wedge E_1^*(u,f(t))])$. Следовательно, $E_1'(M,a)$ бесконечно и выпукло, т. е. E_1' является $\varnothing$-определимым отношением эквивалентности, разбивающим каждый E_1-класс на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, что противоречит минимальности отношения эквивалентности E_1. Таким образом, $M \models \neg D(a)$, где

$$\neg D(x) := \forall y(E_1(x,y) \wedge x \neq y \to \forall u[E_1^*(u,f(x)) \to \neg E_1^*(u,f(y))]).$$

Тогда получаем, что каждый E_1'-класс одноэлементен. Рассмотрим следующую формулу:

$$\begin{aligned}\theta(t) := \exists t_1 \exists t_2[E_1(y_1,a) \wedge E_1(y_2,a) \wedge K_0(a,y_1,y_2) \wedge \forall u_1(K(a,u_1,y_2) \to E_1(u_1,a)) \\ \wedge \neg F(t,y_1) \wedge \forall u_2(K_0(y_1,u_2,y_2) \to F(t,u_2))].\end{aligned}$$

$\theta(M)$ является объединением бесконечного числа выпуклых множеств, что противоречит слабой циклической минимальности структуры M. Шаг 1 доказан.

Предположим, что лемма установлена для всех $j < l$.

Шаг l. Докажем что для любых $a,b \in M$ с условием $E_l(a,b)$ существует $c \in M$ такой, что $E_l^*(c,f(a)) \wedge E_l^*(c,f(b))$. Функция f монотонна на E_l/E_i для некоторого $0 \leq i \leq l-1$ (где E_0 — отношение тождества). Тогда, очевидно, f монотонна на E_l/E_{l-1}. Возьмем произвольные $a,b \in M$ такие, что $E_l(a,b)$. Если имеет место $E_i(a,b)$ для некоторого $i \leq l-1$, то по индукционному предположению существует $c \in M$ такой, что $E_i^*(c,f(a)) \wedge E_i^*(c,f(b))$. Если $\neg E_{l-1}(a,b)$ и для любого $c \in M$ из условия $E_l^*(c,f(a))$ следует $\neg E_l^*(c,f(b))$, то аналогично шагу 1 мы можем построить $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E_l'(x,y)$, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_{l-1} \subset E_l' \subset E_l$; противоречие с тем, что E_l является непосредственным последователем E_{l-1} среди $\varnothing$-определимых отношений эквивалентности. $\square$

Лемма 2.12. *Пусть $E_1(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) := \mathrm{rend}\, F(M,y)$ монотонная влево на M/E_1. Тогда*

(1) $F'(x,y) := F(x,y) \wedge \exists z[E_1(z,x) \wedge \forall t(F(t,z) \to F(t,y))]$ *выпуклая вправо и меньше, чем $F(x,y)$,*

(2) $E(x,y) := F'(x,y) \vee F'(y,x)$ *— отношение эквивалентности, разбивающее M на два бесконечных выпуклых класса без концевых точек.*

Доказательство. (1) Возьмем произвольный $a \in M$. Очевидно, что $a \in F'(M,a)$. Покажем вначале, что существует $b \in F(M,a)$ такой, что $\neg E_1(a,b)$ и $b \in F'(M,a)$. Допустим противное: для любого $b \in F(M,a)$ с условием $\neg E_1(a,b)$ следует $b \notin F'(M,a)$. Рассмотрим произвольные $b,c \in F(M,a)$ такие, что $M \models K_0(a,b,c) \land \neg E_1(a,b) \land \neg E_1(b,c) \land \neg E_1(a,c)$ (так как $F(M,a) \not\subset E_1(M,a)$, в силу плотной упорядоченности E_1-классов таких элементов бесконечно много). Ввиду монотонности влево функции f на M/E_1 имеем $K_0(f(c), f(b), f(a))$, т. е. $K_0(f(a), f(c), f(b))$. Отсюда следует, что $c \in F'(M,b)$; противоречие. Значит, существует $b \in F(M,a)$ такой, что $\neg E_1(a,b)$ и $b \in F'(M,a)$. Зафиксируем b. Возьмем произвольный $c \in M$ такой, что $M \models K_0(a,c,b) \land \neg E_1(a,c) \land \neg E_1(c,b)$. Тогда в силу монотонности влево функции f на M/E_1 получаем $K_0(f(b), f(c), f(a))$, т. е. $c \in F'(M,a)$. Рассмотрим теперь произвольный $d \in M$ такой, что $K_0(f(b), d, f(a))$. Тогда имеем $K_0(b,d,a)$, $\neg E_1(a,d)$, $\neg E_1(b,d)$. Снова с учетом монотонности влево функции f на M/E_1 получаем $K_0(f(a), f(d), f(b))$, т. е. $d \notin F'(M,a)$ и тем самым $F'(M,a) \subset F(M,a)$. Возьмем произвольные $d,e \in F(M,a)$ такие, что

$$M \models \neg F'(d,a) \land K_0(d,e,a) \land \neg E_1(d,e) \land \neg E_1(d,a) \land \neg E_1(e,a).$$

В силу монотонности влево функции f на M/E_1 имеем $K_0(f(a), f(e), f(d))$, откуда $e \notin F'(M,a)$. Таким образом, $F'(M,a)$ выпукло, и a — левая концевая точка множества $F'(M,a)$, т. е. $F'(x,y)$ — выпуклая вправо формула.

(2) Докажем, что $E(x,y)$ — отношение эквивалентности. Рефлексивность и симметричность очевидны. Докажем транзитивность E. Предположим, что $E(a,b)$ и $E(b,c)$. $E(a,b)$ влечет либо (i) $F'(a,b)$, либо (ii) $F'(b,a)$. Не умаляя общности, предположим, что выполняется (i). Тогда имеем либо $(i)'$ $M \models E_1(a,b) \land \forall t[K(b,t,a) \to E_1(t,b)]$, либо $(i)''$ $M \models \neg E_1(a,b) \land \forall t[F(t,a) \to F(t,b)]$. $E(b,c)$ влечет либо (a) $F'(b,c)$, либо (b) $F'(c,b)$. Не умаляя общности, предположим что выполняется (a). Тогда имеем либо $(a)'$ $M \models E_1(b,c) \land \forall t[K(c,t,b) \to E_1(t,c)]$, либо $(a)''$ $M \models \neg E_1(b,c) \land \forall t[F(t,b) \to F(t,c)]$.

Случай $(i)', (a)'$. Тогда $M \models K_0(c,b,a) \land \forall t[K(c,t,a) \to E_1(t,c)]$. Очевидно, что $a \in F'(M,c)$.

Случай $(i)', (a)''$. Тогда $M \models K_0(c,b,a) \land E_1(a,b) \land \neg E_1(b,c)$. Следовательно, $F(M,a) \subseteq F(M,c)$, т. е. $a \in F'(M,c)$.

Случай $(i)'', (a)'$. Тогда $M \models K_0(c,b,a) \land \neg E_1(a,b) \land E_1(b,c)$. Следовательно, $F(M,a) \subseteq F(M,c)$, т. е. $a \in F'(M,c)$.

Случай $(i)'', (a)''$. Очевидно, $K_0(c,b,a)$ и $F(M,a) \subseteq F(M,c)$, т. е. $F'(a,c)$.

Таким образом, E — отношение эквивалентности. Покажем, что $E(M,a)$ выпукло для любого $a \in M$. Возьмем произвольный $b \in E(M,a)$. Необходимо доказать, что $K(a,M,b) \subseteq E(M,a)$ или $K(b,M,a) \subseteq E(M,a)$. Если выполняется $F'(b,a)$, то $K(a,M,b) \subseteq F'(M,a)$ в силу выпуклости $F'(M,a)$, т. е. $E(x,a)$. Если выполняется $F'(a,b)$, то $K(b,M,a) \subseteq F'(M,b)$ в силу выпуклости $F'(M,a)$, т. е. $E(x,b)$ и, следовательно, $E(x,a)$. Таким образом, каждый E-класс является выпуклым. Покажем, что E — не универсальное отношение. Возьмем произвольный $b \in F(M,a) \setminus F'(M,a)$. Имеем $\neg E_1(a,b)$. Если $a \in F'(M,b)$, то $F(M,a) \subseteq F(M,b)$, откуда b не является левой концевой точкой множества $F(M,b)$; противоречие. Следовательно, $a \notin F'(M,b)$, т. е. $\neg E(a,b)$. Покажем, что E разбивает M на два класса. Возьмем произвольные $a,b \in M$ такие, что $b \in F(M,a) \setminus F'(M,a)$. Имеем $\neg E(a,b)$. Докажем, что для любого $c \in M$ выполнено либо $E(a,c)$, либо $E(b,c)$.

Случай 1. $K_0(a,c,b)$. Имеем $c \in F(M,a)$. Если $c \in F'(M,a)$, то $E(a,c)$. Предположим, что $c \notin F'(M,a)$. Если $E_1(c,b)$, то $K(c,M,b) \subseteq E_1(M,c)$. По определению формулы $F'(x,y)$ получаем, что $F'(b,c)$, т. е. $E(b,c)$. Поэтому предположим, что $\neg E_1(c,b)$. Так как $\neg E_1(a,b)$ и $\neg E_1(a,c)$ (в силу того, что $c \notin F'(M,a)$), используя монотонность влево функции f на M/E_1, имеем, что $K_0(a,c,b)$ влечет $K_0(f(b),f(c),f(a))$. Но тогда $b \in F'(M,c)$, т. е. получаем $E(b,c)$.

Случай 2. $K_0(a,b,c)$. Рассматривается аналогично случаю 1. $\square$

Пусть $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечные выпуклые классы, $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) := \mathrm{rend}\, F(M,y)$ монотонная на M/E. Будем говорить, что m_F является *охватом* (*охватывающим числом*) для $F(x,y)$, если для любого $a_1 \in M/E$ существуют $a_2,\dots,a_{m_F} \in M/E$ такие, что

$$M \models K_0(a_1,a_2,\dots,a_{m_F}) \wedge \bigwedge_{1\le k\ne l\le m_F} \neg E(a_k,a_l),$$

$a_{i+1} \in F(M,a_i)$ для каждого $i \le m_F - 1$, $a_1 \in F(M,a_{m_F})$ и m_F минимальное с таким свойством.

Лемма 2.13. *Пусть $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) := \mathrm{rend}\, F(M,y)$ нетождественная монотонная на M/E. Тогда существует охват m_F для $F(x,y)$, и если f монотонная влево на M/E, то $m_F = 2$.*

Доказательство. Покажем вначале, что для любого $a \in M$ существует $b \in F(M,a)$ такой, что $\neg E(a,b)$ и $F(M,b) \not\subset F(M,a)$. Если f монотонная влево на M/E, то это следует из доказательства леммы 2.12. Поэтому предположим, что f монотонная вправо на M/E. Допустим противное: существует $a \in M$ такой, что для любого $b \in F(M,a)$ из условия $\neg E(a,b)$ следует $F(M,b) \subset F(M,a)$. Тогда рассмотрим произвольные $b,c \in F(M,a)$ такие, что $K_0(a,b,c)$, $c \in F(M,b)$, $\neg E(a,b)$, $\neg E(b,c)$, $\neg E(a,c)$ (такие элементы существуют, так как $F(M,a) \not\subset E(M,a)$ и, следовательно, в силу плотной упорядоченности E-классов существует бесконечно много E-классов, содержащихся в $F(M,a)$). С учетом монотонности вправо функции f на M/E мы имеем $K_0(f(a),f(b),f(c))$, откуда $F(M,c) \not\subset F(M,b)$; противоречие. Таким образом, для любого $a \in M$ существует $b \in F(M,a)$ такой, что $\neg E(a,b)$ и $F(M,b) \not\subset F(M,a)$. Допустим противное: не существует охвата m_F для $F(x,y)$, т. е. для любого $m \in \omega$ существует $a_1 \in M$ такой, что для любых $a_2,\dots,a_m \in M$ таких, что

$$M \models K_0(a_1,a_2,\dots,a_m) \wedge \bigwedge_{1\le k\ne l\le m} \neg E(a_k,a_l),$$

$a_{i+1} \in F(M,a_i)$ для каждого $i \le m-1$, следует $a_1 \notin F(M,a_{m_F})$. Рассмотрим формулы

$$F^1(x,y) := \exists t[F(t,y) \wedge F(x,t)], \quad F^m(x,y) := \exists t[F^{m-1}(t,y) \wedge F(x,t)], \quad m \ge 2.$$

Имеем $F(M,a_1) \subset F^1(M,a_1) \subset \ldots \subset F^m(M,a_1) \subset \ldots$, что противоречит $\aleph_0$-категоричности структуры M.

Предположим, что f монотонная влево на M/E. Допустим противное: $m_F \ge 3$. По определению m_F имеем

$$K_0(a_1,a_2,\dots,a_{m_F}), \wedge \bigwedge_{1\le k\ne l\le m_F} \neg E(a_k,a_l), a_{i+1} \in F(M,a_i)\ \forall\ i \le m_F - 1,$$

$$a_1 \in F(M, a_{m_F}).$$

Следовательно, $K_0(f(a), f(a_2), \dots, f(a_{m_F}))$. В силу монотонности влево функции f на M/E $K_0(a_1, a_2, \dots, a_{m_F})$ влечет $K_0(f(a_{m_F}, \dots, f(a_2), f(a_1))$; противоречие. $\square$

Лемма 2.14. *Пусть $F(x, y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) := \operatorname{rend} F(M, y)$ локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, 1\rangle$ на M. Тогда если n четно (нечетно), то $f^2(a) = a$ для каждого $a \in M$ (где $f^2(y) := f(f(y))$).*

Доказательство. Не умаляя общности, предположим, что f локально монотонная вправо ранга $\langle n, 1\rangle$ на M и n четно. Тогда существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E_1(x, y)$, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов такое, что f монотонная влево на M/E_1. Тогда в силу леммы 2.12 существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x, y)$, разбивающее M на два бесконечных выпуклых класса, а ввиду леммы 2.13 существует охват m_F для $F(x, y)$ и $m_F = 2$. В силу леммы 2.5 для любого $a \in M$ имеем $\neg E^*(a, f(a))$, следовательно, выполняется $E^*(a, f^2(a))$. Так как f монотонная влево на M/E_1, то f^2 монотонная вправо на M/E_1. Действительно, если рассмотрим произвольные $a_1, a_2, a_3 \in M$ такие, что $K_0(a_1, a_2, a_3)$, $\wedge \wedge_{i\neq j} \neg E_1(a_i, a_j)$, то с учетом монотонности влево функции f на M/E_1 имеем $K_0(f(a_3), f(a_2), f(a_1))$. Очевидно, существуют $b_1, b_2, b_3 \in M$ такие, что $E^*(b_i, f(a_i))$ для каждого $i \le 3$, $\neg E_1(b_i, b_j)$ при любых $i \neq j$. Снова применяя f, получаем $K_0(f^2(a_1), f^2(a_2), f^2(a_3))$, т. е. f^2 монотонная вправо на M/E_1. Тогда $E^*(a, f^2(a))$ влечет $f^2(a) = a$, иначе получаем противоречие с леммой 2.5. $\square$

Лемма 2.15. *Пусть $F(x, y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) := \operatorname{rend} F(M, y)$ локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, 1\rangle$ на M, $n \ge 2$. Тогда если n нечетно (четно), то существует четное $m \in \omega$ такое, что $f^m(a) = a$ для каждого $a \in M$ (где $f^m(y) := f(f^{m-1}(y))$).*

Доказательство. Не умаляя общности, предположим, что f локально монотонная вправо ранга $\langle n, 1\rangle$ на M и n нечетно. Тогда существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y)$, $E_2(x, y)$, разбивающие M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_1(M, a) \subset E_2(M, a)$ для любого $a \in M$, f монотонная влево на E_2/E_1 и монотонная вправо на M/E_2. Возьмем произвольные $a_1, a_2, a_3 \in M$ такие, что $M \models K_0(a_1, a_2, a_3) \wedge \bigwedge_{i\neq j} \neg E_1(a_i, a_j)$ и $a_2, a_3 \in E_2(M, a_1)$. Так как f монотонная влево на E_2/E_1, имеем $K_0(f(a_3), f(a_2), f(a_1))$. Очевидно, существуют $b_1, b_2, b_3 \in M$ такие, что $E_2^*(b_i, f(a_i))$ для каждого $i \le 3$, $\neg E_1(b_i, b_j)$ при любых $i \neq j$. По лемме 2.11 $b_2, b_3 \in E_2(M, b_1)$. Снова применяя f, получаем $K_0(f^2(a_1), f^2(a_2), f^2(a_3))$ и т. д. Значит, $K_0(f^k(a_1), f^k(a_2), f^k(a_3))$ для любого четного k и $K_0(f^l(a_3), f^l(a_2), f^l(a_1))$ для любого нечетного l. Существует $m \in \omega$ такой, что $f^m(a) = a$ для любого $a \in M$. Если m нечетно, то получаем $K_0(f^m(a_3), f^m(a_2), f^m(a_1))$, т. е. $K_0(a_3, a_2, a_1)$; противоречие. Следовательно, m должно быть четно. $\square$

Лемма 2.16. *Пусть $F(x, y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) := \operatorname{rend} F(M, y)$ является локально монотонной вправо (влево) ранга $\langle n, m\rangle$ на M, где $m > 2$. Тогда существует охват m_F для $F(x, y)$ и m_F делит m.*

Доказательство. Не умаляя общности, предположим, что f локально монотонная вправо на M. Тогда в силу следствия 2.9 n четно. Следовательно, существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x, y)$, $E_2(x, y)$, так что E_1 разбивает M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, а E_2 разбивает M на m бесконечных выпуклых классов, f монотонная влево на E_2/E_1 и монотонная вправо на M/E_2. В силу леммы 2.5 $\neg E_2^*(a, f(a))$ для любого $a \in M$. Следовательно, для любого $a \in M$ существует $b \in M$ такой, что $\neg E_2(a, b)$, $K_0(a, b, f(a))$ и $E_2^*(b, f(a))$. Тогда очевидно, что $m_F \leq m$, т. е. существует охват для $F(x, y)$. Так как существует лишь конечное число E_2-классов, найдется $k < m$ такой, что $\Phi_k^{f,E_2}(a)$ для любого $a \in M$. Очевидно, что $k+1$ делит m, т. е. существует $l \leq m$ такой, что $(k+1)l = m$. Тогда существует последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots, a_l \in M/E_2$ таких, что $K_0(a_1, a_2, \ldots, a_l)$, $\neg E_2(a_i, a_j)$ для всех $1 \leq i, j \leq l$ с условием $i \neq j$, $E_2^*(a_{i+1}, f(a_i))$ для всех $i \leq l-1$ и $E_2^*(a_1, f(a_l))$. В силу монотонности влево функции f на E_2/E_1 мы можем выбрать a_i так, чтобы выполнялось $K_0(a_{i-1}, a_i, f(a_{i-1}))$ для каждого $2 \leq i \leq l-1$, и мы можем выбрать a_l так, чтобы выполнялись $K_0(a_{l-1}, a_l, f(a_{l-1}))$ и $K_0(a_l, a_1, f(a_l))$, т. е. $m_F = l$. $\square$

Лемма 2.17. *Пусть $F(x, y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $f(y) :=$ $\operatorname{rend} F(M, y)$ локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, m\rangle$ на M, где n четно (нечетно), $m > 2$. Пусть m_F — охват для $F(x, y)$. Тогда $f^{m_F}(a) = a$ для любого $a \in M$ (где $f^{m_F}(y) := f(f^{m_F-1}(y))$) и m_F четно.*

Доказательство. Поскольку m_F — охват для $F(x, y)$, для любого $a_1 \in M$ существуют $a_2, \ldots, a_{m_F} \in M$ такие, что

$$M \models K_0(a_1, a_2, \ldots, a_{m_F}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg E_n^f(a_i, a_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{m_F-1} E_n^{f*}(a_{i+1}, f(a_i)) \wedge E_n^{f*}(a_1, f(a_{m_F})).$$

Введем следующие обозначения:

$$F^1(x, y) := F(x, y), \quad \theta_l(x, y) := \neg F^l(x, y) \wedge E^*(x, f^l(y)), \quad 1 \leq l \leq m_F - 1,$$

$$F^l(x, y) := F^{l-1}(x, y) \vee \exists t[\theta_{l-1}(t, y) \wedge F(x, t)], \quad 2 \leq l \leq m_F - 1.$$

Докажем индукцией по l для каждого $1 \leq l \leq m_F - 1$, что выполняется $E_n^{f*}(a_{l+1}, f^l(a_1))$; $F^l(x, y)$ выпуклая вправо и $f^l(y) = \operatorname{rend} F^l(M, y)$; если l нечетно, то f^l монотонная влево на E_n^f/E_{n-1}^f; если l четно, то f^l монотонная вправо на

$$M/E_{n-1}^f. \qquad (1)$$

Шаг 1. $E_n^{f*}(a_2, f^1(a_1))$, $F^1(x, y)$ выпуклая вправо, $f^1(y) = \operatorname{rend} F^1(M, y)$ и f^1 монотонная влево на E_n^f/E_{n-1}^f по условию. Кроме того, $\theta_1(M, a_1)$ выпукло, $\theta_1(M, a_1) \subset E_n^f(M, a_2)$, $F^1(M, a_1) \cap \theta_1(M, a_1) = \varnothing$ и $[F^1(M, a_1) \cup \theta_1(M, a_1)] \cap E_n^f(M, a_2) = E_n^f(M, a_2)$. Предположим, что (1) установлено для всех $j < l$.

Шаг l. По индукционному предположению $E_n^{f*}(a_l, f^{l-1}(a_1))$. Тогда по лемме 2.11 $M \models \exists u\bigl[E_n^{f*}(u, f(a_l)) \wedge E_n^{f*}(u, f^l(a_1))\bigr]$. По условию $E_n^{f*}(a_{l+1}, f(a_l))$, откуда получаем $E_n^{f*}(a_{l+1}, f^l(a_1))$. Рассмотрим $F^l(x, y)$. Пусть $G_l(x, y) :=$ $\exists t[\theta_l(t, y) \wedge F(x, t)]$. По определению $F^l(M, a_1) = F^{l-1}(M, a_1) \cup G_{l-1}(M, a_1)$. По индукционному предположению $F^{l-1}(x, y)$ выпуклая вправо, т. е. $F^{l-1}(M, a_1)$ выпукло и a_1 — левая концевая точка множества $F^{l-1}(M, a_1)$. Множество $\theta_{l-1}(M, a_1)$ также является выпуклым. В силу локальной монотонности функции f на каждом E_n^f-классе получаем, что $G_{l-1}(M, a_1)$ также выпукло, значит, $F^l(M, a_1)$ выпукло и a_1 — левая концевая точка множества $F^l(M, a_1)$. Так как $E_n^{f*}(a_{l+1}, f^l(a_1))$, то $\neg E_n^{f*}(a_1, f^l(a_1))$. Действительно, если $E_n^{f*}(a_1, f^l(a_1))$, то

$E_n^{f*}(a_1, a_{l+1})$; противоречие с выбором $a_1, \ldots, a_{m_F}$. Следовательно, $F^l(M, a_1)$ кобесконечно, и $F^l(x, y)$ выпуклая вправо и $f^l(y) = \operatorname{rend} F^l(M, y)$. Возьмем произвольные $b_1, b_2, b_3 \in M$ такие, что

$$M \models K_0(b_1, b_2, b_3) \wedge E_n^f(b_1, b_2) \wedge E_n^f(b_2, b_3) \wedge \neg E_{n-1}^f(b_1, b_2) \wedge \neg E_{n-1}^f(b_2, b_3) \wedge \neg E_{n-1}^f(b_3, b_1).$$

Если l нечетно (четно), то по индукционному предположению f^{l-1} монотонная вправо на M/E_{n-1}^f (f^{l-1} монотонная влево на E_n^f/E_{n-1}^f). Следовательно,

$$K_0(f^{l-1}(b_1), f^{l-1}(b_2), f^{l-1}(b_3))[K_0(f^{l-1}(b_3), f^{l-1}(b_2), f^{l-1}(b_1))],$$

что влечет $\theta_{l-1}(M, b_1) \supset \theta_{l-1}(M, b_2) \supset \theta_{l-1}(M, b_3)$ и

$$K_0(\theta_{l-1}(M, b_1) \setminus \theta_{l-1}(M, b_2), \theta_{l-1}(M, b_2) \setminus \theta_{l-1}(M, b_3), \theta_{l-1}(M, b_3)),$$
$$[\theta_{l-1}(M, b_1) \subset \theta_{l-1}(M, b_2) \subset \theta_{l-1}(M, b_3),$$
$$K_0(\theta_{l-1}(M, b_3) \setminus \theta_{l-1}(M, b_2), \theta_{l-1}(M, b_2) \setminus \theta_{l-1}(M, b_1), \theta_{l-1}(M, b_1))].$$

Тогда в силу того, что f монотонная влево на E_n^f/E_{n-1}^f, получаем

$$K_0(f^l(b_3), f^l(b_2), f^l(b_1))[K_0(f^l(b_1), f^l(b_2), f^l(b_3))],$$

т. е. f^l монотонная влево на E_n^f/E_{n-1}^f (f^l монотонная вправо на E_n^f/E_{n-1}^f). Рассмотрим формулу $\Phi_k^{f, E_n^f}(x)$. Так как существует только конечное число E_n^f-классов, существует $k < m$ такой, что $M \models \Phi_k^{f, E_n^f}(a)$ для любого $a \in M$. Тогда для любых $a_1, a_2, a_3 \in M$ таких, что $K_0(a_1, a_2, a_3) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg E_n^f(a_i, a_j)$, следует $K_0(f^l(a_1),\ f^l(a_2),\ f^l(a_3))$. Таким образом, если l нечетно, то f^l кусочно монотонная влево на M/E_{n-1}^f; если l четно, то f^l монотонная вправо на M/E_{n-1}^f. Шаг l доказан.

Возьмем произвольные $b_1, b_2, b_3 \in M$ такие, что

$$M \models K_0(b_1, b_2, b_3) \wedge E_n^f(b_1, b_2) \wedge E_n^f(b_2, b_3) \wedge \neg E_{n-1}^f(b_1, b_2) \wedge \neg E_{n-1}^f(b_2, b_3) \wedge \neg E_{n-1}^f(b_3, b_1).$$

Мы доказали, что $f^{m_F - 1}$ монотонная вправо или влево на E_n^f/E_{n-1}^f. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда $K_0(f^{m_F-1}(b_1), f^{m_F-1}(b_2), f^{m_F-1}(b_3))$ и, следовательно,

$$\theta_{m_F-1}(M, b_1) \supset \theta_{m_F-1}(M, b_2) \supset \theta_{m_F-1}(M, b_3).$$

В силу монотонности влево функции f на E_n^f/E_{n-1}^f получаем, что $K_0(f^{m_F}(b_3),$ $f^{m_F}(b_2),\ f^{m_F}(b_1))$, т. е. f^{m_F} монотонная влево на E_n^f/E_{n-1}^f. Поскольку выполняются $E_n^{f*}(a_{m_F}, f^{m_F-1}(a_1))$ и $E_n^{f*}(a_1,\ f(a_{m_F}))$, имеем $E_n^{f*}(a_1, f^{m_F}(a_1))$. Допустим противное, т. е. что $f^{m_F}(a_1) \neq a_1$. Если $K(a_1, M, f^{m_F}(a_1)) \subseteq E_n^f(M, a_1)$, то рассмотрим следующую формулу: $F'(x, a_1) := K(a_1, x, f^{m_F}(a_1))$. Можно доказать, что $F'(x, y)$ выпуклая вправо и $f'(y) := \operatorname{rend} F'(M,\ y)$ монотонная на E_n^f/E_{n-1}^f. Ясно что $E_n^{f*}(a_1, f^{m_F}(a_1))$ влечет $E_n^{f*}(a_1, f'(a_1))$; противоречие с леммой 2.5. Если $K(f^{m_F}(a_1), M, a_1) \subseteq E_n^f(M, a_1)$, то формула $F^{m_F}(x, y)$ выпуклая вправо. Так как f^{m_F} монотонная на E_n^f/E_{n-1}^f, вновь имеем противоречие с леммой 2.5. Покажем, что m_F четно. Допустим противное: m_F нечетно. Тогда $m_F - 1$ четно и, следовательно, f^{m_F-1} монотонная вправо на M/E_{n-1}^f, откуда следует что f^{m_F} монотонная влево на E_n^f/E_{n-1}^f. Тогда $K_0(b_1, b_2, b_3) \wedge E_n^f(b_1, b_2) \wedge E_n^f(b_2, b_3) \wedge \bigwedge_{i \neq j} \neg E_{n-1}^f(b_i,\ b_j)$ влечет $K_0(f^{m_F}(b_3), f^{m_F}(b_2), f^{m_F}(b_1))$, т. е. $K_0(b_3, b_2, b_1)$; противоречие. $\square$

Теорема 2.18. *Пусть M — $\aleph_0$-категоричная 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура, $F(x,y)$ — выпуклая вправо формула. Тогда $f(y) := \operatorname{rend} F(M,y)$ имеет одно из следующих поведений на M:*

(1) f локально константа;

(2) f монотонная вправо и $f^n(a) = a$ для некоторого $n \in \omega$;

(3) f монотонная влево и $f^2(a) = a$;

(4) f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, 1\rangle$, $n > 1$, и $f^m(a) = a$ для некоторого четного $m \in \omega$; кроме того, если n четно (нечетно), то $f^2(a) = a$;

(5) f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, m\rangle$, где $m > 2$, n четно (нечетно) и $f^k(a) = a$ для некоторого четного $k \in \omega$ и k делит m.

Доказательство. (1) Случай, когда f — константа или кусочно константа, рассмотрен в [2]. Пусть $E(x,y)$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Тогда $f(y) := \operatorname{rend} E(M,y)$ — локально константа (не константа и не кусочно константа).

(2), (3) Рассмотрены в [2].

(4) Если f — локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, 1\rangle$, где $n > 1$, то в силу леммы 2.15 $f^m(a) = a$ для некоторого четного $m \in \omega$; кроме того, если n четно (нечетно), то $f^2(a) = a$ ввиду леммы 2.14.

Пусть $M = \big\langle M, =, K, E_1^2, E_2^2, \dots, E_{n-1}^2, f^1\big\rangle$ — циклически упорядоченная структура, n нечетно, m четно, m делит s. Множество M есть непересекающееся объединение множеств $Q_1^n, Q_2^n, \dots, Q_s^n$, так что $K_0\big(Q_1^n, Q_2^n, \dots, Q_s^n\big)$, где Q_i^n для каждого $i \le s$ является копией упорядочения Q^n ($Q^n = \langle\{(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \mid x_i \in Q\}, <_{lex}\rangle$ — множество всевозможных n-ок из рациональных чисел, упорядоченных лексикографически). Отношение эквивалентности E_i для каждого $i = \overline{1, n-1}$ определяется следующим образом: $E_i(x,y) \Leftrightarrow \forall j < n-i \quad x_j = y_j$. Определим функцию f следующим образом: $f\big(Q_i^n\big) = Q_{i+s/m}^n$ для каждого $1 \le i \le s - s/m$, $f\big(Q_j^n\big) = Q_{j+s/m-s}^n$ для каждого $s - s/m < j \le s$ и $f((x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})) = (x_0, -x_1, x_2, \dots, -x_{n-2}, x_{n-1})$.

Очевидно, что $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{n-1}$ и f является локально монотонной вправо ранга $\langle n, 1\rangle$, причем $f^m(a) = a$ для всех $a \in M$. Может быть доказано, что M однородна и, следовательно, $\operatorname{Th}(M)$ допускает элиминацию кванторов и является $\aleph_0$-категоричной. Тогда очевидно, что M слабо циклически минимальна и 1-транзитивна. Таким образом, случай локально монотонной вправо функции, имеющей ранг $\langle n, 1\rangle$, где n нечетно, реализуем в $\aleph_0$-категоричной 1-транзитивной слабо циклически минимальной структуре. Аналогично могут быть построены остальные случаи.

(5) Пусть f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, m\rangle$, где $m > 2$. Если $n = 1$, то f должна быть кусочно монотонной влево (этот случай рассмотрен в [2]. Предположим, что $n > 1$. Тогда в силу следствия 2.9 n должно быть четно (нечетно). В силу леммы 2.17 $f^k(a) = a$ для некоторого четного $k \in \omega$, а ввиду леммы 2.16 k делит m.

Пусть $M = \big\langle M, =, K, E_1^2, E_2^2, \dots, E_{n-1}^2, E'^2, f^1\big\rangle$ — циклически упорядоченная структура, n четно, k четно, k делит m. Множество M есть объединение непересекающихся множеств $Q_1^n, Q_2^n, \dots, Q_m^n$, так что $K_0\big(Q_1^n, Q_2^n, \dots, Q_m^n\big)$, где Q_i^n для каждого $i \le m$ является копией упорядочения Q^n. Отношения эквивалентности E_i для каждого $i = \overline{1, n-1}$ и E' определяются следующим образом: $E_i(x,y) \Leftrightarrow (\forall j < n-i)\ x_j = y_j$ и $E'(x,y) \Leftrightarrow (\exists i \le m)\ x, y \in Q_i^n$. Определим функцию f следующим образом: $f\big(Q_i^n\big) = Q_{i+m/k}^n$ для каждого

$1 \leq i \leq m - m/k$, $f\bigl(Q_j^n\bigr) = Q_{j+m/k-m}^n$ для каждого $m - m/k < j \leq m$ и $f((x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})) = (-x_0, x_1, -x_2, \ldots, -x_{n-2}, x_{n-1})$.

Очевидно, что E' разбивает M на m бесконечных выпуклых классов, $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{n-1}$ и f является локально монотонной вправо ранга $\langle n, m\rangle$, причем $f^k(a) = a$ для всех $a \in M$. Может быть доказано, что M однородна и, следовательно, $\mathrm{Th}(M)$ допускает элиминацию кванторов и является $\aleph_0$-категоричной. Тогда очевидно, что M является слабо циклически минимальной и 1-транзитивной. Таким образом, случай локально монотонной вправо функции, имеющей ранг $\langle n, m\rangle$, где n четно, $m > 2$, реализуем в $\aleph_0$-категоричной 1-транзитивной слабо циклически минимальной структуре. Аналогично могут быть построены остальные случаи. $\square$

3. Структуры ранга выпуклости, большего 1

Для доказательства теорем 3.3, 3.4, описывающих с точностью до бинарности $\aleph_0$-категоричные 1-транзитивные непримитивные слабо циклически минимальные структуры ранга выпуклости, большего 1, нам понадобятся еще две леммы.

Лемма 3.1. *Пусть f — $\varnothing$-определимая функция в $\overline{M}$, являющаяся локально монотонной вправо (влево) ранга $\langle n, 1\rangle$ на M, где n четно (нечетно). Предположим, что g — $\varnothing$-определимая нетождественная локально монотонная функция на M. Тогда $f = g$.*

Доказательство. Допустим противное: $f \neq g$. Тогда для всех $a \in M$ либо $K_0(a, f(a), g(a))$, либо $K_0(a,\, g(a),\, f(a))$. Не умаляя общности, предположим первое. Так как f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, 1\rangle$, где n четно (нечетно), существует $\varnothing$-определимое нетривиальное отношение эквивалентности E_{n-1}^f такое, что f монотонная влево на M/E_{n-1}^f.

Случай 1: g локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n_1, 1\rangle$, где n_1 четно (нечетно). Тогда существует $\varnothing$-определимое нетривиальное отношение эквивалентности $E_{n_1-1}^g$ такое, что g монотонная влево на $M/E_{n_1-1}^g$. Очевидно, что либо $E_{n-1}^f \subseteq E_{n_1-1}^g$, либо $E_{n_1-1}^g \subset E_{n-1}^f$. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда f монотонна влево на $M/E_{n_1-1}^g$. По лемме 2.12 существует $\varnothing$-определимое нетривиальное отношение эквивалентности E', разбивающее M на два бесконечных выпуклых класса. Рассматривая формулы

$$\theta(a, x) := K_0(f(a), x, g(a)), \quad \theta_1(a, x) := \theta(a, x),$$

$$\theta_n(a, x) := \exists y[E'(y, a) \wedge K(f(a), y, a) \wedge \theta_{n-1}(a, f(y)) \wedge \theta(a, x)], \quad n \geq 2,$$

получаем, что $\theta_1(a, M) \subset \theta_2(a, M) \subset \ldots \subset \theta_n(a, M) \subset \ldots$; противоречие с $\aleph_0$-категоричностью структуры M.

Случай 2: g локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n_1, 1\rangle$, где n_1 нечетно (четно). Тогда существует $\varnothing$-определимое нетривиальное отношение эквивалентности $E_{n_1-1}^g$ такое, что g монотонная вправо на $M/E_{n_1-1}^g$. Очевидно, что либо $E_{n-1}^f \subseteq E_{n_1-1}^g$, либо $E_{n_1-1}^g \subset E_{n-1}^f$. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда f является монотонной влево на $M/E_{n_1-1}^g$. По лемме 2.12 существует $\varnothing$-определимое нетривиальное отношение эквивалентности E', разбивающее M на два бесконечных выпуклых класса. Очевидно, что существует $c \in M$ такой, что $E'(c, a)$, $\neg E_{n_1-1}^g(c, a)$ и $K_0(c, g(c), f(c))$; противоречие с 1-транзитивностью структуры M.

Случай 3: g локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n_1, m\rangle$, где $m > 1$. Тогда существует $\varnothing$-определимое нетривиальное отношение эквивалентности $E^g_{n_1}$, разбивающее M на m бесконечных выпуклых классов. Так как f монотонная влево на M/E^f_{n-1}, по лемме 2.12 существует $\varnothing$-определимое нетривиальное отношение эквивалентности E', разбивающее M на два бесконечных выпуклых класса. В силу леммы 1.9 из [2] $E' \equiv E^g_{n_1}$, т. е. $m = 2$, откуда получаем, что g локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n_1, 1\rangle$, т. е. приходим к случаю 1 или 2. $\square$

Пусть f — $\varnothing$-определимая функция в $\overline{M}$. Будем говорить, что f — *минимальная* нетождественная локально монотонная функция на M, если для любой нетождественной локально монотонной функции g такой, что $g \neq f$, следует $K_0(a, f(a), g(a))$ для всех $a \in M$.

Лемма 3.2. *Пусть f — $\varnothing$-определимая функция в $\overline{M}$, являющаяся минимальной нетождественной локально монотонной функцией на M, причем $f^k(a) = a$ для всех $a \in M$ и либо f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, 1\rangle$, где n нечетно (четно), либо f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, m\rangle$, где n четно (нечетно), $m > 2$. Предположим, что g — $\varnothing$-определимая нетождественная локально монотонная функция на M, не являющаяся минимальной. Тогда существует $l < k$ такой, что $f^l = g$.*

Доказательство. Так как f минимальная, то $K_0(a, f(a), g(a))$. Допустим противное: $f^l \neq g$ для любого $l < k$. Тогда существует $l < k$ такой, что $K_0(f^l(a), g(a), f^{l+1}(a))$ для некоторого $a \in M$. Рассмотрим следующую формулу:

$$G'(x, a) := \exists y[K(a, y, f(a)) \wedge f^l(y) = g(a) \wedge K(a, x, y) \wedge x \neq y].$$

Очевидно, что $G'(x, y)$ — выпуклая вправо формула. Покажем, что $g'(y) := \operatorname{rend} G'(M, y)$ — нетождественная локально монотонная функция. В силу локальной монотонности функции f^l существует $\varnothing$-определимое нетривиальное отношение эквивалентности E^f_1, разбивающее M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что f^l монотонная на каждом E^f_1-классе. Не умаляя общности, предположим, что f монотонная вправо на каждом E^f_1-классе. Аналогично в силу нетождественной локальной монотонности функции g существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности E^g_1, разбивающее M на бесконечные выпуклые классы, так что g монотонная на каждом E^g_1-классе. Очевидно, что либо $E^f_1 \subseteq E^g_1$, либо $E^g_1 \subset E^f_1$. Не умаляя общности, предположим первое. Тогда g монотонная на каждом E^f_1-классе. Если g монотонная вправо (влево) на каждом E^f_1-классе, то g' монотонная вправо (влево) на каждом E^f_1-классе, т. е. g' — нетождественная локально монотонная функция, причем $K_0(a, g'(a), f(a))$, что противоречит минимальности функции f. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть M — $\aleph_0$-категоричная 1-транзитивная непримитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости, большего 1, так что $\operatorname{dcl}(a) \neq \{a\}$ для некоторого $a \in M$. Тогда M изоморфна с точностью до бинарности структуре $M_{s,m,k} := \left\langle M, =, K, f^1, E^2_1, \dots, E^2_s, E^2_{s+1}\right\rangle$, где M — циклически упорядоченная структура, M плотно упорядочено, $s \geq 1$, $k \geq 2$, $m = 1$ или k делит m; E_{s+1} — отношение эквивалентности, разбивающее M на m бесконечных выпуклых классов без концевых точек, для каждого $1 \leq i \leq s$ E_i — отношение эквивалентности, разбивающее каждый E_{i+1}-класс* *на бесконечное число бесконечных выпуклых E_i-подклассов без концевых точек, так что индуцированный порядок на E_i-подклассах является плотным без концевых точек; f — биекция на M, так что $f^k(a) = a$ для любого $a \in M$ и $f(E_i(M,a)) = E_i(M, f(a))$, $\neg E_i(a, f(a))$ для каждого $1 \leq i \leq s+1$, причем f имеет только одно из следующих поведений на M:*

- *f монотонная вправо;*
- *f монотонная влево, $k = m = 2$;*
- *f кусочно монотонная влево, k четно, $m \geq 4$, причем f является монотонной влево на каждом E_{s+1}-классе и вправо на M/E_{s+1};*
- *f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n+1, 1\rangle$ для некоторого $1 \leq n \leq s$, причем существуют $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq s$ такие, что $E_j^f \equiv E_{i_j}$ для каждого $1 \leq j \leq n$, k четно, более того, если n нечетно, то $k = 2$;*
- *f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n+1, m\rangle$ для некоторого $1 \leq n \leq s$, причем существуют $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n < i_{n+1} = s+1$ такие, что $E_j^f \equiv E_{i_j}$ для каждого $1 \leq j \leq n+1$, k четно, $m > 2$, n нечетно (четно).*

Доказательство. В силу $\aleph_0$-категоричности структуры M существует лишь конечное число (скажем, s) $\varnothing$-определимых нетривиальных отношений эквивалентности, разбивающих M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Пусть $\{E_1(x,y), E_2(x,y), \ldots, E_s(x,y)\}$ — полный список таких отношений эквивалентности, причем $E_1(M,a) \subset E_2(M,a) \subset \ldots \subset E_s(M,a)$ для всех $a \in M$. Так как ранг выпуклости структуры M больше 1, то $s \geq 1$. В силу леммы 1.9 из [2] существует не более одного $\varnothing$-определимого нетривиального отношения эквивалентности, разбивающего M на конечное число бесконечных выпуклых классов. Обозначим это отношение эквивалентности (если оно существует) через E_{s+1}, и пусть E_{s+1} разбивает M на m бесконечных выпуклых классов. В силу следствия 1.2 $E_s(M,a) \subset E_{s+1}(M,a)$ для всех $a \in M$.

Поскольку существует $a \in M$ такой, что $\mathrm{dcl}(a) \neq \{a\}$, то существует $b \in M$ такой, что $b \neq a$ и $b \in \mathrm{dcl}(a)$. Следовательно, существует $\varnothing$-определимая формула $\theta(x,y)$ такая, что $M \models \theta(a,b) \wedge \exists! y \theta(a,y)$. Определим следующую функцию: $f(x) = y \Leftrightarrow \theta(x,y)$. В силу леммы 1.3 из [2] f является биекцией на M и существует $k \geq 2$ такой, что $f^k(a) = a$ для всех $a \in M$. Ввиду $\aleph_0$-категоричности существует только конечное число $\varnothing$-определимых биекций на M. Не умаляя общности, предположим, что f является наименьшей нетождественной $\varnothing$-определимой биекцией, т. е. если f' является $\varnothing$-определимой нетождественной биекцией и $f' \neq f$, то имеем $K_0(a, f(a), f'(a))$ для всех $a \in M$. Поскольку f является биекцией на M, в силу факта 1.7 из [2] f является локально монотонной на M. По теореме 2.18 f имеет только одно из следующих поведений на M:

(1) f монотонная вправо;

(2) f монотонная влево;

(3) f кусочно монотонная влево;

(4) f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, 1\rangle$, где $n > 1$;

(5) f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, m\rangle$, где $n > 1$, $m > 2$, n четно (нечетно).

В силу лемм 2.5 и 2.11 для каждого $1 \leq i \leq s+1$ и для всех $a \in M$ имеем $\neg E_i(a, f(a))$ и $f(E_i(M,a)) = E_i(M, f(a))$. Рассмотрим следующие формулы:

$$F(x,y) := \exists t[f(y) = t \wedge K(y,x,t) \wedge x \neq t], \quad F'(x,y) := \exists t[f(y) = t \wedge K(y,x,t)],$$

$$F_+^i(x,y) := E_i(x,y) \wedge \forall z(\neg E_i(z,y) \to K(y,x,z)), \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$F_-^i(x,y) := F_+^i(x,y) \vee [\neg E_i(x,y) \wedge \forall z(E_i(z,y) \to K(y,x,z))], \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$F_1^{s+1}(x,y) := E_{s+1}(x,y) \wedge \forall z(\neg E_{s+1}(z,y) \rightarrow K(y,x,z)),$$
$$F_i^{s+1}(x,y) := F_{i-1}^{s+1}(x,y) \vee \forall z(K(y,z,x) \rightarrow F_{i-1}^{s+1}(z,y) \vee E(z,x)), \quad 2 \leq i \leq m.$$

Очевидно, что каждая из этих формул является выпуклой вправо. Обозначим этот список формул через $(*)$.

Доказательство случаев (1)–(3) повторяет доказательство теоремы 4.4 из [2] с незначительными изменениями.

(4) Функция f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n+1, 1\rangle$ для некоторого $1 \leq n \leq s$. Поскольку $\{E_1(x,y), \ldots, E_s(x,y)\}$ — полный список $\varnothing$-определимых нетривиальных отношений эквивалентности, разбивающих M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, существуют $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq s$ такие, что $E_j^f \equiv E_{i_j}$ для каждого $1 \leq j \leq n$. По теореме 2.18 k четно; более того, если $n+1$ четно, то $k = 2$.

Случай 1: $n+1$ четно. Тогда f является монотонной влево на M/E_n^f, откуда по лемме 2.12 существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности E', разбивающее M на два бесконечных выпуклых класса. Тогда $E' \equiv E_{s+1}$, и, следовательно, $m = 2$. Покажем, что если $G(x,y)$ — выпуклая вправо формула, то она эквивалентна одной из формул списка $(*)$. Действительно, пусть $g(y) := \operatorname{rend} G(M,y)$. В силу леммы 4.3 из [2] g не может быть константой. Если g — кусочно константа (не константа), то $G(x,y) \equiv F_i^{s+1}(x,y)$ для некоторого $1 \leq i \leq m$. Если g — локально константа (не кусочно константа), то $G(x,y) \equiv F_+^i(x,y)$ или $G(x,y) \equiv F_-^i(x,y)$ для некоторого $1 \leq i \leq s$. Наконец, если g — нетождественная локально монотонная функция, то по лемме 3.1 $g = f$.

Случай 2: $n+1$ нечетно. В данном случае возможны два подслучая: либо не существует $\varnothing$-определимого нетривиального отношения эквивалентности, разбивающего M на конечное число бесконечных выпуклых классов, т. е. $m = 1$, либо такое отношение эквивалентности существует, т. е. $m \neq 1$. Пусть $G(x,y)$ — выпуклая вправо формула, $g(y) := \operatorname{rend} G(M,y)$. Если $G(x,y)$ не эквивалентна ни одной из формул списка $(*)$, то g — нетождественная локально монотонная функция и по лемме 3.2 существует $l < k$ такой, что $f^l = g$.

(5) Функция f локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n+1, m\rangle$ для некоторого $1 \leq n \leq s$, $m > 2$. Поскольку $\{E_1(x,y), \ldots, E_s(x,y)\}$ — полный список $\varnothing$-определимых нетривиальных отношений эквивалентности, разбивающих M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, а E_{s+1} — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на m бесконечных выпуклых классов, существуют $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n < i_{n+1} = s+1$ такие, что $E_j^f \equiv E_{i_j}$ для каждого $1 \leq j \leq n+1$. По теореме 2.18 $n+1$ четно (нечетно), k четно. Если любая выпуклая вправо формула эквивалентна одной из формул списка $(*)$, то $k = 2$. Предположим, что существует выпуклая вправо формула $G(x,y)$, которая не эквивалентна ни одной из формул списка $(*)$. Тогда мы опять получаем что g — нетождественная локально монотонная функция и по лемме 3.2 существует $l < k$ такой, что $f^l = g$.

Таким образом, M изоморфна с точностью до бинарности структуре $M_{s,m,k} := \langle M, =, K, f^1, E_1^2, \ldots, E_s^2, E_{s+1}^2\rangle$. Может быть проверено, что следующий список аксиом аксиоматизирует $M_{s,m,k}$:

[1] M — плотный циклический порядок относительно K,

$[2]_{1 \leq i \leq s+1}$ E_i — отношение эквивалентности и каждый E_i-класс является бесконечным и выпуклым без концевых точек,

[3] $\exists x_1, \ldots, \exists x_m \left[\bigwedge_{i \neq j} \neg E_{s+1}(x_i,x_j) \wedge \forall t \bigvee_{i=1}^{m} E_{s+1}(t,x_i)\right]$,

$[4]_{1\le i\le s}$ каждый E_{i+1}-класс разбивается на бесконечное число E_i-подклассов, так что индуцированный порядок на E_i-подклассах является плотным без концевых точек,

[5] $\forall y\exists x[y=f(x)]\wedge\forall x\forall y[x\neq y\to f(x)\neq f(y)]$, т. е. f является биекцией на M,

[6] $\forall x\left[f^m(x)=x\wedge\bigwedge_{i=1}^{m-1}f^i(x)\neq x\right]$,

$[7]_{1\le i\le s+1}$ $\forall x(\neg E_i(x,f(x))\wedge\forall y[E_i(y,x)\to E_i(f(y),f(x))])$,

$[8]_{m\neq 1}$ $\forall x\exists x_1,\dots,\exists x_l\left[\bigwedge_{i\neq j}\neg E_{s+1}(x_i,x_j)\wedge\bigwedge_{i=1}^{l}\{\neg E_{s+1}(x_i,x)\wedge\neg E_{s+1}(x_i,f(x))\}\wedge\right.$
$\left.K_0(x,x_1,\dots,x_l,f(x))\wedge\forall t\left(K(x,t,f(x))\to\bigvee_{i=1}^{l}E_{s+1}(x_i,t)\vee E_{s+1}(x,t)\vee E_{s+1}(f(x),t)\right)\right]$,
где $l=m/k-1$.

В зависимости от поведения функции f следующие аксиомы завершают искомый список:

если f монотонная вправо, то

[9] $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\to K_0(f(x),f(y),f(z))]$;

если f монотонная влево, то

[9] $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\to K_0(f(z),f(y),f(x))]$;

если r кусочно монотонная влево, то

[9] $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\wedge E_{s+1}(x,y)\wedge E_{s+1}(y,z)\to K_0(f(z),f(y),f(x))]$;

[10] $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\wedge\neg E_{s+1}(x,y)\wedge\neg E_{s+1}(y,z)\wedge\neg E_{s+1}(x,z)\to K_0(f(x),$ $f(y),f(z))]$.

Пусть теперь r локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n+1,m_1\rangle$. Не умаляя общности, предположим, что r локально монотонная вправо (случай локально монотонной влево функции рассматривается аналогично). В этом случае следующие аксиомы завершают искомый список:

[9] $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\wedge E_{i_1}(x,y)\wedge E_{i_1}(y,z)\to K_0(f(x),f(y),f(z))]$;

$[10]^+_{2\le j\le n_1}$ $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\wedge E_{i_j}(x,y)\wedge E_{i_j}(y,z)\neg E_{i_{j-1}}(x,y)\wedge\neg E_{i_{j-1}}(y,z)\wedge$ $\neg E_{i_{j-1}}(x,z)\to K_0(f(z),f(y),f(x))]$, где j четно;

$[10]^-_{2\le j\le n_1}$ $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\wedge E_{i_j}(x,y)\wedge E_{i_j}(y,z)\neg E_{i_{j-1}}(x,y)\wedge\neg E_{i_{j-1}}(y,z)\wedge$ $\neg E_{i_{j-1}}(x,z)\to K_0(f(x),f(y),f(z))]$, где j нечетно.

В аксиомах [10] если $m_1=1$, то $n_1=n$; если же $m_1\neq 1$, то $n_1=n+1$.

$[11]^+_{m_1=1}$ $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\wedge\neg E_{i_n}(x,y)\wedge\neg E_{i_n}(y,z)\wedge\neg E_{i_n}(x,z)\to K_0(f(x),$ $f(y),(z))]$, где n четно;

$[11]^-_{m_1=1}$ $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\wedge\neg E_{i_n}(x,y)\wedge\neg E_{i_n}(y,z)\wedge\neg E_{i_n}(x,z)\to K_0(f(z),$ $f(y),f(x))]$, где n нечетно;

$[11]_{m_1\neq 1}$ $\forall x\forall y\forall z[K_0(x,y,z)\wedge\neg E_{s+1}(x,y)\wedge\neg E_{s+1}(y,z)\wedge\neg E_{s+1}(x,z)\to$ $K_0(f(x),f(y),f(z))]$. $\square$

Теорема 3.4. *Пусть M — $\aleph_0$-категоричная 1-транзитивная непримитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости, большего 1, так что $\mathrm{dcl}(a)=\{a\}$ для некоторого $a\in M$. Тогда M изоморфна с точностью до бинарности одной из следующих структур:*

• $M_{s,m}:=\langle M,=,K,E_1^2,\dots,E_s^2,E_{s+1}^2\rangle$, *где M — циклически упорядоченная структура, M плотно упорядочено, $s,m\ge 1$; E_{s+1} — отношение эквивалентности, разбивающее M на m бесконечных выпуклых классов без концевых точек; E_i для каждого $1\le i\le s$ есть отношение эквивалентности, разбивающее каждый E_{i+1}-класс на бесконечное число бесконечных выпуклых E_i-подклассов без* *концевых точек, так что индуцированный порядок на E_i-подклассах является плотным без концевых точек;*

• $M'_{s,m,k} := \langle M, =, K, E_1^2, \ldots, E_s^2, E_{s+1}^2, R^2 \rangle$, *где M — циклически упорядоченная структура, M плотно упорядочено, $s, m \geq 1$; E_{s+1} — отношение эквивалентности, разбивающее M на m бесконечных выпуклых классов без концевых точек; E_i для каждого $1 \leq i \leq s$ есть отношение эквивалентности, разбивающее каждый E_{i+1}-класс на бесконечное число бесконечных выпуклых E_i-подклассов без концевых точек, так что индуцированный порядок на E_i-подклассах является плотным без концевых точек; $R(x, y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $R(M, a)$ не имеет правой концевой точки в M для всех $a \in M$ и $r(y) := \operatorname{rend} R(M, y)$ является нетождественной локально монотонной функцией на M, так что $r^k(a) = a$ для некоторого $k \geq 2$ при всех $a \in M$, где $r^k(y) := r(r^{k-1}(y))$; для каждого $1 \leq i \leq s+1$ и любого $a \in M$*

$$M'_{s,m,k} \models \neg E_i^*(a, r(a)) \wedge \forall y(E_i(y, a) \to \exists u[E_i^*(u, r(a)) \wedge E_i^*(u, r(y))]),$$

$m = 1$ или k делит m, причем r имеет только одно из следующих поведений на M:

• *r монотонная вправо,*

• *r монотонная влево, $k = m = 2$,*

• *r кусочно монотонная влево, k четно, $m \geq 4$, причем r является монотонной влево на каждом E_{s+1}-классе и r является монотонной вправо на M/E_{s+1},*

• *r локально монотонно вправо (влево) ранга $\langle n+1, 1 \rangle$ для некоторого $1 \leq n \leq s$, причем существуют $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq s$ такие, что $E_j^r \equiv E_{i_j}$ для каждого $1 \leq j \leq n$, k четно, более того, если n нечетно, то $k = 2$,*

• *r локально монотонно вправо (влево) ранга $\langle n+1, m \rangle$ для некоторого $1 \leq n \leq s$, причем существуют $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n < i_{n+1} = s+1$ такие, что $E_j^r \equiv E_{i_j}$ для каждого $1 \leq j \leq n+1$, k четно, $m > 2$, n нечетно (четно).*

Доказательство. В силу $\aleph_0$-категоричности структуры M существует лишь конечное число (скажем, s) $\varnothing$-определимых нетривиальных отношений эквивалентности, разбивающих M на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Пусть $\{E_1(x, y), E_2(x, y), \ldots, E_s(x, y)\}$ — полный список таких отношений эквивалентности, причем $E_1(M, a) \subset E_2(M, a) \subset \ldots \subset E_s(M, a)$ для всех $a \in M$. Так как ранг выпуклости структуры M больше 1, то $s \geq 1$. В силу леммы 1.9 из [2] существует не более одного $\varnothing$-определимого нетривиального отношения эквивалентности, разбивающего M на конечное число бесконечных выпуклых классов. Обозначим это отношение эквивалентности (если оно существует) через E_{s+1}, и пусть E_{s+1} разбивает M на m бесконечных выпуклых классов. В силу следствия 1.2 $E_s(M, a) \subset E_{s+1}(M, a)$ для всех $a \in M$.

Поскольку существует $a \in M$ такой, что $\operatorname{dcl}(a) = \{a\}$, любая выпуклая вправо формула $G(x, y)$ не имеет правой концевой точки в M. Рассмотрим следующие формулы:

$$F_+^i(x, y) := E_i(x, y) \wedge \forall z(\neg E_i(z, y) \to K(y, x, z)), \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$F_-^i(x, y) := F_+^i(x, y) \vee [\neg E_i(x, y) \wedge \forall z(E_i(z, y) \to K(y, x, z))], \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$F_1^{s+1}(x, y) := E_{s+1}(x, y) \wedge \forall z(\neg E_{s+1}(z, y) \to K(y, x, z)),$$

$$F_i^{s+1}(x, y) := F_{i-1}^{s+1}(x, y) \vee \forall z\big(K(y, z, x) \to F_{i-1}^{s+1}(z, y) \vee E(z, x)\big), \quad 2 \leq i \leq m.$$

Очевидно, что каждая из этих формул является выпуклой вправо. Обозначим этот список формул через $(*)$.

Случай 1. Предположим что любая выпуклая вправо формула эквивалентна одной из формул списка $(*)$. Тогда M изоморфна структуре $M_{s,m} := \left\langle M, =, K, E_1^2, \dots, E_s^2, E_{s+1}^2 \right\rangle$ с точностью до бинарности. Может быть проверено, что следующий список аксиоматизирует $M_{s,m}$:

[1] M — плотный циклический порядок относительно K,

$[2]_{1\le i\le s+1}$ E_i — отношение эквивалентности и каждый E_i-класс является бесконечным и выпуклым без концевых точек,

[3] $\exists x_1, \dots, \exists x_m \left[\bigwedge_{i\neq j} \neg E_{s+1}(x_i, x_j) \wedge \forall t \bigvee_{i=1}^{m} E_{s+1}(t, x_i) \right]$,

$[4]_{1\le i\le s}$ каждый E_{i+1}-класс разбивается на бесконечное число E_i-под-клас–сов, так что индуцированный порядок на E_i-подклассах является плотным без концевых точек.

Случай 2. Предположим, что существует выпуклая вправо формула $R(x, y)$, не являющаяся эквивалентной ни одной из формул списка $(*)$. В силу леммы 4.3 из [2] $r(y) := \operatorname{rend} R(M, y)$ не может быть константой. Если r — кусочно константа (не константа), то $R(x, y) \equiv F_i^{s+1}(x, y)$ для некоторого $1 \le i \le m$. Если r — локально константа (не кусочно константа), то $R(x, y) \equiv F_+^i(x, y)$ или $R(x, y) \equiv F_-^i(x, y)$ для некоторого $1 \le i \le s$. Следовательно, r является нетождественной локально монотонной функцией. В силу $\aleph_0$-категоричности существует только конечное число нетождественных локально монотонных функций. Не умаляя общности, предположим, что r — минимальная нетождественная локально монотонная функция. В силу теоремы 2.18 r имеет только одно из следующих поведений на M:

(1) r монотонная вправо;

(2) r монотонная влево;

(3) r кусочно монотонная влево; (4) r локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, 1\rangle$, где $n > 1$;

(5) r локально монотонная вправо (влево) ранга $\langle n, m\rangle$, где $n > 1$, $m > 2$, n четно (нечетно).

В силу лемм 2.5 и 2.11 для каждого $1 \le i \le s+1$ и для всех $a \in M$ имеем

$$M \models \neg E_i^*(a, r(a)) \wedge \forall y (E_i(y, a) \to \exists u [E_i^*(u, r(a)) \wedge E_i^*(u, r(y))]).$$

Таким образом, аксиомами структуры $M'_{s,m,k}$ являются аксиомы [1]–[4] структуры $M_{s,m}$, а также следующие аксиомы:

[5] $R(x, y)$ является выпуклой вправо формулой и $\forall y R(M, y)$ не имеет правой концевой точки в M,

$[6]_{1\le i\le s+1}$ $\forall x[\neg E_i^*(x, r(x)) \wedge \forall y (E_i(y, x) \to \exists u [E_i^*(u, r(x)) \wedge E_i^*(u, r(y))])]$.

Доказательство случаев (1)–(3) повторяет доказательство теоремы 4.5 из [2] с незначительными изменениями. Доказательство случаев (4), (5) аналогично доказательству случаев (4), (5) в теореме 3.3.

Если r монотонная влево, то следующие аксиомы завершают список аксиом структуры $M'_{s,m,k}$:

[7] $\forall x \forall y \forall z [K_0(x, y, z) \to K_0(r(z), r(y), r(x))]$, т. е. r является монотонной влево на M,

[8] $\forall x [r^2(x) = x] \wedge \forall x \exists y [R(y, x) \wedge R(x, y)]$,

[9] $\forall x \forall y [E_{s+1}(x, y) \leftrightarrow R'(x, y) \vee R'(y, x)]$, где $R'(x, y) := R(x, y) \wedge \forall t (R(t, x) \to R(t, y))$.

Если r не является монотонной влево, то к списку аксиом добавляются следующие:

[7] $\forall x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_{k+1} \left[K_0(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} R(x_{i+1}, x_i) \wedge R(x_1, x_{k+1}) \right] \wedge$
$\forall y_2 \ldots \forall y_k \left(K_0(x_1, y_2, \ldots, y_k) \wedge \bigwedge_{i=2}^{k-1} R(y_{i+1}, y_i) \wedge R(y_2, x_1) \to \neg R(x_1, y_k) \right) \wedge r^k(x_1) =$
x_1,

$[8]_{m\neq 1}$ $\forall x \exists x_1, \ldots, \exists x_l \left[\bigwedge_{i\neq j} \neg E_{s+1}(x_i, x_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} \{\neg E_{s+1}(x_i, x) \wedge \neg E^*_{s+1}(x_i, r(x))\} \wedge \right.$
$\left. K_0(x, x_1, \ldots, x_l, r(x)) \wedge \forall t \left(K(x, t, r(x)) \to \bigvee_{i=1}^{l} E_{s+1}(x_i, t) \vee E_{s+1}(x, t) \vee E^*_{s+1}(t, r(x)) \right) \right]$,
где $l = m/k - 1$.

Следующие аксиомы завершают список аксиом структуры $M'_{s,m,k}$ в зависимости от поведения функции r.

Если r монотонная вправо, то соответствующая аксиома [9] из доказательства теоремы 3.3. Если r кусочно монотонная влево, то соответствующие аксиомы [9] и [10] из доказательства теоремы 3.3. Если r локально монотонная вправо ранга $\langle n+1, m_1 \rangle$ (случай локально монотонной влево функции рассматривается аналогично), то соответствующие аксиомы [9], $[10]^+_{2\leq j\leq n_1}$ (j четно), $[10]^-_{2\leq j\leq n_1}$ (j нечетно), $[11]^+_{m_1=1}$ (n четно), $[11]^-_{m_1=1}$ (n нечетно), $[11]_{m_1\neq 1}$ из доказательства теоремы 3.3. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kulpeshov B. Sh., Macpherson H. D.* Minimality conditions on circularly ordered structures // Math. Logic Quart. 2005. V. 51, N 4. P. 377–399.
2. *Kulpeshov B. Sh.* On $\aleph_0$-categorical weakly circularly minimal structures // Math. Logic Quart. 2006. V. 52, N 6. P. 555–574.

Статья поступила 6 сентября 2007 г.

Кулпешов Бейбут Шайыкович
Институт проблем информатики и управления,
ул. Пушкина, 125, Алматы 050010, Казахстан
`kbsh@ipic.kz, kulpesh@mail.ru`