Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 517.5

АСИМПТОТИКА УСРЕДНЕНИЙ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА ДВУХ ОТРЕЗКАХ

А. Л. Лукашов

Аннотация. Найдены равномерные асимптотики усреднений ортогональных многочленов на двух отрезках.

Ключевые слова: сильная асимптотика, ортогональные многочлены, два отрезка.

1. Введение

Пусть $P_{n,\rho}(z)$ — ортогональные многочлены с единичным старшим коэффициентом относительно веса $\rho(z)$, $\operatorname{supp}\rho = E$, на $E \subset \mathbb{C}$, т. е.

$$\int\limits_E P_{n,\rho}(z)\overline{P_{m,\rho}(z)}\rho(z)\,dz = h_n\delta_{mn},$$

где $h_n > 0, \delta_{mn}$ — символ Кронекера.

В случае $E = [-1,1]$ или $E = \{|z| = 1\}$ равномерные асимптотические представления многочленов $P_{n,\rho}(z)$ при достаточно общих предположениях относительно веса ρ установлены С. Н. Бернштейном и Сегё в 20-х годах прошлого столетия. Позже эти результаты были перенесены на случай, когда E — контур в комплексной плоскости, в работах Сегё, П. П. Коровкина, П. К. Суетина и др. (см. обзор [1]). Не вдаваясь в детали, приведем характерный пример таких асимптотик:

$$P_{n,\rho}(z) = (1+o(1))\Phi^n(z)C^n(E)\frac{D_{\rho,E}(\infty)}{D_{\rho,E}(z)}$$

равномерно внутри $D = \mathbb{C}\backslash E$, где $\Phi(z)$ — конформное отображение D на $|w| > 1$ при условии $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, $C(E)$ — (логарифмическая) емкость E, $D_{\rho,E}(z)$ — соответствующая функция Сегё.

Ситуация существенно изменяется в случае, когда E — система кривых и дуг в комплексной плоскости. Здесь наиболее общие результаты об (сильных) асимптотиках ортогональных многочленов получены Видомом [2]. Вид этих асимптотик таков:

$$P_{n,\rho}(z) = C^n(E)\Phi^n(z)F_n(z)(1+o(1))$$

равномерно внутри $D = \mathbb{C}\backslash E$, где $\Phi(z) = \exp(g(z) + i\tilde{g}(z))$ — комплексная функция Грина области D, а F_n — решения некоторой L_2-экстремальной проблемы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00167) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ–2970.2008.01).

Для нас существенно то, что эти функции зависят от n в отличие от случая одного контура. Теория Видома была существенно развита А. И. Аптекаревым, Пехерсторфером, С. П. Суетиным и др. (см., в частности, обзоры [3, 4]).

В связи с этим естественным представляется вопрос об асимптотике средних ортогональных многочленов, на который неоднократно обращал внимание автора А. И. Аптекарев. Заметим, что ответа не было даже в простейшем, впервые рассмотренном еще А. А. Марковым, случае (когда E состоит из двух отрезков действительной оси, $E = [-1, \alpha] \cup [\beta, 1]$).

Цель работы — дать ответ на указанный вопрос в случае двух отрезков, причем вид полученных асимптотик при подходящем усреднении сходен со случаем, когда E — один контур (т. е. зависимость функций F_n от n исчезает после соответствующего усреднения).

Для формулировки результата потребуется ряд обозначений из теории эллиптических функций (см., например, [5, 6]).

Положим

$$\kappa^2 = \frac{2(\beta - \alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)}$$

и возьмем число κ $(0 < \kappa < 1)$ в качестве модуля эллиптических функций:

$$\operatorname{sn} z = \operatorname{sn}(z; k) = \sin \varphi(z),$$

где φ — амплитуда z, задаваемая как обращение интеграла

$$\int\limits_0^{\varphi} \frac{dx}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 x}} = z,$$

и $K = K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл первого рода для модуля κ, определяемый равенством

$$K = K(\kappa) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}.$$

Кроме того, $\kappa' = \sqrt{1-\kappa^2}$ и $K' = K(\kappa')$ обозначают дополнительный модуль и полный эллиптический интеграл первого рода для κ' соответственно.

Определим число a из уравнения $1 - 2\operatorname{sn}^2 a = \alpha$ при дополнительном условии $-K < a < 0$. Тогда функция

$$z = \phi(u) = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2\operatorname{sn}^2 u + \alpha - 1}$$

конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} u > 0$ на прямоугольник $\Delta:$ $\{-K < \operatorname{Re} u < 0, 0 < \operatorname{Im} u < K'\}$ так, что точки $a, 0, iK', -K + iK', -K$ отображаются в точки $\infty, -1, \alpha, \beta, 1$ соответственно. Далее, функция $w = \exp(\pi u/K')$ отображает прямоугольник Δ на полукольцо $\{1 < |w| < \tau, \operatorname{Im} w > 0\}$, где $\tau = \exp(-\pi K/K')$. Мы будем использовать также тэта-функции Якоби

$$H(u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} h^{\frac{(2k-1)^2}{4}} \sin\frac{(2k-1)\pi u}{2K}, \ H_1(u) = 2\sum_{k=1}^{\infty} h^{\frac{(2k-1)^2}{4}} \sin\frac{(2k-1)\pi u}{2K},$$

$$\Theta(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k h^{k^2} \cos\frac{\pi k u}{K}, \quad \Theta_1(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} h^{k^2} \cos\frac{\pi k u}{K},$$

где $h = \exp(-\pi K'/K)$.

Теорема 1. *Если* $\operatorname{supp}\rho = E = [-1,\alpha]\cup[\beta,1]$ *и* ρ *удовлетворяет условию Сегё*

$$\int\limits_E \log\rho(\xi)\frac{\partial g}{\partial n_\xi}\,d\xi > -\infty \tag{1}$$

на E, *то найдутся константы* $c_{n,\rho}$ *такие, что равномерно внутри* D *справедлива асимптотическая формула*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{P_{j,\rho}(z)}{c_{j,\rho}\Phi^j(z)} = F_\rho(z)(1+o(1)),$$

причем

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{C^j(E)}{c_{j,\rho}} = F_\rho(\infty)(1+o(1)),$$

где

$$F_\rho(z) = \frac{H(u+a)}{e^{\frac{\pi i}{2K}u}\sqrt{D_{\rho,E}(z)H_1(u)\Theta_1(u)\Theta(u)H(u)}}$$

и $D_{\rho,E}(z)$ — *соответствующая функция Сегё, т. е. аналитическая в* D *функция без нулей в* D, *модуль которой непрерывен и однозначен в* $\mathbb{C}$ *и принимает значения* ρ *на* E.

2. Вспомогательные результаты

Сначала приведем основные обозначения из теории логарифмического потенциала, используемые далее (все они взяты из [7]).

Пусть D — p-связная область, содержащая $z=\infty$, с границей $E=\bigcup\limits_1^p E_k$, состоящей из объединения жордановых кривых и дуг, $g(z,z_0)$ — функция Грина области D с полюсом $z_0\in D$; $G(z,z_0)$ — комплексная функция Грина, $G(z,z_0) = g(z,z_0)+i\tilde g(z,z_0)$, где $(\tilde\cdot)$ всегда будет обозначать гармонически сопряженную к функции $(\cdot)$. Если $z_0=\infty$, то второй аргумент опускается, $\{z_i^*\}_{i=1}^{p-1}$ — нули производной комплексной функции Грина, т. е. $G'(z_i^*)=0$, $i=1,\dots,p-1$. Через $N(z,z_1,z_2)$ обозначается функция Неймана, $\mathscr{N}(z,z_1,z_2)$ — комплексная функция Неймана ($\mathscr{N}=N+i\widetilde N$), $\{\omega_k(z)\}_{k=1}^p$ — гармонические меры, $\{\Omega_k(z)\}_{k=1}^p$ — комплексные гармонические меры $\Omega_k(z)=(\omega_k(z)+i\widetilde\omega_k(z))/2$,

$$\Phi(z,z_0)=e^{G(z,z_0)},\quad \Psi(z,z_1,z_2)=e^{\mathscr{N}(z,z_1,z_2)},$$

$$\mathscr{N}(z,z_0,z_1,z_2)=\mathscr{N}(z,z_1,z_2)-\mathscr{N}(z_0,z_1,z_2).$$

Функция Сегё $D_{\rho,E}(z)$ имеет следующее представление:

$$D_{\rho,E}(z)=\exp\bigl(h(z)+i\tilde h(z)\bigr),\quad H(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_E \ln\rho(\xi)\frac{\partial g}{\partial n_\xi}(\xi,z)|d\xi|.$$

По определению функция $f(\xi)$ принадлежит классу C^{r+}, если ее r-я производная из класса Липшица с положительным показателем. Спрямляемая кривая принадлежит классу C^{r+}, если ее координаты принадлежат этому классу как функции длины дуги. Наряду с областью D будем также рассматривать двулистную риманову поверхность $\mathfrak{R}$, дубль D, с соответствующим продолжением на нее введенных выше функций.

Следующая теорема является удобной для нас переформулировкой теоремы Видома в модификации А. И. Аптекарева [2, 7].

Теорема 2. *Пусть $E \in C^{2+}$ и вес $\rho \in L_1(E)$, $\operatorname{supp}\rho = E$, удовлетворяет условию Сегё (1). Тогда справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$P_{n,\rho}(z) = C^n(E)\Phi^n(z)F_{n,\rho}(z)(1+o(1))$$

равномерно внутри D, где

$$F^2_{n,\rho}(z) = \varepsilon_n \frac{D_{\rho,E}(\infty)}{D_{\rho,E}(z)} \frac{\Phi'(z)}{\Phi'(\infty)} \frac{\prod\limits_{j=1}^{p-1}\Phi(z,\dot z_{j,n})}{\exp\Big\{\sum\limits_{j=1}^{p-1} g(\dot z_{j,n})\Big\}} \exp\Bigg\{\sum_{j=1}^{p-1}\mathscr{N}(z,\infty,z_j^*,\dot z_{j,n})\Bigg\},$$

точки $\dot z_{j,n}$ являются решением проблемы обращения Якоби

$$\sum_{j=1}^{p-1}\int\limits_{\dot z_0}^{\dot z_{j,n}} d\Omega_k(z) = \Delta_k^0 - n\omega_k(\infty) + \sum_{j=1}^{p-1}\int\limits_{\dot z_0}^{z_j^*} d\Omega_k(z)$$

с произвольной фиксированной точкой $\dot z_0 \in \mathfrak{R}$ и

$$\Delta_k^0 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_E \ln\rho_0(\xi)\frac{\partial\omega_k(\xi)}{\partial n_\xi}|d\xi|,\ k=1,\dots,p-1, \quad \rho_0(\xi) = \frac{\rho(\xi)}{\frac{\partial g}{\partial n_\xi}(\xi)},$$

а константа ε_n, $|\varepsilon_n|=1$, выбирается так, чтобы $F_{n,\rho}(\infty)=1$.

Следующая лемма, по-видимому, известна, но для полноты рассуждений мы приведем ее с доказательством.

Лемма 1. *В случае $E = [-1,\alpha]\cup[\beta,1]$ справедливы следующие представления (с $z=\phi(u)$):*

$$\Phi(z,z_0) = \frac{H(u+a_0)}{H(u-a_0)}, \quad \phi(a_0) = z_0, \tag{2}$$

$$\Psi(z,x_1,x_2) = \frac{z-x_2}{z-x_1} = \frac{H(u-v_2)H(u+v_2)H(a-v_1)H(a+v_1)}{H(u-v_1)H(u+v_1)H(a-v_2)H(a+v_2)}, \tag{3}$$

$x_j = \phi(v_j)$, $j=1,2$,

$$\Omega_1(z) = \frac{u+K}{2K}. \tag{4}$$

Доказательство. Так как $a_0 \in (-K,0)$, для $u\in[0,iK']$ (т. е. $z\in[-1,\alpha]$) имеем

$$\overline{\frac{H(u+a_0)}{H(u-a_0)}} = \frac{H(-u+a_0)}{H(-u-a_0)} = \frac{H(u-a_0)}{H(u+a_0)},$$

т. е.

$$\left|\frac{H(u+a_0)}{H(u-a_0)}\right| = 1.$$

Аналогично последнее равенство проверяется для $u\in[-K,-K+iK']$ (т. е. для $z\in[\beta,1]$). Отсюда и из аналитичности $\frac{H(u+a_0)}{H(u-a_0)}$ всюду в D, кроме $z=z_0$ ($u=a_0$), вытекает (2).

Первая часть формулы (3) содержится в $[2,7]$. Вторая часть следует из того, что и функция $\frac{\phi(u)-x_2}{\phi(u)-x_1}$, и правая часть (3) — эллиптические функции, которые имеют одни и те же нули и полюсы ($\pm v_2, \pm v_1$ соответственно) и, кроме того, совпадают при $u = a$ (т. е. $z = \infty$).

Так как $\omega_1(z)$ записывается [2] после отображения D на подходящее кольцо $1 < |v| < \tau$ в виде

$$\omega_1(z(v)) = \frac{\log\left|\frac{v}{\tau}\right|}{\log\frac{1}{\tau}},$$

получим

$$\Omega_1(z(v)) = \frac{\log\frac{v}{\tau}}{2\log\frac{1}{\tau}}.$$

Поскольку $\tau = \exp(-\pi K/K')$, а $v = \exp(\pi u/K')$ [5, п. 49], имеем

$$\Omega_1(\phi(u)) = \frac{K'}{2\pi K}\log(e^{\frac{\pi(u+K)}{K'}}) = \frac{u+K}{2K}.$$

3. Доказательство теоремы 1

По теореме 2 с учетом леммы 1

$$P_{n,\rho}(z) = C^n(E)\Phi^n(z)F_{n,\rho}(z)(1+o(1))$$

равномерно на компактах вне E, причем

$$F^2_{n,\rho}(z) = \varepsilon_n\frac{D_{\rho,E}(\infty)}{D_{\rho,E}(z)}\frac{\Phi'(z)}{\Phi'(\infty)}\exp\mathscr{N}(z,\infty,z^*,\dot z_n)\frac{\Phi(z,\dot z_n)}{|\Phi(\infty,\dot z_n)|},$$

где $z^* = \phi(u^*)$ — нуль функции $G'(z)$ в $[\alpha,\beta]$, $\dot z_n = \phi(\dot u_n)$ — решение проблемы обращения Якоби

$$\frac{\dot u_n}{2K} \equiv \Delta^0_1 - n\omega_1(\infty) + \frac{u^*}{2K} \pmod 1. \tag{5}$$

Подставляя выражения из леммы 1 и учитывая выбор ε_n, получим

$$F^2_{n,\rho}(z) = \frac{D_{\rho,E}(\infty)}{D_{\rho,E}(z)}\frac{\Phi'(z)}{\Phi'(\infty)}\frac{H^2(u+\dot u_n)}{H^2(a+\dot u_n)}\frac{H(a-u^*)H(a+u^*)}{H(u-u^*)H(u+u^*)}. \tag{6}$$

Подсчитаем теперь $\Phi'(z) = \exp(G(z))G'(z)$. Поскольку $G'(z)$ является однозначной функцией, функция

$$G'(\phi(u)) = \left(\frac{H(u+a)}{H(u-a)}\right)'_u \frac{1}{\frac{dz}{du}\frac{H(u+a)}{H(u-a)}}$$

является эллиптической функцией с полюсами в точках $-K, -K+iK', iK', 0$ и с нулями в точках $\pm u^*, \pm a$. Поэтому по теореме о представлении эллиптических функций [5, п. 19]

$$G'(\phi(u)) = \text{const}\,\frac{H(u+u^*)H(u-u^*)H(u+a)H(u-a)}{H(u+K)H(u+K-iK')H(u-iK')H(u-2K+2iK')}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\Phi'(\phi(u)) &= G'(\phi(u))\Phi(\phi(u))\\ &= \text{const}\,\frac{H(u+u^*)H(u-u^*)H^2(u+a)}{H(u+K)H(u+K-iK')H(u-iK')H(u-2K+2iK')}.\end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (6), после несложных вычислений с использованием формул приведения тэта-функций [5, табл. XI] получим

$$F_{n,\rho}(z)=\frac{e^{\frac{\pi i}{2K}a}}{e^{\frac{\pi i}{2K}u}}\frac{H(u+a)}{H(2a)}\frac{\sqrt{D_{\rho,E}(\infty)H_1(a)\Theta_1(a)\Theta(a)H(a)}}{\sqrt{D_{\rho,E}(z)H_1(u)\Theta_1(u)\Theta(u)H(u)}}\frac{\Theta(u+\dot u_n-iK')}{\Theta(a+\dot u_n-iK')},\quad(7)$$

где выбор ветвей квадратного корня в числителе и знаменателе согласуется так, чтобы $F_{n,\rho}(\infty)=1$. Обозначим теперь

$$c_{n,\rho}=\frac{e^{\frac{\pi i}{2K}a}C^n(E)\sqrt{D_{\rho,E}(\infty)H_1(a)\Theta_1(a)\Theta(a)H(a)}}{H(2a)\Theta(a+\dot u_n-iK')}.$$

Тогда

$$\frac{P_{n,\rho}(\phi(u))}{c_{n,\rho}\Phi^n(\phi(u))}=\frac{H(u+a)\Theta(u+\dot u_n-iK')}{e^{\frac{\pi i}{2K}u}\sqrt{D_{\rho,E}(\phi(u))H_1(u)\Theta_1(u)\Theta(u)H(u)}}(1+o(1))$$

равномерно на компактах вне E, следовательно,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{P_{j,\rho}(z)}{c_{j,\rho}\Phi^j(z)}=F_\rho(z)\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\Theta(u+\dot u_j-iK')(1+o(1))$$

равномерно на компактах вне E. Пусть теперь $z\in D$, т. е. $u\in\Delta\cup\overline{\Delta}\cup(-K,0)\cup(-K+iK',iK')$. Так как Θ — $2K$-периодическая функция, а последовательность $\{n\theta-[n\theta]\}_{n=1}^{\infty}$ является равномерно распределенной в интервале $[0,1]$ для иррациональных θ [8], то при $\omega_1(\infty)\notin\mathbb{Q}$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\Theta(u+\dot u_j-iK')=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\Theta\bigl(2K\Delta_1^0-j\omega_1(\infty)+u+u^*-iK'\bigr)$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_0^1\Theta\bigl(2K\Delta_1^0+2Kx+u+u^*-iK'\bigr)\,dx=1.$$

Если же $\omega_1(\infty)\in\mathbb{Q}$, например, $\omega_1(\infty)=\frac{p}{q}$, то, полагая $n=qr+s, 0\le s<q$, получим

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\Theta(u+\dot u_j-iK')=\frac{r}{qr+s}\sum_{j=0}^{q-1}\Theta\left(2K\Delta_1^0-\frac{2Kjp}{q}+u+u^*-iK'\right)$$
$$+\frac{1}{qr+s}\sum_{j=qr+1}^{qr+s}\Theta\left(2K\Delta_1^0-\frac{2Kjp}{q}+u+u^*-iK'\right).$$

Второе слагаемое стремится к нулю при $n\to\infty$, и так как

$$\sum_{j=0}^{q-1}\cos 2m\pi\left(\Delta_1^0-\frac{jp}{q}+\frac{u+u^*-iK'}{2K}\right)=0,$$

то и при $\omega_1(\infty)\in\mathbb{Q}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\Theta(u+\dot u_j-iK')=1.$$

Таким образом, при всех $z \in D$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{P_{j,\rho}(z)}{c_{j,\rho}\Phi^j(z)} = F_\rho(z) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \Theta(u + \dot{u}_j - iK') = F_\rho(z).$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{C^j(E)}{c_{j,\rho}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{H(2a)\Theta(a + \dot{u}_n - iK')}{e^{\frac{\pi i}{2K}a}\sqrt{D_{\rho,E}(\infty)H_1(a)\Theta_1(a)\Theta(a)H(a)}}$$
$$= \frac{H(2a)}{e^{\frac{\pi i}{2K}a}\sqrt{D_{\rho,E}(\infty)H_1(a)\Theta_1(a)\Theta(a)H(a)}} = F_\rho(\infty).$$

Поскольку тэта-функция $\Theta(u)$ является целой функцией, то очевидно, что семейство $\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\Theta(u + \dot{u}_j - iK')\right\}_{n=1}^{\infty}$, будучи равномерно ограниченным внутри D, является компактным (по u) семейством в D, поэтому по теореме Витали (см., например, [9]) поточечная сходимость в D обеспечивает равномерную сходимость внутри D. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Суетин П. К.* Основные свойства многочленов, ортогональных по контуру // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21, № 2. С. 41–88.
2. *Widom H.* Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane // Adv. Math. 1969. V. 3, N 2. P. 127–232.
3. *Peherstorfer F.* Orthogonal and extremal polynomials on several intervals // J. Comput. Appl. Math. 1993. V. 48, N 1–2. P. 187–205.
4. *Суетин С. П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда // Успехи мат. наук. 2002. Т. 57, № 1. С. 45–142.
5. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
6. *Peherstorfer F.* Elliptic orthogonal and extremal polynomials // Proc. London Math. Soc. 1995. V. 70, N 3. P. 605–624.
7. *Аптекарев А. И.* Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 2. С. 231–258.
8. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Ч. 1.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967. Т. 1.

Статья поступила 16 января 2008 г.

Лукашов Алексей Леонидович (Aleksei Lukashov)
Department of Mathematics
Fatih University
34500 Istanbul
Turkey
LukashovAL@info.sgu.ru