Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 512.5

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ С ЭЛЕМЕНТАМИ МАЛЫХ ПОРЯДКОВ

В. Д. Мазуров, А. С. Мамонтов

Аннотация. Доказывается локальная конечность группы, множество порядков элементов которой равно $\{1, 2, 3, 5, 6\}$.

Ключевые слова: периодическая группа, локально конечная группа, спектр.

1. Введение

Пусть G — периодическая группа. Через $\omega(G)$ обозначим спектр G, т. е. множество порядков ее элементов. Очевидно, что спектр группы конечен тогда и только тогда, когда конечен ее период. Поэтому группа с конечным спектром не обязана быть локально конечной [1]. В частности, для любого $n \geq 8000$ существует не локально конечная группа периода n [1, 2]. С другой стороны, существуют примеры спектров, обеспечивающие локальную конечность соответствующей группы. Так, если $\omega(G) = \{1, 2\}$, то G элементарная абелева. В [3] описаны группы, удовлетворяющие условию $\omega(G) = \{1, 2, 3\}$. В [4] доказана локальная конечность группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4, а в [5] — групп периода 6. В [6] описано строение группы G с $\omega(G) = \{1, 2, 5\}$. В [7] доказано, что если $\omega(G)$ — собственное подмножество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, то G либо локально конечна, либо содержит нильпотентную нормальную подгруппу N такую, что G/N является 5-группой. Из [8] следует локальная конечность такой группы G, за исключением случая $\omega(G) = \{1, 5\}$. В [9] доказана локальная конечность группы G и в случае, когда $\omega(G)$ равно $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

В настоящей работе доказывается локальная конечность группы G, для которой $\omega(G) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$.

Теорема. *Пусть G — группа, для которой $\omega(G) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Тогда G — разрешимая локально конечная группа и справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *G — расширение элементарной абелевой 5-группы посредством циклической группы порядка 6;*

(2) *G — расширение трехступенно нильпотентной 3-группы посредством группы диэдра порядка 10;*

(3) *G — расширение прямого произведения трехступенно нильпотентной 3-группы и элементарной абелевой 2-группы посредством группы порядка 5.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00322), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–344.2008.1) и АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/419).

2. Обозначения и предварительные результаты

Для простого числа p через $O_p(G)$ обозначим произведение всех нормальных p-подгрупп из G. Через $O_{p,q}(G)$ будем обозначать полный прообраз в G группы $O_q(G/O_p(G))$.

Лемма 1. *Пусть G — конечная неразрешимая группа, для которой $\omega(G) \subseteq \{1,2,3,5,6\}$. Тогда $\omega(G) = \{1,2,3,5\}$ и G изоморфна A_5.*

Доказательство. Пусть G — минимальный контрпример. Поскольку бипримарные группы разрешимы, период G равен 30 и поэтому A_5 является единственным неабелевым композиционным фактором G [10]. Так как $\mathrm{Aut}(A_5) \simeq S_5$ и $4 \in \omega(S_5)$, то $G/N \simeq A_5$, где N — элементарная абелева p-группа, на которой G/N действует неприводимо.

Поскольку в G/N нет элементов порядка 10 и G/N проста, G действует точно на N. Так как силовская 2-подгруппа группы G элементарная абелева, то $p \neq 2$.

Если $p = 5$, то любой элемент порядка 2 из G инвертирует N и, следовательно, силовская 2-подгруппа из G является циклической, что неверно. Поэтому $p = 3$ и полный прообраз группы A_4 из $A_5 = G/N$ является группой 3-длины 2, что противоречит теореме Холла — Хигмана [11].

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — локально конечная группа, для которой $\omega(G) = \{1,2,3,5,6\}$. Тогда G удовлетворяет заключению теоремы.*

Доказательство. Пусть вначале G — конечная группа. По лемме 1 она разрешима.

Если $O_5(G) \neq 1$, то холлова $\{2,3\}$-подгруппа H из G является дополнением в группе Фробениуса $O_5(G)H$ и поэтому H — циклическая группа порядка 6. Очевидно, $N_G(H) = C_G(H) = H$. По замечанию Фраттини $G = O_5(G)N_G(H) = O_5(G)H$, и выполнен п. (1) теоремы.

Пусть $O_5(G) = 1$. Тогда силовская 5-подгруппа H из G является дополнением в группе Фробениуса $O_{5'}(G)H$ и поэтому будет циклической группой порядка 5. Далее, $C_G(H) = 1$, и, следовательно, $N_G(H)/H$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов H. Отсюда следует, что $N_G(H) = H$ или $N_G(H) = D$, где D — группа диэдра порядка 10. По теореме Томпсона [12, теорема 6.24] $O_{5'}(G)$ — нильпотентная группа. Ее силовская 2-подгруппа элементарная абелева, а силовская 3-подгруппа как группа периода 3 трехступенно нильпотентна. Если $N_G(H) = H$, то по замечанию Фраттини выполнен п. (3) теоремы. Если же $N_G(H)$ порядка 10, то, поскольку силовская 2-подгруппа из G элементарна, силовская 2-подгруппа в $O_{5'}(G)$ тривиальна, и выполнен п. (2) теоремы.

Пусть теперь G бесконечна. Если x и y — элементы порядков 5 и 6 из G, то $H = \langle x, y\rangle$ — конечная группа, для которой выполнен один из пп. (1)–(3).

Пусть выполнен п. (1) и $H = PC$, где P — элементарная абелева 5-группа, нормальная в H, а C — циклическая группа порядка 6. Покажем, что $G = C_G(P)C$ и $C_G(P)$ — элементарная абелева p-группа. Действительно, если $x \in G$, то $X = \langle H, x\rangle$ — конечная группа, для которой выполняется п. (1) теоремы. Ясно, что $X = O_5(X)C$, где $P \leq O_5(X) \leq C_G(P)$. Тем самым $x \in C_G(P)C$. Если $a, b \in C_G(P)$, то подгруппа $\langle a, b, C\rangle$ удовлетворяет п. (1), поэтому a и b перестановочны.

Пусть для H выполнен п. (3). Аналогично предыдущему доказывается, что все элементы порядка 2 и 3 из G порождают $\{2,3\}$-подгруппу, любой 2-элемент из G перестановочен с любым ее 3-элементом и $G = O_{5'}(G)P$, где P — группа порядка 5.

Аналогично если $H = O_3(H)D$, где D — группа диэдра порядка 10, то все элементы порядка 3 из G порождают трехступенно нильпотентную 3-подгруппу $O_3(G)$ и $G = O_3(G)D$.

Лемма доказана.

Следующая лемма легко проверяется с помощью алгоритма перечисления смежных классов [13].

Лемма 3. *Пусть $\omega(G) = \{1,2,3,5,6\}$ и G порождается элементом x порядка 3 и инволюцией z. Тогда G конечна. Более точно, выполнено одно из следующих утверждений.*

1. *Если $(xz)^6 = [x,z]^6 = 1$, то $|G|$ делит 216 и $|[G,G]|$ делит 36.*
2. *Если $(xz)^6 = [x,z]^5 = 1$, то $|G|$ делит 150 и $|[G,G]|$ делит 25.*
3. *Если $(xz)^5 = 1$, то $G \simeq A_5$ или $G = 1$.*

Лемма 4. *Пусть $\omega(G) \subseteq \{1,2,3,5,6\}$ и G порождается тремя инволюциями a, b и c такими, что $(ab)^5 = 1$ и $[a,c] = 1$. Тогда либо $|G| \leq 10$, либо $(bc)^5 = (abc)^3 = 1$ и $G \cong A_5$, либо $(bc)^3 = (abc)^5 = 1$ и $G \cong A_5$.*

Доказательство. 1. Если $(bc)^5 = 1$, то G является гомоморфным образом одной из следующих групп:

$$G(i_1) = \langle a,b,c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^5 = (bc)^5 = (ac)^2 = (abc)^5 = (a^b b^c a)^{i_1} = 1\rangle$$

или

$$\begin{aligned} G(i_2,i_3,i_4) = \langle a,b,c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^5 = (bc)^5 = (ac)^2 \\ = (abc)^6 = (ac^b)^{i_2} = ((ab)^2c)^{i_3} = ((ab)^2 b^c abc)^{i_4} = 1\rangle, \end{aligned}$$

где $i_1,i_2,i_3,i_4 \in \{5,6\}$. Пользуясь алгоритмом перечисления смежных классов, получим, что все эти группы конечны и удовлетворяют заключению леммы.

2. Если $(bc)^6 = 1$, то G является гомоморфным образом одной из следующих групп:

$$\begin{aligned} G(i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6) = \langle a,b,c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^5 = (bc)^6 = (ac)^2 = (abc)^{i_1} \\ = (ac^b)^{i_2} = (abcab)^{i_3} = (a(bc)^2)^{i_4} = (a(bc)^2ab)^{i_5} = ((ab)^2(cb)^2c)^{i_6} = 1\rangle, \end{aligned}$$

где $i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6 \in \{5,6\}$. Пользуясь алгоритмом перечисления смежных классов, получим, что все эти группы конечны и удовлетворяют заключению леммы.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\omega(G) \subseteq \{1,2,3,5,6\}$, G порождается двумя элементами x и z порядка 3 и $|G| > 10$. Пусть $[x,z]^5 = 1$. Тогда либо $[x,z] = 1$, либо $|G| = 75$ и порождающие можно выбрать так, что $(xz)^3 = (xzx)^5 = 1$.*

Доказательство. Группа G является гомоморфным образом одной из следующих групп: $G(i,j,k,l,m) = \langle x,z \mid x^3 = z^3 = [x,z]^5 = (xz)^i = (xzx)^j = (xzxzx)^k = (xz^{-1}xz)^l = (xz^2xzx^2zx)^m = 1\rangle$, где $i,j,k,l,m \in \{5,6\}$. Перебирая все возможные варианты и вычисляя порядок группы с помощью алгоритма перечисления смежных классов, получим требуемое.

Лемма доказана.

3. Разрешимость конечных подгрупп

Пусть G — группа, для которой $\omega(G) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Цель этого пункта — показать, что в G все конечные подгруппы разрешимы. Предположим противное. Пусть H — неразрешимая конечная подгруппа из G. По лемме 1 $H \cong A_5$.

Выберем элементы x и y из H такие, что $x^3 = y^2 = (xy)^5 = 1$. Тогда $\langle x, y\rangle = H$ и отображение $x \to (123)$, $y \to (15)(24)$ продолжается до изоморфизма на A_5. Пусть $a = y^{y^x}$. Тогда $(xa)^3 = 1$, $\langle x, a\rangle \simeq A_4$ и $V = \langle a, a^x\rangle$ — силовская 2-подгруппа в $\langle x, a\rangle$.

Лемма 6. *V — силовская 2-подгруппа в G.*

Доказательство. Поскольку $C(V)$ — группа периода 6, она локально конечна [5]. Поэтому $C(V)\langle x\rangle$ — локально конечная группа. Предположим V не является силовской 2-подгруппой в G. Тогда существует инволюция $z \in C(V)\backslash V$ такая, что либо $xz = zx$, либо $(zx)^3 = 1$. Дальнейшая стратегия состоит в доказательстве конечности группы $\langle x, y, z\rangle$ с учетом полученных соотношений. Разберем все возможные случаи.

1. Пусть $(xz)^3 = (yz)^5 = 1$. Тогда по лемме 4 $(ayz)^3 = 1$. Группа $\langle x, y, z\rangle$ является гомоморфным образом одной из групп

$$G(i,j) = \langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \mid \bar{x}^3 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = (\bar{x}\bar{y})^5 = (\bar{z}\bar{a})^2 = (\bar{z}\bar{a}^{\bar{x}})^2$$
$$= (\bar{x}\bar{z})^3 = (\bar{y}\bar{z})^5 = (\bar{a}\bar{y}\bar{z})^3 = (\bar{x}\bar{y}\bar{z})^i = (\bar{x}\bar{y}\bar{x}\bar{z})^j = 1\rangle,$$

где $i, j \in \{5, 6\}$ и $\bar{a} = \bar{y}^{\bar{y}^{\bar{x}}}$. Вычисления с помощью алгоритма перечисления смежных классов показывают, что $G(5, 6) \simeq A_5$ и группа $G(i, j)$ тривиальна во всех остальных случаях.

2. Пусть $(xz)^3 = (yz)^6 = 1$. Тогда по лемме 4 $(yz)^3 = (ayz)^5 = 1$.

Группа $\langle x, y, z\rangle$ является гомоморфным образом одной из групп

$$G(i,j) = \langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \mid \bar{x}^3 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = (\bar{x}\bar{y})^5 = (\bar{z}\bar{a})^2 = (\bar{z}\bar{a}^{\bar{x}})^2$$
$$= (\bar{x}\bar{z})^3 = (\bar{y}\bar{z})^3 = (\bar{a}\bar{y}\bar{z})^5 = (\bar{x}\bar{y}\bar{z})^i = (\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{x})^j = 1\rangle,$$

где $i, j \in \{5, 6\}$ и $\bar{a} = \bar{y}^{\bar{y}^{\bar{x}}}$. Вычисления с помощью алгоритма перечисления смежных классов показывают, что $G(6, 6) \simeq A_5$ и группа $G(i, j)$ тривиальна во всех остальных случаях.

3. Пусть $xz = zx$. Группа $\langle x, y, z\rangle$ является гомоморфным образом одной из групп

$$G(i,j,k) = \langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \mid \bar{x}^3 = \bar{y}^2 = \bar{z}^2 = (\bar{x}\bar{y})^5 = (\bar{z}\bar{a})^2$$
$$= (\bar{z}\bar{a}^{\bar{x}})^2 = [\bar{x}, \bar{z}] = (\bar{y}\bar{z})^i = (\bar{x}\bar{y}\bar{z})^j = (\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{y})^k = 1\rangle,$$

где $i, j, k \in \{5, 6\}$ и $\bar{a} = \bar{y}^{\bar{y}^{\bar{x}}}$. Вычисления с помощью алгоритма перечисления смежных классов показывают, что $G(6, 5, 6) \simeq A_5$ и группа $G(i, j, k)$ тривиальна (точнее, $|G| \leq 2$) во всех остальных случаях.

Лемма доказана.

Лемма 7. *$C(V) = V$.*

Доказательство. По лемме 6 $C(V) = V \times R$, где R — 3-подгруппа.

Если $a \in V$, $u \in R$, то $a^{x^{-1}} \in V$ и $(a^{x^{-1}})^u = a^{x^{-1}}$, поэтому $a^{u^x} = ((a^{x^{-1}})^u)^x = a$, т. е. x нормализует R. Тогда $R\langle x\rangle$ является 3-группой.

Предположим, что заключение леммы неверно. Тогда найдется элемент $z \in C(V)\backslash V$ такой, что $z^3 = 1$ и $[x, z] = 1$.

Группа $\langle x, y, z\rangle$ является гомоморфным образом одной из следующих групп:

$$G(i,j) = \langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \mid \bar{x}^3 = \bar{y}^2 = \bar{z}^3 = (\bar{z}\bar{a})^2 = (\bar{z}\bar{a}^{\bar{x}})^2 = (\bar{x}\bar{y})^5 \\ = [\bar{x}, \bar{z}] = (\bar{z}\bar{y})^i = [\bar{y}, \bar{z}]^j = 1\rangle,$$

где $i, j \in \{5, 6\}$ и $\bar{a} = \bar{y}^{\bar{y}^{\bar{x}}}$. Используя алгоритм перечисления смежных классов, получаем $G(6, 6) \simeq G(6, 5) \simeq A_5$ и $G(5, 6) \simeq G(5, 5) \simeq 1$. Но в A_5 силовская 2-подгруппа совпадает со своим централизатором.

Лемма доказана.

Лемма 8. *$C_G(a) = RV$, где R — абелева 3-группа, инвертируемая инволюцией b.*

Доказательство. Пусть $\overline{C} = C_G(a)/\langle a\rangle$. По лемме 7 $\omega(\overline{C}) \subseteq \{1, 2, 3\}$, и по [3] $\overline{C}$ локально конечна. Поэтому $C_G(a)$ — локально конечная группа. Пусть r и s — 3-элементы из $C_G(a)$. Тогда $X = \langle r, s, V\rangle$ — конечная группа, в которой V — силовская 2-подгруппа, а $X/\langle a\rangle$ — конечная группа, в которой индекс силовской 3-подгруппы равен 2. Тем самым $X/\langle a\rangle = \overline{R}_0\langle\bar{b}\rangle$, где $\bar{b}$ — инволюция, инвертирующая $\overline{R}_0$. Очевидно, что полный прообраз R_0 — прямое произведение $\langle a\rangle$ и абелевой 3-группы. Поэтому $rs = sr$.

Лемма доказана.

Лемма 9. $R = 1$.

Пусть $y \in R$, $y \neq 1$. Группа $\langle a, x, y\rangle$ является гомоморфным образом одной из групп

$$G(l, m) = \langle \bar{a}, \bar{x}, \bar{y} \mid \bar{a}^2 = \bar{x}^3 = \bar{y}^3 = (\bar{x}\bar{a})^3 = (\bar{a}^{\bar{x}}\bar{y})^2 = [\bar{a}, \bar{y}] = (\bar{x}\bar{y})^l = (\bar{a}\bar{x}\bar{y})^m\rangle,$$

где $l, m \in \{5, 6\}$. С помощью алгоритма перечисления смежных классов вычисляем порядки групп: $|G(6, 6)| = 12$, $|G(6, 5)| = |G(5, 6)| = |G(5, 5)| = 1$. Во всех группах $G(l, m)$ выполнено соотношение $\bar{y} = 1$. Поэтому $R = 1$.

Лемма доказана.

Теперь $C_G(a) = V$ — конечная подгруппа. По теореме Шункова [14] группа G локально конечна. По лемме 2 группа G разрешима и, следовательно, в ней нет неразрешимых подгрупп.

4. Разрешимый случай

Поскольку в G нет разрешимых подгрупп, по лемме 3 порядок произведения любой инволюции и элемента порядка 3 из G делит 6. Следующие три леммы доказываются в предположении, что в G есть две инволюции a и b, произведение которых имеет порядок 5.

Лемма 10. *Подгруппа $\langle a\rangle$ является силовской 2-подгруппой в G, а произведение любых двух инволюций — элемент нечетного порядка.*

Доказательство. Пусть c — инволюция и $ac = ca$. Тогда $\langle a, b, c\rangle$ — гомоморфный образ одной из групп

$$G(l, m, n) = \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \mid \bar{a}^2 = \bar{b}^2 = \bar{c}^2 = (\bar{a}\bar{b})^5 \\ = (\bar{a}\bar{c})^2 = (\bar{b}\bar{c})^l = (\bar{a}\bar{b}\bar{c})^m = ((\bar{a}\bar{b})^2\bar{c})^n = 1\rangle.$$

Вычисления с помощью алгоритма перечисления смежных классов показывают, что $|G(6,6,6)| = 69120$, $|G(6,6,5)| = 1320$, $|G(6,5,6)| = 1920$, $|G(6,5,5)| = |G(5,6,6)| = 10$, $|G(5,6,5)| = 960$, $|G(5,5,6)| = 660$, $|G(5,5,5)| = 1$.

Теперь результат вытекает из леммы 2.

Введем следующие обозначения: R — подгруппа в G, порожденная всеми инволюциями; R^+ — множество элементов из R нечетного порядка; R^- — множество элементов из R четного порядка.

Лемма 11. *Для любой инволюции y имеем $xy \in R^-$, если $x \in R^+$, и $xy \in R^+$, если $x \in R^-$. При этом любой элемент порядка 5 из R^+ равен произведению двух инволюций.*

Доказательство. *Инволюционной длиной элемента* r из R будем называть наименьшее число n такое, что r можно представить в виде произведения n инволюций.

Пусть x — элемент из R наименьшей инволюционной длины, для которого утверждение леммы неверно. Ясно, что эта длина не меньше 2. Разберем все возможные случаи.

1. Пусть $|x| = 3$. Если $|xy| = 3$, то $\langle x, y\rangle \simeq A_4$ и $\langle y\rangle$ не является силовской 2-подгруппой. Если $|xy| = 5$, то $\langle x, y\rangle \simeq A_5$, что уже исключено.

2. Пусть $x \in R^-$. Тогда $x^6 = 1$ и $|xy| = 6$. По лемме 10 попарные произведения инволюций x^3, y, y^x, $(xy)^3$ — элементы нечетного порядка. Поэтому группа $\langle x, y\rangle$ является гомоморфным образом одной из следующих групп:

$$\begin{aligned} G(l_1,l_2,l_3) = \langle \bar{x}, \bar{y} \mid \bar{x}^6 = \bar{y}^2 = (\bar{x}\bar{y})^6 = (\bar{x}^2\bar{y})^6 \\ = ((\bar{x}\bar{y})^2\bar{y}^3)^6 = (\bar{x}^3\bar{y})^{l_1} = (\bar{x}^3(\bar{x}\bar{y})^3)^{l_2} = (\bar{y}^{\bar{x}}\bar{y})^{l_3} = 1\rangle, \end{aligned}$$

где $l_1, l_2, l_3 \in \{3, 5\}$. Пользуясь алгоритмом перечисления смежных классов, заметим, что индекс подгруппы $\langle \bar{x}^2, \bar{y}\rangle$ в группе $G(l_1, l_2, l_3)$ равен 1.

3. Пусть $|x| = 5$. Тогда существует y такой, что $|xy|$ нечетен.

Поскольку группа

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \mid \bar{x}^5 = \bar{y}^2 = (\bar{x}\bar{y})^3 = 1\rangle$$

изоморфна A_5, можно считать, что $(xy)^5 = 1$.

Предположим, что x не является произведением двух инволюций. Тогда $x = y_1 \dots y_{2r}$, где $r > 1$, $y_1, \dots, y_{2r}$ — инволюции. Положим $z = y_1 \dots y_{2r-1}$. Инволюционная длина z меньше длины x и нечетна, поэтому $z^6 = 1$. Группа $\langle z, y_{2r}\rangle$ является гомоморфным образом одной из конечных групп

$$G(l_1, l_2) = \langle \bar{x}, \bar{y} \mid \bar{x}^6 = \bar{y}^2 = (\bar{x}\bar{y})^5 = (\bar{x}^2\bar{y})^6 = ((\bar{x}\bar{y})^2\bar{x}^3)^6 = (\bar{y}^{\bar{x}^2}\bar{y})^{l_1} = (\bar{x}^3\bar{y})^{l_2} = 1\rangle,$$

где $l_1, l_2 \in \{5, 6\}$. Непосредственная проверка показывает, что в этих группах любой элемент порядка 5 представим в виде произведения двух инволюций. Таким образом, существуют инволюции a и b такие, что $x = ab$. Положим $c = y$.

Группа $\langle a, b, c\rangle$ является гомоморфным образом одной из следующих групп:

$$\begin{aligned} G(l_1,l_2,l_3,l_4) = \langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \mid \bar{a}^2 = \bar{b}^2 = \bar{c}^2 = (\bar{a}\bar{b})^5 = (\bar{a}\bar{c})^5 \\ = (\bar{b}\bar{c})^5 = (\bar{a}\bar{b}\bar{c})^5 = (\bar{a}^{\bar{b}}\bar{c})^{l_1} = (\bar{a}^{\bar{c}}\bar{b})^{l_2} = (\bar{a}^{\bar{b}\bar{c}}\bar{b})^{l_3} = (\bar{b}^{\bar{a}}\bar{c})^{l_4} = 1\rangle, \end{aligned}$$

где $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \{3, 5\}$. Пользуясь алгоритмом перечисления смежных классов, заметим, что если все l_i одновременно не равны 5, то $|G(l_1, l_2, l_3, l_4) : \langle \bar a, \bar b\rangle| = 1$. Индекс подгруппы $\langle \bar a, \bar b\rangle$ в группе

$$G(5,5,5,5,l_5) = \langle \bar a, \bar b, \bar c \mid \bar a^2 = \bar b^2 = \bar c^2 = (\bar a\bar b)^5 = (\bar a\bar c)^5 = (\bar b\bar c)^5 = (\bar a\bar b\bar c)^5$$
$$= (\bar a^{\bar b}\bar c)^5 = (\bar a^{\bar c}\bar b)^5 = (\bar a^{\bar b\bar c}\bar b)^5 = (\bar b^{\bar a}\bar c)^5 = (\bar a\bar b(\bar a\bar b\bar c)^2\bar a\bar c)^{l_5} = 1\rangle$$

также равен 1 при $l_5 \in \{5, 6\}$. Таким образом, в этом случае вновь получаем противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 12. *R^+ — подгруппа индекса 2 в R, и группа G локально конечна.*

Доказательство. Из леммы 11 следует, что элемент a из R лежит в R^+ в том и только в том случае, когда он является произведением четного числа инволюций. Поэтому R^+ — подгруппа в R.

Для любых инволюций i и j из R по лемме 10 $R^+i = R^+j$. Если $a \in R^-$, то $a = a_1 \dots a_{2k+1}$, где $a_1, \dots, a_{2k+1}$ — инволюции. Тогда $a_1 \dots a_{2k} \in R^+$ и $R^+a = R^+a_{2k+1}$. Поэтому R^+ — подгруппа индекса 2.

Поскольку $\omega(R^+) = \{1, 3, 5\}$, локальная конечность группы G следует из [7, 8].

Лемма доказана.

Пусть теперь в группе G порядок произведения любых двух инволюций делит 6.

Если $5 \notin \omega(R)$, то по [5] группа R, а следовательно, и G локально конечны.

Пусть $s = i_1 \dots i_k$ — элемент порядка 5 из R, где $i_1, \dots, i_k$ — инволюции и k — наименьшее с таким свойством. Тогда для $x = i_1 \dots i_{k-1}$ и $y = i_k$ выполняются следующие соотношения: $x^6 = 1$, $y^2 = 1$ и $(xy)^5 = 1$. Группа $\langle x, y\rangle$ является гомоморфным образом одной из групп

$$G(l_1, l_2) = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = c^a c^{-1} = (ab)^6 = (bc)^6 = (b^c b)^6 = (abc)^5$$
$$= ((ab)^3 c)^6 = (((ab)^3)^c (ab)^3)^6 = (abcb)^6 = (ab(cb)^2)^{l_1} = ((ab)^2 c)^{l_2} = 1\rangle,$$

где $l_1, l_2 \in \{5, 6\}$. Пользуясь алгоритмом перечисления смежных классов, заметим, что для любых $l_1, l_2 \in \{5, 6\}$ порядок группы $|G(l_1, l_2)|$ делит 2.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков П. С., Адян С. И.* О бесконечных периодических группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. I: № 1. С. 212–244. II: № 2. С. 251–524. III: № 3. С. 709–731.
2. *Лысёнок И. Г.* Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. мат. 1996. Т. 60, № 1. С. 3–224.
3. *Neumann B. H.* Groups whose elements have bounded orders // J. London Math. Soc. 1937. V. 12. P. 195–198.
4. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. Ленингр. гос. ун-та. Сер. мат. 1940. Т. 10. С. 166–170.
5. *Hall M. Jr.* Solution of the Burnside problem for exponent six // Ill. J. Math. 1958. V. 2, N 3. P. 764–786.
6. *Newman M. F.* Groups of exponent dividing seventy // Math. Sci. 1979. V. 4, N 2. P. 149–157.
7. *Gupta N. D., Mazurov V. D.* On groups with small orders of elements // Bull. Aust. Math. Soc. 1999. V. 60, N 5. P. 197–205.
8. *Jabara E.* Fixed point free action of groups of exponent 5 // J. Austral. Math. Soc. 2004. V. 77, N 3. P. 297–304.

9. *Мазуров В. Д.* О группах периода 60 с заданными порядками элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 329–346.

10. *Мазуров В. Д.* Ослабленная проблема Бернсайда для показателя 30 // Алгебра и логика. 1969. Т. 8, № 4. С. 460–477.

11. *Hall P., Higman G.* On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 7, N 1. P. 1–42.

12. *Isaacs I. M.* Finite group theory. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008.

13. *Groups, algorithms and programming.* Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, 1994. At http://www.gap-system.org/.

14. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.

Статья поступила 16 января 2009 г.

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`mazurov@math.nsc.ru`

Мамонтов Андрей Сергеевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`andreysmamontov@yahoo.com`