Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 517.984

ОБРАТНЫЕ УЗЛОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ НА ЗВЕЗДООБРАЗНОМ ГРАФЕ

В. А. Юрко

Аннотация. Исследуются обратные узловые задачи для дифференциальных операторов второго порядка на звездообразном графе со стандартными условиями склейки во внутренней вершине. Доказаны теоремы единственности и получено конструктивное решение для этого класса обратных задач.

Ключевые слова: оператор Штурма — Лиувилля, звездообразный граф, обратная узловая задача.

1. Введение

Рассмотрим компактный звездообразный граф T в $\mathbf{R}^m$ с множеством вершин $V = \{v_0, \dots, v_r\}$ и множеством ребер $\mathscr{E} = \{e_1, \dots, e_r\}$, где $v_1, \dots, v_r$ — граничные вершины, v_0 — внутренняя вершина и $e_i = [v_i, v_0]$, $i = \overline{1, r}$. Не нарушая общности, считаем, что длина каждого ребра равна 1. Каждое ребро $e_i \in \mathscr{E}$ параметризуем параметром $x \in [0, 1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию: $x = 0$ соответствует граничным вершинам $v_1, \dots, v_r$, а $x = 1$ — внутренней вершине v_0.

Интегрируемая функция Y на T может быть представлена в виде $Y(x) = \{y_i(x)\}_{i=\overline{1,r}}$, $x \in [0, 1]$, где функция $y_i(x)$ определена на ребре e_i. Пусть $q(x) = \{q_i(x)\}_{i=\overline{1,r}}$ — интегрируемая вещественнозначная функция на T; q называется *потенциалом.* Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение на T:

$$-y_i''(x) + q_i(x) y_i(x) = \lambda y_i(x), \quad i = \overline{1, r}, \tag{1}$$

где λ — спектральный параметр, функции $y_i(x)$, $y_i'(x)$, $i = \overline{1, r}$, абсолютно непрерывны на $[0, 1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки во внутренней вершине v_0:

$$y_i(1) = y_j(1),\ i, j = \overline{1, r}, \quad \sum_{i=1}^{r} y_i'(1) = 0. \tag{2}$$

Условия склейки (2) называются *стандартными условиями* или *условиями Кирхгофа.* В электрических сетях (2) выражает закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей — баланс напряжений и т. д.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного совета Тайваня (коды проектов 07–01–00003 и 07–01–92000–ННС–а).

Рассмотрим краевую задачу на T для уравнения (1) с условиями склейки (2) и со следующими краевыми условиями в граничных вершинах $v_1, \dots, v_r$:

$$y_i'(0) - h_i y_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, r}, \tag{3}$$

где h_i — вещественные числа. Эту задачу обозначим через $B = B(q, h)$, где $h = \{h_i\}_{i=\overline{1,r}}$.

В статье исследуются обратные узловые задачи для краевой задачи B, которые заключаются в восстановлении операторов по заданным узлам (нулям) собственных функций. Такие задачи связаны с некоторыми вопросами в механике и математической физике (см., например, [1]). Кроме того, существуют тесные связи этой области с обратными спектральными задачами. Обратные узловые задачи для операторов Штурма — Лиувилля на *интервале* достаточно подробно изучены в [1–3]. Основные результаты по обратным спектральным задачам на интервале представлены в монографиях [4–6].

Дифференциальные операторы на графах (сетях, деревьях) часто возникают в естествознании и технике (см. [7] и библиографию в ней). В частности, обратные спектральные задачи на графах исследовались в [8–10] и других работах. Обратные узловые задачи для дифференциальных операторов *на графах* еще не изучались.

В данной статье даются постановки и решения обратных узловых задач для операторов Штурма — Лиувилля на звездообразном графе со стандартными условиями склейки во внутренней вершине. Получены соответствующие теоремы единственности, а также конструктивная процедура для решения. Показаны также связи этих задач с обратными спектральными задачами на графах. В частности, в п. 2 изучается обратная узловая задача восстановления потенциала по любому плотному подмножеству узловых точек краевой задачи B. Доказана теорема единственности и дано конструктивное решение задачи. В п. 3 исследуются так называемые неполные обратные задачи восстановления потенциала на фиксированном ребре по подмножеству узловых точек, расположенных только на части ребра. Основные результаты этого пункта содержатся в теореме 4. Для доказательства этой теоремы используются выявленные связи с обратными спектральными задачами, в частности, результаты по неполной обратной спектральной задаче (см. теорему 3) восстановления потенциала на части ребра по части спектра краевой задачи B.

2. Обратные узловые задачи. Пусть $\varphi_i(x, \lambda)$, $i = \overline{1, r}$, — решения уравнения (1) на ребре e_i с начальными условиями $\varphi_i(0, \lambda) = 1$, $\varphi_i'(0, \lambda) = h_i$. При каждом фиксированном $x \in [0, 1]$ функции $\varphi_i^{(\nu)}(x, \lambda)$, $i = \overline{1, r}$, $\nu = 0, 1$, являются целыми по λ порядка 1/2. Кроме того, функция $\varphi_i(x, \lambda)$ — единственное решение интегрального уравнения

$$\varphi_i(x, \lambda) = \cos \rho x + h_i \frac{\sin \rho x}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin \rho (x - t)}{\rho} q_i(t) \varphi_i(t, \lambda)\, dt, \tag{4}$$

где $\lambda = \rho^2$. Известно (см. [4–6]), что справедливо представление

$$\varphi_i(x, \lambda) = \cos \rho x + \int_0^x K_i(x, t) \cos \rho t\, dt, \tag{5}$$

где $K_i(x,t)$ — гладкая функция, не зависящая от λ. Используя (4) и (5), получаем асимптотические формулы для $\varphi_i(x,\lambda)$ и $\varphi_i'(x,\lambda)$ при $|\lambda|\to\infty$ равномерно по $x\in[0,1]$:

$$\varphi_i(x,\lambda)=\cos\rho x+\left(h_i+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q_i(t)\,dt\right)\frac{\sin\rho x}{\rho}$$
$$+\frac{1}{2\rho}\int\limits_0^x q_i(t)\sin\rho(x-2t)\,dt+O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im}\rho|x)}{\rho^2}\right), \tag{6}$$

$$\varphi_i'(x,\lambda)=-\rho\sin\rho x+\left(h_i+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q_i(t)\,dt\right)\cos\rho x$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q_i(t)\cos\rho(x-2t)\,dt+O\left(\frac{\exp(|\operatorname{Im}\rho|x)}{\rho}\right). \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$\Delta(\lambda)=\sum_{i=1}^r\frac{\varphi_i'(1,\lambda)}{\varphi_i(1,\lambda)}\prod_{k=1}^r\varphi_k(1,\lambda). \tag{8}$$

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/2$, и ее нули совпадают с собственными значениями краевой задачи B. В самом деле, пусть

$$Y(x,\lambda)=\{y_i(x,\lambda)\}_{i=\overline{1,r}},\quad y_i(x,\lambda)=A_i(\lambda)\varphi_i(x,\lambda), \tag{9}$$

где функции $A_i(\lambda)$ не зависят от x. Функция $Y(x,\lambda)$ удовлетворяет (1) и (3). Подставляя (9) в (2), получим линейную однородную алгебраическую систему относительно $A_i(\lambda)$. Определитель этой системы есть $\Delta(\lambda)$. Если λ_0 является нулем $\Delta(\lambda)$, то функция $Y(x,\lambda_0)$ вида (9) — собственная функция, а λ_0 — собственное значение задачи B. Обратно, если λ_0 — собственное значение, то соответствующая собственная функция имеет вид (9) при $\lambda=\lambda_0$. Так как $Y\neq 0$, вышеупомянутая алгебраическая система имеет нетривиальное решение и, следовательно, $\Delta(\lambda_0)=0$. Функция $\Delta(\lambda)$ называется *характеристической функцией* краевой задачи B.

Подставляя (6) и (7) в (8), получаем

$$\Delta(\lambda)=r(-\rho\sin\rho)(\cos\rho)^{r-1}+\sum_{i=1}^r\left(h_i+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q_i(t)\,dt\right)(\cos\rho)^r$$
$$-(r-1)\sum_{i=1}^r\left(h_i+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q_i(t)\,dt\right)(\cos\rho)^{r-2}\sin^2\rho+o\left(\exp(r|\operatorname{Im}\rho|)\right),\quad |\lambda|\to\infty. \tag{10}$$

Используя (10), известным методом (см., например, [6, гл. 1]) выводим, что краевая задача B имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_{ni}\}_{n\geq 0,i=\overline{1,r}}$. Все собственные значения вещественны и имеют асимптотику

$$\rho_{n1}:=\sqrt{\lambda_{n1}}=n\pi+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty, \tag{11}$$

$$\rho_{ni} := \sqrt{\lambda_{ni}} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty,\ i = \overline{2, r}.$$

Для определенности рассмотрим $\lambda_n := \lambda_{n1}$ и изучим их подробнее. Обозначим

$$\omega := \frac{2}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(h_i + \frac{1}{2}\int_0^x q_i(t)\,dt\right). \tag{12}$$

Подставляя (11) в (10) и используя соотношение $\Delta(\lambda_n) = 0$, получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\rho_n := \sqrt{\lambda_n} = n\pi + \frac{\omega}{2\pi n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Используя (6) и (13), приходим к асимптотике для компонент собственных функций при $n \to \infty$ равномерно по $x \in [0, 1]$:

$$\varphi_i(x, \lambda_n) = \cos n\pi x + \frac{\beta_i(x)}{2\pi n}\sin n\pi x + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{14}$$

где

$$\beta_i(x) = \int_0^x q_i(t)\,dt + 2h_i - \omega x. \tag{15}$$

Пусть σ_i — спектр краевой задачи $-y_i'' + q_i(x)y_i = \lambda y_i$, $y_i'(0) - h_i y_i(0) = y_i(1) = 0$.

Зафиксируем $i = \overline{1, r}$. Существует N_0 такое, что при всех $n > N_0$ функция $\varphi_i(x, \lambda_n)$ имеет ровно n (простых) нулей внутри интервала $(0, 1)$, а именно $0 < x_{ni}^1 < \cdots < x_{ni}^{n-1} < 1$. Точки $X_i := \{x_{ni}^j\}$ называются *узловыми точками* на ребре e_i относительно собственных значений $\{\lambda_n\}$.

Зафиксируем $i = \overline{1, r}$. Будем рассматривать обратную узловую задачу восстановления потенциала $q_i(x)$ на ребре e_i и числа h_i по заданному множеству X_i узловых точек или по некоторой его части. Обозначим

$$\alpha_n^j := \frac{j - 1/2}{n}.$$

Учитывая (14), получаем следующую асимптотическую формулу для узловых точек при $n \to \infty$ равномерно по j:

$$x_{ni}^j = \alpha_n^j + \frac{1}{2\pi^2 n^2}\left(\int_0^{\alpha_n^j} q_i(t)\,dt + 2h_i - \omega\alpha_n^j\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{16}$$

Отметим, что при каждом фиксированном $i = \overline{1, r}$ множество X_i является всюду плотным на $(0, 1)$. Не нарушая общности, считаем, что $\omega = 0$ (этого можно добиться сдвигом: $q_i(x) \to q_i(x) - \omega$, $\lambda \to \lambda - \omega$). Используя (16), приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Зафиксируем $i = \overline{1, r}$ и $x \in [0, 1]$. Пусть $X_i^0 \subset X_i$ всюду плотно на $(0, 1)$. Пусть $\{x_{ni}^{j_{ni}}\} \in X_i^0$ выбраны так, что $\lim_{n\to\infty} x_{ni}^{j_{ni}} = x$. Тогда существует конечный предел*

$$g_i(x) := \lim_{n\to\infty} 2\pi^2 n\big(n x_{ni}^{j_{ni}} - (j_{ni} - 1/2)\big), \tag{17}$$

причем

$$g_i(x) = \int_0^x q_i(t)\,dt + 2h_i. \tag{18}$$

Сформулируем теперь теорему единственности и приведем конструктивную процедуру решения обратной узловой задачи. Для этого наряду с B рассмотрим краевую задачу $\widetilde{B} = B(\tilde{q}, \tilde{h})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к задаче B, то $\tilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к задаче $\widetilde{B}$.

Теорема 2. *Зафиксируем $i = \overline{1, r}$. Пусть $X_i^0 \subset X_i$ — всюду плотное на $(0,1)$ подмножество узловых точек. Пусть $X_i^0 = \widetilde{X}_i^0$. Тогда $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ п. в. на $(0,1)$, $h_i = \tilde{h}_i$. Таким образом, задание X_i^0 однозначно определяет потенциал $q_i(x)$ на ребре e_i и число h_i. Функция $q_i(x)$ и число h_i могут быть построены по формулам*

$$q_i(x) = g_i'(x), \quad h_i = \frac{g_i(0)}{2}, \tag{19}$$

где $g_i(x)$ вычисляется по (17).

В самом деле, формула (19) следует из (18). Если $X_i^0 = \widetilde{X}_i^0$, то (17) дает $g_i(x) \equiv \tilde{g}_i(x)$, $x \in [0,1]$, и, следовательно, $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ п. в. на $(0,1)$ и $h_i = \tilde{h}_i$.

3. Неполные обратные задачи. Рассмотрим сначала следующую неполную обратную *спектральную* задачу. Зафиксируем $i = \overline{1, r}$. Предположим, что $q_k(x)$ и h_k априори известны для $k = \overline{1, r} \setminus \{i\}$, $x \in (0,1)$. Кроме того, пусть $q_i(x)$ известна на части интервала, а именно при $x \in (b, 1)$. Обратная задача заключается в построении $q_i(x)$ при $x \in (0, b)$ и h_i по части спектра краевой задачи B.

Теорема 3. *Зафиксируем $i = \overline{1, r}$ и $b \in (0, 1/2)$. Пусть $\Lambda \subset \mathbf{N} \cup \{0\}$ — подмножество неотрицательных целых чисел, и пусть $\Omega := \{\lambda_n\}_{n \in \Lambda}$ — часть спектра B такая, что $\sigma_k \cap \Omega = \varnothing$, $k = \overline{1, r} \setminus \{i\}$, и система функций $\{\cos 2\rho_n x\}_{n \in \Lambda}$ полна в $L_2(0, b)$. Пусть $h_k = \tilde{h}_k$, $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ для $k = \overline{1, r} \setminus \{i\}$ п. в. на $(0,1)$ и $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ п. в. на $(b, 1)$. Если $\Omega = \widetilde{\Omega}$, то $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ п. в. на $(0,1)$ и $h_i = \tilde{h}_i$.*

Доказательство. Так как

$$-\varphi_i''(x,\lambda) + q_i(x)\varphi_i(x,\lambda) = \lambda\varphi_i(x,\lambda), \quad -\widetilde{\varphi}_i''(x,\lambda) + \tilde{q}_i(x)\widetilde{\varphi}_i(x,\lambda) = \lambda\widetilde{\varphi}_i(x,\lambda),$$

$$\varphi_i(0,\lambda) = \widetilde{\varphi}_i(0,\lambda) = 1, \quad \varphi_i'(0,\lambda) = h_i, \quad \widetilde{\varphi}_i'(0,\lambda) = \tilde{h}_i,$$

то

$$\int_0^1 Q_i(x)\varphi_i(x,\lambda)\widetilde{\varphi}_i(x,\lambda)\,dx \equiv \varphi_i'(1,\lambda)\widetilde{\varphi}_i(1,\lambda) - \varphi_i(1,\lambda)\widetilde{\varphi}_i'(1,\lambda) - (h_i - \tilde{h}_i), \tag{20}$$

где $Q_i(x) = q_i(x) - \tilde{q}_i(x)$. Кроме того,

$$\varphi_k(x,\lambda) \equiv \widetilde{\varphi}_k(x,\lambda), \quad k = \overline{1, r} \setminus \{i\}, \tag{21}$$

так как $h_k = \tilde{h}_k$, $q_k(x) = \tilde{q}_k(x)$ для $k = \overline{1, r} \setminus \{i\}$ п. в. на $(0,1)$. Учитывая условия склейки (2), вычисляем

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\varphi_k'(1,\lambda_n)}{\varphi_k(1,\lambda_n)} = 0. \tag{22}$$

В силу (21) и (22) имеем

$$\frac{\varphi_i'(1,\lambda_n)}{\varphi_i(1,\lambda_n)} = \frac{\widetilde{\varphi}_i'(1,\lambda_n)}{\widetilde{\varphi}_i(1,\lambda_n)}, \quad \lambda_n \in \Omega.$$

Используя (20), получаем

$$\int_0^b Q_i(x)\varphi_i(x,\lambda_n)\widetilde{\varphi}_i(x,\lambda_n)\,dx + (h_i - \tilde{h}_i) = 0, \quad \lambda_n \in \Omega.$$

Так как $\omega = 0$, то

$$(h_i - \tilde{h}_i) + \frac{1}{2}\int_0^b Q_i(x)\,dx = 0$$

и, следовательно,

$$\int_0^b Q_i(x)\left(\varphi_i(x,\lambda_n)\widetilde{\varphi}_i(x,\lambda_n) - \frac{1}{2}\right)dx = 0, \quad \lambda_n \in \Omega. \tag{23}$$

Используя (5), вычисляем

$$\varphi_i(x,\lambda)\widetilde{\varphi}_i(x,\lambda) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos 2\rho x - \int_0^x V_i(x,t)\cos 2\rho t\,dt\right), \tag{24}$$

где $V_i(x,t)$ — непрерывная функция, не зависящая от λ. Подставляя (24) в (23), получаем

$$\int_0^b \left(Q_i(x) + \int_x^b V_i(t,x)Q_i(t)\,dt\right)\cos 2\rho_n x\,dx = 0, \quad \lambda_n \in \Omega,$$

и тем самым

$$Q_i(x) + \int_x^b V_i(t,x)Q_i(t)\,dt = 0 \quad \text{п. в. на } (0,b).$$

Так как это однородное интегральное уравнение имеет только нулевое решение, то $Q_i(x) = 0$ п. в. на $(0,b)$, т. е. $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ п. в. на $(0,b)$. Равенство $h_i = \tilde{h}_i$ становится очевидным. $\square$

Перейдем к исследованию неполной обратной *узловой* задачи, когда узловые точки заданы только на части ребра. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Зафиксируем n, j, i. Пусть $x_{ni}^j = \tilde{x}_{ni}^j$, $x_{ni}^{j+1} = \tilde{x}_{ni}^{j+1}$, и пусть $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ п. в. на $\left(x_{ni}^j, x_{ni}^{j+1}\right)$. Тогда $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$.*

Доказательство. На интервале $\left(x_{ni}^j, x_{ni}^{j+1}\right)$ рассмотрим краевую задачу B_{ni}^j для уравнения (1) с краевыми условиями

$$y\left(x_{ni}^j\right) = y\left(x_{ni}^{j+1}\right) = 0.$$

Функция $y_{ni}(x) = \varphi_i(x,\lambda_n)$ является собственной функцией для B_{ni}^j относительно собственного значения λ_n. Так как $y_{ni}(x)$ не имеет нулей при $x \in \left(x_{ni}^j, x_{ni}^{j+1}\right)$, то из осцилляционной теоремы Штурма вытекает, что λ_n является первым собственным значением для B_{ni}^j, а $y_{ni}(x)$ — первой собственной функцией. Так как $q_i(x) = \tilde{q}_i(x)$ п. в. на $\left(x_{ni}^j, x_{ni}^{j+1}\right)$, то $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$. $\square$

Для $X \subset X_i$ обозначим $\Lambda_X := \left\{n : \exists j\ x_{ni}^j \in X\right\}$.

Определение 1. Пусть $X \subset X_i$. Множество X называется *сдвоенным*, если вместе с каждой из своих точек x_{ni}^j множество X содержит по крайней мере одну из соседних узловых точек x_{ni}^{j-1} или/и x_{ni}^{j+1}.

Теорема 4. *Зафиксируем* $i = \overline{1,r}$ *и* $b \in (0,1/2)$. *Пусть* $X \subset X_i \cap (b,1)$ *— всюду плотное на* $(b,1)$ *сдвоенное подмножество узловых точек такое, что* $\sigma_k \cap \{\lambda_n\}_{n\in\Lambda_X} = \varnothing$, $k = \overline{1,r}\setminus\{i\}$, *и система функций* $\{\cos 2\rho_n x\}_{n\in\Lambda_X}$ *полна в* $L_2(0,b)$. *Пусть* $h_k = \tilde h_k$, $q_k(x) = \tilde q_k(x)$ *при* $k = \overline{1,r}\setminus\{i\}$ *п. в. на* $(0,1)$. *Если* $X = \widetilde X$, *то* $q_i(x) = \tilde q_i(x)$ *п. в. на* $(0,1)$ *и* $h_i = \tilde h_i$.

Таким образом, задание узловых точек на части интервала однозначно определяет $q_i(x)$ на всем интервале $(0,1)$.

Доказательство. Так как $X = \widetilde X$, то $g_i(x) \equiv \tilde g_i(x)$ при $x \in (b,1)$. Используя (18), получаем $q_i(x) = \tilde q_i(x)$ п. в. на $(b,1)$. По лемме 1 $\lambda_n = \tilde\lambda_n$ для $n \in \Lambda_X$. Применяя теорему 3, заключаем, что $q_i(x) = \tilde q_i(x)$ п. в. на $(0,1)$ и $h_i = \tilde h_i$. $\square$

Теорема 5. *Зафиксируем* $i = \overline{1,r}$ *и* $b \in (0,1/2)$. *Пусть* $X := X_i \cap (b,1)$. *Пусть* $h_k = \tilde h_k$, $q_k(x) = \tilde q_k(x)$ *при* $k = \overline{1,r}\setminus\{i\}$ *п. в. на* $(0,1)$. *Если* $X = \widetilde X$, *то* $q_i(x) = \tilde q_i(x)$ *п. в. на* $(0,1)$ *и* $h_i = \tilde h_i$.

Доказательство. Существует N такое, что $n \in \Lambda_X$ при всех $n > N$. Ясно, что множество X является сдвоенным и всюду плотным на $(b,1)$. Учитывая (13), выводим, что система функций $\{\cos 2\rho_n x\}_{n\in\Lambda_X}$ полна в $L_2(0,1/2-\delta)$ при каждом фиксированном $\delta > 0$. Поэтому система функций $\{\cos 2\rho_n x\}_{n\in\Lambda_X}$ полна в $L_2(0,b)$. Применяя теорему 4, заключаем, что $q_i(x) = \tilde q_i(x)$ п. в. на $(0,1)$ и $h_i = \tilde h_i$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *McLaughlin J. R.* Inverse spectral theory using nodal points as data – a uniqueness result // J. Differ. Equations. 1988. V. 73. P. 354–362.
2. *Shen C. L., Tsai T. M.* On a uniform approximation of the density function of a string equation using EVs and nodal points and some related inverse nodal problems // Inverse Probl. 1995. V. 11, N 5. P. 1113–1123.
3. *Law C. K., Yang C. F.* Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data // Inverse Probl. 1998. V. 14, N 2. P. 299–312.
4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. Думка, 1977.
5. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
6. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007.
7. *Дифференциальные уравнения* на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. М.: Физматлит, 2004.
8. *Belishev M. I.* Boundary spectral inverse problem on a class of graphs (trees) by the BC method // Inverse Probl. 2004. V. 20. P. 647–672.
9. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators on graphs // Inverse Probl. 2005. V. 21. P. 1075–1086.
10. *Yurko V. A.* An inverse problem for higher-order differential operators on star-type graphs // Inverse Probl. 2007. V. 23. P. 893–903.

Статья поступила 9 октября 2007 г.

Юрко Вячеслав Анатольевич
Саратовский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра математической физики и вычислительной математики,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410026
yurkova@info.sgu.ru