Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 517.9

СВОЙСТВО ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧЕ ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Хабиров

Аннотация. Решается задача групповой классификации нелинейной гиперболической системы дифференциальных уравнений. Допускаемая непрерывная группа преобразований имеет алгебру Ли размерности меньше 5. Это основное утверждение доказывается с помощью основного свойства определяющих уравнений допускаемой алгебры Ли: иметь решением коммутатор двух решений. С помощью преобразований эквивалентности нелинейные системы классифицируются по известным структурам алгебр Ли размерностей 3 и 4.

Ключевые слова: симметрии дифференциальных уравнений, групповая классификация, определяющие уравнения допускаемой алгебры Ли.

Введение

Нелинейные волновые уравнения вида

$$u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x)$$

контактным преобразованием приводятся к системе уравнений [1]

$$v_t = a(x, v)w_x, \quad w_t = b(x, v)v_x. \tag{0.1}$$

Мы рассматриваем нелинейные гиперболические системы, у которых $ab > 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a_v^2 + b_v^2 \neq 0$, $a_x^2 + b_x^2 \neq 0$. Систему можно записать в характеристической форме

$$C_+\colon \frac{dx}{dt} = \sqrt{ab},\ D_+v - \sqrt{ab^{-1}}D_+w = 0;\ C_-\colon \frac{dx}{dt} = -\sqrt{ab},\ D_-v + \sqrt{ab^{-1}}D_-w = 0.$$

Преобразования эквивалентности системы (0.1) вычислены в [1]. Они образуют бесконечную группу с произволом в две функции одного аргумента. Для групповой классификации [2] системы (0.1) вычислены инварианты производной алгебры Ли группы эквивалентности. Два инварианта первого порядка играют важную роль при доказательстве конечности размерности допускаемой алгебры. Размерность допускаемой алгебры не превосходит четырех.

В работе [1] приведен пример необходимых условий на коэффициенты a, b, при выполнении которых система допускает конечнопараметрическую группу

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00047–а) и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (грант НШ–2826.2008.1).

преобразований. Эти условия переопределенные и сильно нелинейные. Совместность условий не изучалась ввиду сложности задачи. В настоящей статье эта задача полностью решена с помощью оригинального метода. А именно, используется свойство определяющих уравнений алгебры вместе с двумя решениями иметь решением коммутатор.

После того, как доказано, что размерность допускаемой алгебры меньше 5, для перечисления различных нелинейных систем (0.1) можно воспользоваться известной классификацией Бианки трехмерных алгебр Ли и классификацией Г. И. Кручковича четырехмерных алгебр Ли [3]. В результате получился список из 14 неэквивалентных случаев нелинейных систем уравнений с допускаемыми конечномерными алгебрами Ли.

§ 1. Преобразования эквивалентности гиперболической системы уравнений

Замены переменных t, x, v, w системы (0.1), не изменяющие вида системы, а лишь преобразующие коэффициенты a, b, называются *преобразованиями эквивалентности*. Ясно, что они образуют группу. Непрерывная часть этой группы, зависящая от параметров, образует группу Ли, алгебра Ли которой находится по известному алгоритму [2, § 6, п. 4].

Теорема 1 [1]. *Алгебра Ли L преобразований эквивалентности задается операторами*

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_w, \quad E_3 = t\partial_t - a\partial_a - b\partial_b, \quad E_4 = w\partial_w - a\partial_a + b\partial_b,$$

$$\langle\eta\rangle_1 = \eta(x)\partial_x + \eta'(x)(a\partial_a + b\partial_b), \quad \langle\zeta\rangle_2 = \zeta(v)\partial_v + \zeta'(v)(a\partial_a - b\partial_b).$$

Ненулевые коммутаторы [2, § 7] операторов из теоремы 1 таковы: $[E_1, E_3] = E_1$, $[E_2, E_4] = E_2$, $[\langle\eta_1\rangle_1, \langle\eta_2\rangle_1] = \langle\eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1'\rangle_1$, $[\langle\zeta_1\rangle_2, \langle\zeta_2\rangle_2] = \langle\zeta_1\zeta_2' - \zeta_2\zeta_1'\rangle_2$. Отсюда видно, что векторное пространство, определяемое операторами $E_i, i = 1,2,3,4$, $\langle\eta\rangle_1$, $\langle\zeta\rangle_2$, является бесконечной алгеброй Ли L. Алгебра L представляется в виде полупрямой суммы $L = J\dot{\oplus}L_2$ производной алгебры Ли $L^{(1)} = J = \{\langle\eta\rangle_1\} \oplus \{\langle\zeta\rangle_2\} \oplus \{E_1, E_2\}$ и абелевой подалгебры $L_2 = \{E_3, E_4\}$.

Теорема 2. *Инварианты первого порядка идеала J задаются выражениями*

$$i = \sqrt{ab}\left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right), \quad j = \sqrt{ab^{-1}}\left(\frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b}\right).$$

Доказательство. Продолжим операторы идеала J на первые производные [2, § 4], при этом операторы E_1, E_2 не продолжаются:

$$\langle\tilde\eta\rangle_1 = \eta\partial_x + \eta'(a\partial_a + b\partial_b + a_v\partial_{a_v} + b_v\partial_{b_v}) + \eta''(a\partial_{a_x} + b\partial_{b_x}),$$

$$\langle\tilde\zeta\rangle_2 = \zeta\partial_v + \zeta'(a\partial_a - b\partial_b + a_x\partial_{a_x} - b_x\partial_{b_x} - 2b_v\partial_{b_v}) + \zeta''(a\partial_{a_v} - b\partial_{b_v}).$$

Инвариант есть функция I, которая аннулируется продолженными операторами. Так как $\eta(x)$, $\zeta(v)$ — произвольные функции, то, приравнивая к нулю коэффициенты при производных этих функций, получим переопределенную систему линейных однородных уравнений

$$I_x = I_v = 0, \quad aI_a + bI_b + a_vI_{a_v} + b_vI_{b_v} = 0,$$

$$aI_a - bI_b + a_xI_{a_x} - b_xI_{b_x} - 2b_vI_{b_v} = 0, \quad aI_{a_x} + bI_{b_x} = 0, \quad aI_{a_v} - bI_{b_v} = 0.$$

Общим решением является произвольная функция инвариантов i, j из формулировки теоремы.

Конечные преобразования, отвечающие операторам из теоремы 1, получаются решением уравнений Ли [2, § 2, п. 3] и обозначаются так же, как их операторы, при этом преобразования инвариантных величин не записаны для E_k:

E_1: $\bar{t} = t + a_1$;
E_2: $\bar{w} = w + a_2$;
E_3: $\bar{t} = ta_3$, $\bar{b} = ba_3^{-1}$, $\bar{a} = aa_3^{-1}$;
E_4: $\bar{w} = wa_4$, $\bar{b} = ba_4$, $\bar{a} = aa_4^{-1}$;
$\langle\eta\rangle_1$: $\bar{x} = f(x)$, $\bar{v} = v$, $\bar{a}(\bar{x}, \bar{v}) = a(x, v)f'(x)$, $\bar{b}(\bar{x}, \bar{v}) = b(x, v)f'(x)$;
$\langle\zeta\rangle_2$: $\bar{x} = x$, $\bar{v} = g(v)$, $\bar{a}(\bar{x}, \bar{v}) = a(x, v)g'(v)$, $\bar{b}(\bar{x}, \bar{v}) = b(x, v)(g'(v))^{-1}$.

Здесь a_k — параметры однопараметрических подгрупп; $f(x)$, $g(v)$ — функциональные параметры бесконечнопараметрических подгрупп.

Замечены дискретные преобразования эквивалентности системы (0.1) — преобразование годографа:

$$\bar{t} = w, \quad \bar{x} = v, \quad \bar{v} = x, \quad \bar{w} = t, \quad \bar{a}(\bar{x}, \bar{v}) = a(x, v), \quad \bar{b}(\bar{x}, \bar{v}) = (b(x, v))^{-1},$$

и инверсии:

$$(1)\ \bar{t} = -t,\ \bar{a} = -a,\ \bar{b} = -b; \quad (2)\ \bar{v} = -v,\ \bar{a} = -a,\ \bar{b} = -b;$$

$$(3)\ \bar{x} = -x,\ \bar{a} = -a,\ \bar{b} = -b; \quad (4)\ \bar{w} = -w,\ \bar{a} = -a,\ \bar{b} = -b.$$

Лемма 1. *Инварианты преобразуются по правилу: для годографа* $\bar{i} = j$, $\bar{j} = i$; *для инверсии* (2) $\bar{i} = i$, $\bar{j} = -j$; *для инверсии* (3) $\bar{i} = -i$, $\bar{j} = j$.

§ 2. Определяющие уравнения алгебры Ли

Оператор, допускаемый системой (0.1), разыскивается в виде

$$X = \xi(t, x, v, w)\partial_t + \eta(t, x, v, w)\partial_x + \zeta(t, x, v, w)\partial_v + \chi(t, x, v, w)\partial_w.$$

Условия инвариантности многообразия (0.1) записывается с помощью продолжения X на производные:

$$\begin{aligned}\widetilde{X} = X &+ (D_t\zeta - v_tD_t\xi - v_xD_t\eta)\partial_{v_t} + (D_x\zeta - v_tD_x\xi - v_xD_x\eta)\partial_{v_x}\\ &+ (D_t\chi - w_tD_t\xi - w_xD_t\eta)\partial_{w_t} + (D_x\chi - w_tD_x\xi - w_xD_x\eta)\partial_{w_x}.\end{aligned}$$

Для этого действуем оператором $\widetilde{X}$ на каждое уравнение системы (0.1) в силу уравнений системы (0.1). Полученные тождества расщепляем по независимым производным w_x, v_x, которые являются свободными параметрами в тождествах. Получаем определяющую систему уравнений

$$\begin{gathered}\eta_w = a\xi_v, \quad \eta_v = b\xi_w, \quad \zeta_t = a\chi_x, \quad \chi_t = b\zeta_x, \quad b\zeta_w = a\chi_v, \quad \eta_t = ab\xi_x,\\ 2\eta_x - 2\xi_t = \left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)\eta + \left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta,\\ 2\chi_w - 2\zeta_v = \left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta + \left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)\zeta.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Если функции a, b произвольны, то $\xi = C_{01}$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\chi = C_{02}$, где C_{0k}, $k = 1, 2$, — постоянные. Получаем операторы $X_k = E_k$, $k = 1, 2$, которые образуют ядро допускаемых алгебр.

Из восьми уравнений (2.1) можно найти все производные функций χ и ξ. Перекрестное дифференцирование дает 12 уравнений совместности:

$$2\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\eta_t+b\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\eta_w+b\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\zeta_w=0, \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\zeta_t+2b\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\zeta_w+\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\eta_t=0, \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)\eta_v+\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)_x\eta+\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\zeta_v+\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)_v\zeta=0, \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\eta_x+\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)_x\eta-\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\zeta_x+\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)_v\zeta=0, \tag{2.5}$$

$$2\eta_{tt}=2ab\eta_{xx}-(ab)_x\eta_x-(ab)_v\zeta_x-ab\left(\frac{a_x}{a}+\frac{b_x}{b}\right)_x\eta-ab\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)_x\zeta, \tag{2.6}$$

$$\eta_{tv}=b\eta_{xw}+\left(\frac{a_v}{a}+\frac{b_v}{b}\right)\eta_t-b\frac{a_x}{a}\eta_w, \tag{2.7}$$

$$\eta_{tw}=a\eta_{xv}-a\frac{b_x}{b}\eta_v, \tag{2.8}$$

$$\eta_{vv}=\frac{b}{a}\eta_{ww}+\frac{b_v}{b}\eta_v, \tag{2.9}$$

$$\zeta_{tt}=ab\zeta_{xx}+ab_x\zeta_x, \tag{2.10}$$

$$\zeta_{tw}=a\zeta_{xv}+a\frac{b_v}{b}\zeta_x, \tag{2.11}$$

$$\zeta_{tv}=b\zeta_{xw}+b\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\zeta_w+\frac{a_v}{a}\zeta_t, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}2\zeta_{ww}=2\frac{a}{b}\zeta_{vv}+\frac{a}{b}\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\eta_v+\frac{a}{b}\left(\frac{b_v}{b}-\frac{a_v}{a}\right)\zeta_v\\+\frac{a}{b}\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)_v\eta+\frac{a}{b}\left(\frac{b_v}{b}-\frac{a_v}{a}\right)_v\zeta.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Теорема 3. *Система определяющих уравнений* (2.2)–(2.13) *не порождает новых уравнений.*

В ситуации теоремы 3 говорят, что *система находится в инволюции* [4].

Для доказательства проверяется, что все дифференциальные следствия уравнений 1-го порядка (2.2)–(2.5) суть тождества. Далее из (2.6)–(2.13) находим смешанные производные функций η и ζ 3-го порядка. Их сравнение приводит к тождествам.

Уравнения (2.2), (2.3) линейные однородные с постоянными коэффициентами, поэтому имеют общее решение

$$\eta=-2^{-1}tI(h+g)_s+g,\quad b\zeta=2^{-1}tI^2(h+g)_s+Ih, \tag{2.14}$$

где $h(x,v,s)$, $g(x,v,s)$ — произвольные функции, $s=w+It$, $I=ij^{-1}$, i, j — инварианты из теоремы 2.

Подстановка представления (2.14) с новыми независимыми переменными t, s, x, v в оставшиеся уравнения определяющей системы (2.4)–(2.13) дает уравнения, в которых переменная t свободная. Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях t, получим расщепление определяющих уравнений. Из уравнений (2.4), (2.5) следуют равенства для a и b:

$$\left(\frac{a_v}{a}+\frac{b_v}{b}\right)I_x = I(\ln b)_{xv}, \quad \left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)I_v = I(\ln b)_{xv} \tag{2.15}$$

при $(g+h)_s \neq 0$ (при $(g+h)_s = 0$ этих равенств нет), а также в любом случае справедливы уравнения для h и g:

$$\left[\left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)(g+h)\right]_x = 2b^{-1}I(\ln b)_{xv}h, \quad \left[\left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)(g+h)\right]_v = -2(\ln b)_{xv}g. \tag{2.16}$$

Лемма 2. *Пусть $I \neq \mathrm{const}$, $(\ln b)_{xv} \neq 0$, $(g+h)_s \neq 0$. Тогда ζ, η — линейные функции по переменным t, w.*

Доказательство. Коэффициент при t^3 в (2.9), (2.10) дает равенства

$$II_x(g+h)_{sss} = 0, \quad II_v(g+h)_{sss} = 0. \tag{2.17}$$

Если $I \neq \mathrm{const}$, $(\ln b)_{xv} \neq 0$, $(g+h)_s \neq 0$, то из (2.17), (2.16) следует, что g, h — многочлены 2-й степени по переменной s:

$$g+h = \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0, \quad h = \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0,$$

где α_k, β_k, $k = 0, 1, 2,$ — функции переменных x, v.

Коэффициенты при t^2 в (2.9), (2.10) дают равенства

$$2\alpha_{2v} + \left(I_{vv}I_v^{-1} - b_v b^{-1}\right)\alpha_2 + 2I_v I^{-1}\beta_2 = 0,$$

$$2\alpha_{2x} + \left(I_{xx}I_x^{-1} - b_x b^{-1} + 4I_x I^{-1}\right)\alpha_2 + 2I_x I^{-1}\beta_2 = 0,$$

а из (2.8), (2.13) получим

$$\alpha_2\left[I_x I_v^{-1} I_{vv} - 2I_{xv} + I_v I_x^{-1} I_{xx} - 4I^{-1}I_x I_v + b^{-1}(b_x I_v - b_v I_x)\right] = 0.$$

Используя эти равенства, из (2.6), (2.13) имеем $I_x\alpha_2 = 0$, $I_v\alpha_2 = 0$.

Так как $I \neq \mathrm{const}$, то $\alpha_2 = 0$ и $\beta_2 = 0$. Значит, функции η, ζ линейны по t, w.

§ 3. Частные случаи

Пусть $i = 0$, тогда $ab^{-1} = \beta(v)$. Преобразование эквивалентности $\langle\zeta\rangle_2$ делает $\beta = 1$. Если $j = 0$, то $ab = \alpha(x)$. Преобразование эквивалентности $\langle\eta\rangle_1$ делает $\alpha = 1$, а годограф приводит к предыдущему случаю. Итак, если $i = 0$ или $j = 0$, то система (0.1) эквивалентна случаю $a = b$.

3.1. Случай $a = b$. Можно считать, что $a_x \neq 0$, $a_v \neq 0$, $(\ln a)_{xv} \neq 0$. Иначе система (0.1) эквивалентна линейной системе.

Из уравнений (2.3), (2.5) следует, что $\zeta_t = \zeta_x = 0$, а из (2.2) получим $\eta = -2^{-1}ta\zeta_w + \eta_1(x, v, w)$. Подстановка в уравнение (2.8) дает линейное равенство по переменной t, от которой функции ζ, η_1 не зависят. Приравняв к нулю коэффициент при t, имеем $\zeta_w(\ln a)_{xv} = 0$. Отсюда $\zeta_w = 0$. Из (2.13) получим $\zeta = C_1 v + C_0$, где C_k — постоянные. Из уравнения (2.4) определяем

$$\eta = -(\ln a)_{xv}^{-1}[C_1(v(\ln a)_v)_v + C_0(\ln a)_{vv}].$$

Уравнения (2.10)–(2.12) тождественно выполняются. Остальные уравнения (2.6), (2.8), (2.9) дают условия совместности для функции a и возможную линейную связь на постоянные C_0 и C_1.

По решению системы (2.2)–(2.13) решение системы (2.1) определяется с точностью до двух аддитивных постоянных, которые задают ядро допускаемых алгебр. Общее решение линейно и однородно зависит от четырех или меньшего числа постоянных.

Таким образом, размерность допускаемой алгебры не превосходит 4.

3.2. Случай $I_x = I_v = 0$. Преобразование эквивалентности E_3 переводит постоянное значение I в единицу $I = 1$. Значит, $i = j$ или $b(ba_x - ab_x) = ba_v + ab_v$. Общее решение этого уравнения имеет вид $a = \varphi_x^{-1}\varphi_v^{-1}$, $\quad b = \varphi_v\varphi_x^{-1}$, где $\varphi(x, v)$ — произвольная функция. В системе (0.1) с такими выражениями для a и b сделаем замену $\bar{v} = \varphi(x, v)$, $v = \sigma(x, \bar{v})$ — обратная функция, $\bar{w} = w + t$ и получим систему

$$\bar{v}_t = -\sigma_{\bar{v}}\sigma_x^{-1}\bar{w}_x, \quad \bar{w}_t = -\sigma_{\bar{v}}\sigma_x^{-1}\bar{v}_x$$

вида (0.1) с $a = b$. Мы приходим к случаю 3.1. Замена, использованная здесь, есть преобразование эквивалентности, отличное от рассмотренных в § 1. Изменение группы эквивалентности возможно для специальных соотношений между коэффициентами a и b.

3.3. Случай $(\ln b)_{xv} = 0$. В рассматриваемом случае $b = \alpha(x)\beta(v)$. Преобразованиями эквивалентности $\langle\eta\rangle_1$, $\langle\zeta\rangle_2$ можно перевести b в единицу: $b = 1$.

Если $(g + h)_s \neq 0$, то из (2.15) следует, что $I = I_0$ — постоянная. Получаем случай 3.2.

Пусть $b = 1$, $(g + h)_s = 0$. Тогда ввиду (2.14) $\eta = g(x, v, s)$, $\zeta = Ih(x, v, s)$, $s = w + It$, $I = a_x a_v^{-1}$. Уравнения (2.4), (2.5) дают $a_x\eta + a_v\zeta = aC_0$, где C_0 — постоянная.

Если $I \neq \mathrm{const}$, то из (2.6), (2.7) следует $g_{ss} = 0$, а из (2.10), (2.11) имеем $g_s = 0$. Уравнения (2.6)–(2.9) интегрируются: $\eta = C_1x + C_2v + C_3$, $\zeta = C_0 aa_v^{-1} - I(C_1x + C_2v + C_3)$.

Решение определяющих уравнений (2.1) зависит не более чем от шести постоянных с учетом ядра. Подстановка в (2.11) дает тождество, а из (2.9), (2.10), (2.12) получим классификационные соотношения

$$C_1(2I_x + xI_{xx}) + C_2vI_{xx} + C_3I_{xx} + C_0\big[\big(aa_{xv}a_v^{-2}\big)_v - I_x\big] = 0,$$

$$C_1(I_v + xI_{xv}) + C_2(I_x + vI_{xv}) + C_3I_{xv} + C_0\big[\big(aa_{xv}a_v^{-2}\big)_v - I_v\big] = 0,$$

$$C_1xI_{vv} + C_2(2I_v + vI_{vv}) + C_3I_{vv} + C_0\big(aa_{vv}a_v^{-2}\big)_v = 0.$$

Постоянные C_k линейно зависимы, иначе $I = \mathrm{const}$.

Размерность векторного пространства решений определяющих уравнений (2.1) равна 5, если все миноры 2-го порядка матрицы системы классификационных соотношений равны нулю. Вычисляя миноры 2-го порядка, получим $I_x = I_v = 0$ и возвращаемся к случаю 3.2. Алгебра нелинейных уравнений (0.1) имеет размерность не больше 4.

3.4. Случай $(g + h)_s = 0$, $(\ln b)_{xv} \neq 0$, $I \neq \mathrm{const}$. Из (2.16) следует $g_s = h_s = 0$, т. е. $\eta = \eta(x, v)$, $\zeta = \zeta(x, v)$. Из уравнений (2.1) получим

$$\xi = C_1w + C_3t + C_{01}, \quad \chi = C_2t + C_4w + C_{02}, \tag{3.1}$$

где C_{01}, C_{02} — постоянные ядра, C_k — постоянные векторного пространства решений системы (2.1) и

$$\begin{gathered}\eta_v = C_1 b, \quad \zeta_x = C_2 b^{-1},\\ 2\eta_x - 2C_3 = \left(\frac{a_x}{a} + \frac{b_x}{b}\right)\eta + \left(\frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b}\right)\zeta,\\ 2\zeta_v - 2C_4 = \left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right)\eta + \left(\frac{a_v}{a} - \frac{b_v}{b}\right)\zeta.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Из (3.2) выразим все производные функций η, ζ. Условия совместности принимают вид

$$\eta j_x + \zeta j_v = -C_1 i - C_4 j, \quad \eta i_x + \zeta i_v = -C_3 i - C_2 j. \tag{3.3}$$

По теореме Фробениуса других условий совместности нет [2, § 12, п. 8].

Если определитель системы (3.3) не равен нулю: $\Delta = j_x i_v - i_x j_v \neq 0$, то решение имеет вид

$$\eta = -\Delta^{-1}\begin{vmatrix} C_1 i + C_4 j & j_v \\ C_3 i + C_2 j & i_v \end{vmatrix}, \quad \zeta = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} C_1 i + C_4 j & j_x \\ C_3 i + C_2 j & i_x \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Размерность векторного пространства решений определяющих уравнений (2.1) не больше шести.

Подстановка (3.4) в (3.2) дает четыре классификационных соотношения:

$$\begin{gathered}C_1[(ii_v\Delta^{-1})_v + b] - C_2(jj_v\Delta^{-1})_v - C_3(ij_v\Delta^{-1})_v + C_4(ji_v\Delta^{-1})_v = 0,\\ C_1(ii_x\Delta^{-1})_x - C_2[(jj_x\Delta^{-1})_x + b^{-1}] - C_3(ij_x\Delta^{-1})_x + C_4(ji_x\Delta^{-1})_x = 0,\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}C_1[&-2(ii_v\Delta^{-1})_x + (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})ii_v\Delta^{-1} - (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})ii_x\Delta^{-1}]\\ &+ C_2[2(jj_v\Delta^{-1})_x - (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})jj_v\Delta^{-1} + (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})jj_x\Delta^{-1}]\\ &+ C_3[-2 + 2(ij_v\Delta^{-1})_x - (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})ij_v\Delta^{-1} + (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})ij_x\Delta^{-1}]\\ &+ C_4[-2(ji_v\Delta^{-1})_x + (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})ji_v\Delta^{-1} - (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})ji_x\Delta^{-1}] = 0,\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}C_1[&2(ii_x\Delta^{-1})_v + (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})ii_v\Delta^{-1} - (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})ii_x\Delta^{-1}]\\ &+ C_2[-2(jj_x\Delta^{-1})_v - (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})jj_v\Delta^{-1} + (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})jj_x\Delta^{-1}]\\ &+ C_3[-2(ij_x\Delta^{-1})_v - (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})ij_v\Delta^{-1} + (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})ij_x\Delta^{-1}]\\ &+ C_4[-2 + 2(ji_x\Delta^{-1})_v + (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})ji_v\Delta^{-1} - (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})ji_x\Delta^{-1}] = 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим два оператора общего вида, исключая ядро:

$$X_k = \big(C_1^k w + C_3^k t\big)\partial_t + \eta^k\partial_x + \zeta^k\partial_v + \big(C_2^k t + C_4^k w\big)\partial_w, \quad k = 1, 2.$$

Коммутатор является решением определяющих уравнений, значит, он оператор того же вида:

$$\begin{aligned}[X_1, X_2] = {} & \big[w\big(C_1^1\big(C_3^2 - C_4^2\big) + C_1^2\big(C_4^1 - C_3^1\big)\big) + t\big(C_2^1 C_1^2 - C_2^2 C_1^1\big)\big]\partial_t\\ &+ \big(\eta^1\eta_x^2 + \zeta^1\eta_v^2 - \eta^2\eta_x^1 - \zeta^2\eta_v^1\big)\partial_x + \big(\eta^1\zeta_x^2 + \zeta^1\zeta_v^2 - \eta^2\zeta_x^1 - \zeta^2\zeta_v^1\big)\partial_v\\ &+ \big[w\big(C_1^1 C_2^2 - C_1^2 C_2^1\big) + t\big(C_2^2\big(C_3^1 - C_4^1\big) + C_2^1\big(C_4^2 - C_3^2\big)\big)\big]\partial_w.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Если классификационные соотношения справедливы для произвольных C_k, $k=1,2,3,4$, то из (3.5) следуют равенства

$$jj_v=\alpha_1(x)\Delta,\quad ij_v=\alpha_2(x)\Delta,\quad ji_v=\alpha_3(x)\Delta,\quad b+(ii_v\Delta^{-1})_v=0;$$

$$ii_x=\beta_1(v)\Delta,\quad ij_x=\beta_2(v)\Delta,\quad ji_x=\beta_3(v)\Delta,\quad b^{-1}+(jj_x\Delta^{-1})_x=0.$$

Отсюда получим $\alpha_1 i=\alpha_2 j$, $j\beta_1=i\beta_3$, тем самым $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_3=0$, иначе $I=\mathrm{const}$ и

$$i_x=0,\quad j_v=0,\quad \Delta=i_vj_x,\quad j=\alpha_3 j_x,\quad i=\beta_2 i_v,\quad b=-\frac{\alpha_3(x)i(v)}{j(x)\beta_2(v)}.$$

Значит, коэффициент b эквивалентен 1, что рассматривалось в п. 3.3.

Размерность алгебры меньше шести. Пусть $C_4=kC_1+nC_2+mC_3$, где k, n, m — фиксированные постоянные, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. Из (3.5) следует, что $b=\varphi_v$, $b^{-1}=\psi_x$, $\varphi_v\psi_x=1$,

$$\begin{gathered}(i+kj)i_v=-\varphi\Delta,\quad j(ni_v-j_v)=\alpha_1(x)\Delta,\quad mji_v-ij_v=\alpha_2(x)\Delta,\\ (i+kj)i_x=\beta_1(v)\Delta,\quad j(ni_x-j_x)=\psi\Delta,\quad mji_x-ij_x=\beta_2(v)\Delta.\end{gathered}\tag{3.8}$$

Операторы X_k, отвечающие постоянным C_k, $k=1,2,3$, таковы:

$$X_1=w\partial_t+\varphi\partial_x+\beta_1(v)\partial_v+kw\partial_w,\quad X_2=-\alpha_1(x)\partial_x+\psi\partial_v+(t+nw)\partial_w,$$

$$X_3=t\partial_t-\alpha_2(x)\partial_x+\beta_2(v)\partial_v+mw\partial_w.$$

Вычисляя коммутаторы по формуле (3.7) и сравнивая коэффициенты при ∂_t и ∂_w, получим $[X_1,X_2]=-X_3-nX_1$, $[X_1,X_3]=(1-m)X_1$, $[X_2,X_3]=(m-1)X_2$, откуда $k=0$, $m=-1$, $n=0$ и

$$\begin{gathered}\psi\varphi_v-\alpha_1\varphi_x+\varphi\alpha_1'=-\alpha_2,\quad \varphi\psi_x+\beta_1\psi_v-\psi\beta_1'=-\beta_2,\quad \alpha_2\varphi_x-\beta_2\varphi_v-\varphi\alpha_2'=2\varphi,\\ \beta_1\beta_2'-\beta_2\beta_1'=2\beta_1,\quad \alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1'=2\alpha_1,\quad \alpha_2\psi_x-\beta_2\psi_v+\psi\beta_2'=-2\psi_2.\end{gathered}\tag{3.9}$$

Если $\alpha_2=0$, то $\alpha_1=0$, $\psi\varphi_v=0$; противоречие с равенством $\varphi_v\psi_x=1$. Если $\beta_2=0$, то $\beta_1=0$, $\varphi\psi_x=0$; противоречие.

Значит, $\alpha_2\neq0$, $\beta_2\neq0$, и заменой $\langle\eta\rangle_1$, $\langle\zeta\rangle_2$ сделаем $\alpha_2=\beta_2=1$. Из (3.9) получим $\alpha_1=A_1e^{-2x}$, $\beta_1=B_1e^{-2v}$, $\varphi=e^{2x}\varphi_1(s)$, $\psi=e^{2v}\psi_1(s)$, $s=x+v$,

$$e^{2s}\psi_1\varphi_1'-A_1(4\varphi_1+\varphi_1')+1=0,\quad e^{2s}\varphi_1\psi_1'+B_1(4\psi_1+\psi_1')+1=0,\quad e^{2s}\varphi_1'\psi_1'=1,\tag{3.10}$$

где A_1, B_1 — постоянные.

Равенства (3.8) принимают вид

$$i=e^x i_1(s),\quad ij=\lambda(s),\quad \Delta=-\lambda'\neq0,\quad i_1i_1'=\varphi_1\lambda',$$

$$i_1(i_1+i_1')=-B_1e^{-2s}\lambda',\quad \lambda i_1^{-1}(\lambda i_1^{-1})'=A_1\lambda',\quad \lambda i_1^{-1}(-\lambda i_1^{-1}+(\lambda i_1^{-1})')=e^{2s}\psi_1\lambda'.$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\varphi_1=(A_1+J_0\lambda^{-1})(2A_1+J_0\lambda^{-1})^{-2},\\ \psi_1=(2A_1+J_0\lambda^{-1})[B_1(2A_1+J_0\lambda^{-1})e^{-4s}+e^{-2s}],\\ \lambda i_1^{-2}=2A_1+J_0\lambda^{-1},\quad \lambda'=\frac{-\lambda(2A_1+J_0\lambda^{-1})}{A_1+J_0\lambda^{-1}+B_1e^{-2s}(2A_1+J_0\lambda^{-1})^2}.\end{gathered}\tag{3.11}$$

Если $A_1 = 0$, то из (3.11) следует

$$J_0 i_1^2 = \lambda^2, \quad J_0 > 0, \quad \varphi_1 = J_0^{-1}\lambda, \quad \psi_1 = J_0\lambda^{-2}e^{-2s}(\lambda + B_1 J_0 e^{-2s}),$$
$$\lambda' = -\lambda^2(\lambda + J_0 B_1 e^{-2s})^{-1} \Rightarrow J_0 B_1 e^{-2s}(T_0 - 2\lambda) = \lambda^2,$$

а из (3.10) получим $\lambda(T_0-\lambda)(T_0-2\lambda)+T_0^2 = 0$. Значит, $\lambda = \mathrm{const}$; противоречие.

Пусть $A_1 \neq 0$, тогда переносом по x сделаем $A_1 = 1$.

Если $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, то $i_1 = e^{-s}$, $\psi_1 = \lambda$, $\varphi_1 = \lambda(\lambda + J_0)(2\lambda + J_0)^{-2}$, $\lambda^2 e^{2s} = 2\lambda + J_0$, $\lambda' = -\lambda(2\lambda + J_0)(\lambda + J_0)^{-1}$. Из (3.10) вытекает, что $(2\lambda + J_0)^3 = 4\lambda(\lambda + J_0) + (\lambda + J_0)^2$, откуда $\lambda = \mathrm{const}$; противоречие.

Значит, $B_1 \neq 0$, и переносом по v сделаем $B_1 = 1$. Равенства (3.11) принимают вид

$$\lambda^2 i_1^{-2} = 2\lambda + J_0, \quad \varphi_1 = \lambda(\lambda + J_0)(T_0 - 2\lambda)^{-2},$$
$$\lambda^2 e^{2s} = (2\lambda - J_0)(T_0 - 2\lambda), \quad \psi_1 = \lambda(T_0 - \lambda)(T_0 - 2\lambda)^{-2}.$$

Из (3.10) получим $T_0 = J_0$, так что $\lambda^2 e^{2s} + (2\lambda - J_0)^2 = 0$, и нет действительных решений.

Итак, постоянная C_4 линейно не выражается через C_1, C_2, C_3. Значит, она независимая и, возможно, $C_3 = kC_1 + nC_2$. Из классификационных соотношений (3.5) имеем

$$\begin{gathered} i(i-kj)_v + \varphi\Delta = 0, \quad (ni + j)j_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_2(x)\Delta, \\ i(i-kj)_x = \beta_1\Delta, \quad (j + ni)j_x + \psi\Delta = 0, \quad ji_x = \beta_2(v)\Delta. \end{gathered} \tag{3.12}$$

С помощью (3.12), (3.1) и (3.4) операторы, отвечающие постоянным C_1, C_2, C_4, принимают вид

$$X_1 = (w + kt)\partial_t + \varphi\partial_x + \beta_1(v)\partial_v, \quad X_2 = nt\partial_t + \alpha_1(x)\partial_x + \psi\partial_v + t\partial_w,$$
$$X_3 = -\alpha_2(x)\partial_x + \beta_2(v)\partial_v + w\partial_w.$$

Вычисляя коммутатор и сравнивая коэффициенты при ∂_t и ∂_w, имеем $[X_1, X_2] = X_3 + kX_2$, откуда $nw - t = knt$; противоречие.

Постоянные C_4, C_3 независимы, $C_2 = kC_1$. Из (3.5) получим

$$\begin{gathered} ii_v - kjj_v + \varphi\Delta = 0, \quad ij_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_2(x)\Delta, \\ ii_x - kjj_x = \psi\Delta, \quad ij_x = \beta_1(v)\Delta, \quad ji_x = \beta_2(v)\Delta. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Операторы алгебры без ядра отвечают постоянным C_1, C_3, C_4:

$$X_1 = w\partial_t + \varphi\partial_x + \psi\partial_v + kt\partial_w, \quad X_2 = t\partial_t + \alpha_1\partial_x - \beta_1\partial_v, \quad X_3 = -\alpha_2\partial_x + \beta_2\partial_v + w\partial_w.$$

Вычислим коммутаторы:

$$[X_1, X_2] = X_1 \Rightarrow k = 0, \quad [X_1, X_3] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\begin{gathered} -\alpha_1\varphi_x + \beta_1\varphi_v + \varphi\alpha_1' = \varphi, \ -\alpha_1\psi_x + \beta_1\psi_v - \psi\beta_1' = \psi, \ \alpha_2\varphi_x - \beta_2\varphi_v - \varphi\alpha_2' = -\varphi, \\ \alpha_2\psi_x - \beta_2\psi_v + \psi\beta_2' = -\psi, \quad \alpha_1\alpha_2' = \alpha_2\alpha_1', \quad \beta_1\beta_2' = \beta_2\beta_1'. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha_2 \neq 0$ (иначе $\Delta = 0$) и эквивалентность по x делает $\alpha_2 = 1$. Тогда $\beta_1 \neq 0$ (иначе $\varphi = 0 \Rightarrow b = 0$) и эквивалентность по v делает $\beta_1 = 1$. Отсюда $\varphi = e^v\varphi_1(x) = b$ (случай 3.3).

Значит, $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = A \neq 0$ — постоянная (иначе $\Delta = 0$), $\beta_1 \neq 0 \Rightarrow \beta_1 = 1$ (иначе следует случай 3.3), $\beta_2 = B \neq 0$ — постоянная. Из (3.14) вытекает, что

$$\varphi = e^{-x}\varphi_1(s), \quad \psi = e^{-x}\psi_1(s), \quad s = x + v,$$

$$(A - B)\varphi_1' = (A - 1)\varphi_1, \quad (A - B)\psi_1' = (A - 1)\psi_1.$$

Если $A \neq B$, то $\varphi_1 = \Phi_1 e^{Ks}$, $\psi_1 = \Psi_1 e^{Ks}$, $K = (A - 1)(A - B)^{-1}$ и φ есть произведение двух функций: одна зависит от x, другая — от v. Приходим к случаю 3.3.

Следовательно, $A = B = 1$. Из (3.13) $\Delta = ij_v = ji_v = ij_x = ji_x$, откуда $i = i_1(s)$, $j = j_1(s)$, тем самым $\Delta = 0$; противоречие.

Остается случай $C_1 = 0$, C_2–C_4 — произвольные постоянные. Из соотношений (3.5) получим

$$\begin{gathered} jj_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ij_v = \alpha_2(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_3(x)\Delta, \\ jj_x + \psi\Delta = 0, \quad ij_x = \beta_1(v)\Delta, \quad ji_x = \beta_2(v)\Delta. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Операторы без ядра имеют вид

$$X_1 = \alpha_1\partial_x - \psi\partial_v + t\partial_w, \quad X_2 = t\partial_t + \alpha_2\partial_x - \beta_1\partial_v, \quad X_3 = -\alpha_3\partial_x + \beta_2\partial_v + w\partial_w.$$

Коммутационные соотношения

$$[X_1, X_2] = -X_1, \quad [X_1, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_3] = 0$$

дают уравнения

$$\begin{gathered} \alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1 = \alpha_1, \quad \alpha_2\psi_x - \beta_1\psi_v + \psi\beta_1' = \psi, \quad \alpha_1'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_1 = \alpha_1, \\ \alpha_3\psi_x - \beta_2\psi_v + \psi\beta_2' = \psi, \quad \alpha_3'\alpha_2 = \alpha_2'\alpha_3, \quad \beta_2'\beta_1 = \beta_1'\beta_2. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Если $j_v \neq 0$, то $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ и замена x делает $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = -x = \alpha_2$, $i = -xj$, $\Delta = jj_v$, $j_x + \psi j_v = 0$, $-xj_x = \beta_1 j_v \Rightarrow \psi = \beta_1(v)x^{-1}$, $b^{-1} = -\beta_1(v)x^{-2}$. Пришли к случаю 3.3.

Если $j_v = 0$, то по (3.15) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$ и замена x делает $\alpha_3 = 1$, $\Delta = j_x i_v \neq 0$, $j = j_x \Rightarrow j = e^x$; а по (3.16) $\beta_1 \neq 0$ и замена v делает $\beta_1 = 1$, значит, $\beta_2 = B$ — постоянная, $\psi = e^{-v}\psi_1(x)$, откуда $b^{-1} = e^{-v}\psi_1'(x)$. Опять пришли к случаю 3.3.

При решении системы (3.3) предполагалось $\Delta \neq 0$. Рассмотрим случай $\Delta = 0 \Rightarrow j = f(i)$:

$$\eta i_x + \zeta i_v = -C_2 f - C_3 i, \tag{3.17}$$

$$f'(C_2 f + C_3 i) = C_1 i + C_4 f. \tag{3.18}$$

Если в (3.18) величины C_k линейно независимы или линейно выражаются через два или три линейно независимые величины, то из (3.18) следуют 4, 3 или 2 уравнения, из которых, исключив f', найдем $I = \mathrm{const}$ (случай 3.2).

Пусть $C_l = k_l C$, $l = 1, 2, 3, 4$, где C — произвольный параметр, k_l — фиксированные постоянные. Из (3.2) находим $\eta = k_1 C\varphi + \eta_1(x)$, $\zeta = k_2 C\psi + \zeta_1(v)$, $\varphi_v\psi_x = 1$. Параметру C отвечает оператор X_0, другие операторы имеют вид $X = \eta_1\partial_x + \zeta_1\partial_v$. Множество $\{X\}$ образует идеал J, который может быть бесконечным. Рассмотрим двумерную подалгебру в J. Если она абелева, то заменами $\langle\eta(x)\rangle_1$, $\langle\zeta(v)\rangle_2$ приведем ее к виду $\{\partial_x, \partial_v\}$. В этом случае из (3.17) следует, что $i = \text{const}$, тем самым $j = \text{const}$, $I = \text{const}$ (случай 3.2). Пусть двумерная подалгебра не абелева:

$$X_l = \eta_1^l(x)\partial_x + \zeta_1^l(v),\ l = 1, 2, \quad [X_1, X_2] = X_1.$$

Отсюда следуют уравнения подалгебры

$$\eta_1^1\eta_1^{2'} - \eta_1^2\eta_1^{1'} = \eta_1^1, \quad \zeta_1^1\zeta_1^{2'} - \zeta_1^2\zeta_1^{1'} = \zeta_1^1.$$

Если $\eta_1^1 \neq 0$, то заменой сделаем $\eta_1^1 = 1$, тем самым $\eta_1^2 = x$. При этом если $\zeta_1^1 \neq 0$, то заменой сделаем $\zeta_1^1 = 1$, $\zeta_1^2 = v$; если $\zeta_1^1 = 0$, $\zeta_1^2 \neq 0$, то заменой сделаем $\zeta_1^2 = 1$.

Из уравнений (3.17) имеем условия совместности $\eta_1^l i_x + \zeta_1^l i_v = 0$, $l = 1, 2$. Отсюда для двух случаев подалгебр $\{\partial_x + \partial_v,\ x\partial_x + v\partial_v\}$ и $\{\partial_x,\ x\partial_x + \partial_v\}$ получим $i = \text{const}$ (случай 3.2).

Остается возможность $\zeta_1 = 0$. Чтобы допускаемая уравнениями (0.1) алгебра имела размерность больше четырех, необходимо, чтобы идеал J был бесконечномерным.

Из (3.2) следует $2\eta_1' = (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})\eta_1$, $a_x a^{-1} = b_x b^{-1}$, откуда $i = 0$ (случай 3.1).

В разобранных частных случаях допускаемая системой (0.1) алгебра имеет размерность меньше пяти. Справедливо более сильное утверждение.

Теорема 4. *Размерность алгебры, допускаемой нелинейной системой* (0.1), *не превосходит четырех.*

Для доказательства надо разобрать случай леммы 2.

Таким образом, если размерность допускаемой алгебры больше четырех, то преобразованиями эквивалентности система (0.1) сводится к линейной.

§ 4. Системы, допускающие трехмерные алгебры Ли

Для классификации систем (0.1), допускающих трехмерные алгебры Ли преобразований, воспользуемся классификацией Бианки неподобных алгебр Ли, приведенной, например, в [3]. В этой классификации над полем действительных чисел 9 структур. Из них только 7 разрешимых алгебр содержат абелеву двумерную подалгебру (в нашем случае это ядро допускаемых алгебр $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_w$). Рассмотрим по-порядку 7 разрешимых трехмерных алгебр. Структура задается коммутационными соотношениями. Все структуры содержат соотношение $[X_1, X_2] = 0$. Далее записываем лишь остальные два коммутационных соотношения. Третий оператор представим в виде $X_3 = \xi\partial_t + \eta\partial_x + \zeta\partial_v + \chi\partial_w$.

4.1. Абелева алгебра $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = 0$. Из коммутационных соотношений следует, что ξ, η, ζ, χ не зависят от t, w. Из определяющих уравнений (2.1) получим $\xi_v = \eta_v = \chi_x = \zeta_x = \chi_v = \xi_x = 0$, т. е. $\xi = C_{01}$, $\eta = C_{02}$, $\eta = \eta(x)$, $\zeta = \zeta(v)$. Постоянным соответствует ядро, поэтому можно считать их равными нулю. Преобразования эквивалентности делают $\eta = 1$, $\zeta = -\varepsilon$, где ε равно 0 или 1. Последние два уравнения в (2.1) определяют $a = a(x + \varepsilon v)$, $b = b(x + \varepsilon v)$. Если $\varepsilon = 0$, то получим линейную систему (0.1). Нелинейная система (0.1) допускает оператор и имеет коэффициенты вида $X_3 = \partial_x - \partial_v$, $\quad a = a(x + v)$, $\quad b = b(x + v)$.

Аналогичные вычисления для других структур дают следующие представления.

4.2. $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_3, X_1] = 0$. Допускаемый оператор имеет вид $X_3 = w\partial_t + \varphi(x,v)\partial_x + \partial_v$, коэффициенты системы представляются в виде $b = \varphi_v$, $a = \varphi_v a_1(J)$, где J — интеграл уравнения $dx = \varphi(x,v)dv$, $a_1(J)$ — произвольная функция, а функция $\varphi(x,v)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi\varphi_{xv} - \varphi_x\varphi_v + \varphi_{vv} = 0.$$

4.3. $[X_2, X_3] = 0$, $[X_1, X_3] = X_1$. Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad a = e^{-x}a_1(x+v), \quad b = e^{-x}b_1(x+v),$$

где $a_1(s)$, $b_1(s)$ — произвольные функции.

4.4. $[X_2, X_3] = X_1 + X_2$, $[X_1, X_3] = X_1$. Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = (t+w)\partial_t + \varphi(x,v)\partial_x + \partial_v + w\partial_w, \quad a = \varphi_v e^{-2v}a_1(J), \quad b = \varphi_v,$$

где J, a_1, φ такие же, как в п. 4.2.

4.5. $[X_2, X_3] = X_2$, $[X_1, X_3] = X_1$. Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = t\partial_t + \partial_x - \partial_v + w\partial_w, \quad a = e^{-2x}a_1(x+v), \quad b = b_1(x+v),$$

где $a_1(s)$, $b_1(s)$ — произвольные функции.

4.6. $[X_2, X_3] = qX_2$ $(q \neq 0, 1)$, $[X_1, X_3] = X_1$. Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = t\partial_t + \partial_x - \partial_v + qw\partial_w, \quad a = e^{-(q+1)x}a_1(x+v), \quad b = e^{(q-1)x}b_1(x+v),$$

где $a_1(s)$, $b_1(s)$ — произвольные функции.

4.7. $[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2$ $(q^2 < 4)$, $[X_1, X_3] = X_2$. Допускаемый оператор и коэффициент b системы принимают вид

$$X_3 = -w\partial_t - \varphi(x,v)\partial_x + \psi(x,v)\partial_v + (t+qw)\partial_w, \quad b = \varphi_v,$$

коэффициент a находится из уравнения

$$\varphi a_x - \psi a_v = a(q + \varphi_x - \psi_v),$$

а функции φ, ψ удовлетворяют системе уравнений

$$\varphi_v\psi_x = 1, \quad \psi_x(\psi\varphi_v)_v + \varphi_v(\varphi\psi_x)_x = q.$$

Итак, получили 7 различных типов систем (0.1), допускающих трехмерные алгебры Ли.

§ 5. Системы, допускающие четырехмерные алгебры Ли

Для классификации систем (0.1), допускающих четырехмерные алгебры Ли преобразований, воспользуемся классификацией Г. И. Кручковича неподобных алгебр Ли, приведенной, например, в [3]. В этой классификации над полем действительных чисел 11 структур, каждая из которых содержит двумерную абелеву подалгебру. В представлении операторами абелева подалгебра соответствует ядру $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_w$ с коммутатором $[X_1, X_2] = 0$. Другие два оператора представим в виде $X_{2+l} = \xi_l\partial_t + \eta_l\partial_x + \zeta_l\partial_v + \chi_l\partial_w$, $l = 1, 2$. Далее записываем остальные 5 коммутационных соотношений четырехмерной алгебры Ли.

5.1. $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_1, X_4] = cX_1$, $[X_2, X_4] = X_2$, $[X_3, X_4] = (c-1)X_3$. Коммутационные соотношения, кроме последнего, дают $\xi_{1w} = 1$, $\eta_{1w} = \zeta_{1w} = \chi_{1w} = 0$, $\xi_{1t} = \eta_{1t} = \zeta_{1t} = \chi_{1t} = 0$; $\xi_{2t} = c$, $\eta_{2t} = \zeta_{2t} = \chi_{2t} = 0$, $\xi_{2w} = \eta_{2w} = \zeta_{2w} = 0$, $\chi_{2w} = 1$.

Определяющие уравнения (2.1), кроме двух последних, принимают вид $\xi_{lx} = \eta_{lx} = \chi_{lx} = 0$, $\xi_{lv} = \chi_{lv} = 0$, $l = 1, 2$, $\eta_{1v} = b = \varphi_x$, $\eta_{2v} = 0$. Отсюда, используя преобразования эквивалентности, получим $\xi_1 = w$, $\eta_1 = \varphi(x, v)$, $\zeta_1 = \varepsilon$ равно 0 или 1, $\chi_1 = 0$; $\xi_2 = ct$, $\eta_2 = \varepsilon_1 = 0$ или 1, $\zeta_2 = \zeta(v)$, $\chi_2 = w$.

Если $\epsilon = 0$, то эквивалентностью сделаем $\zeta = \epsilon_2$ равными 0 или 1.

Последнее коммутационное соотношение дает

$$(c-1)\varphi + \epsilon_1\varphi_x + \zeta(v)\varphi_v = 0, \quad \epsilon\zeta' = \epsilon(c-1).$$

Оставшиеся определяющие уравнения (2.1) принимают вид

$$\begin{gathered} b\varphi_x = b_x\varphi + b_v\epsilon, \quad 2a\varphi_x = a_x\varphi + a_v\epsilon, \\ -(c-1+\zeta')b = b_x\epsilon_1 + b_v\zeta, \quad (-c-1+\zeta')a = a_x\epsilon_1 + a_v\zeta. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Если $\varepsilon = 1$, то $\zeta_1 = 1$, $\zeta = (c-1)v$ при $c \neq 1$, $\varphi = v^{-1}\varphi_1(s)$, $s = x - \varepsilon_1(c-1)^{-1}\ln|v|$,

$$a = v^{-2(c-1)^{-1}}a_1(s), \quad b = -v^{-2}(\varphi_1 + \epsilon_1(c-1)^{-1}\varphi_1'), \tag{5.2}$$

функция $a_1(s)$ находится из уравнения

$$a_1'(\varphi_1 - \epsilon_1(c-1)^{-1}) = a_1(\varphi_1' + 2(c-1)^{-1}), \tag{5.3}$$

а функция $\varphi_1(s)$ удовлетворяет уравнению

$$(c-1)(\varphi_1' + 2)(\varphi_1(c-1) + \varphi_1') + \epsilon_1(\varphi_1'(c-1) + \varphi_1'')(\varphi_1(c-1) - 1) = 0. \tag{5.4}$$

При этом операторы допускаемой алгебры таковы:

$$X_3 = w\partial_t + v^{-1}\varphi_1(s)\partial_x + \partial_v, \quad X_4 = ct\partial_t + \varepsilon_1\partial_x + (c-1)v\partial_v + w\partial_w. \tag{5.5}$$

Если $\varepsilon = 1$, $c = 1$, то $\zeta = k$ — постоянная, $\varphi = \varphi_1(\varepsilon_1 v - kx)$, $b = \varepsilon_1\varphi_1'$, откуда $\varepsilon_1 = 1$. Из определяющих уравнений (5.1) получим $-kb\varphi_1' = \varphi_1 b_x + b_v$, $b_x + kb_v = 0$, следовательно, $\varphi_1' = 0$, т. е. $b = 0$; противоречие.

Если $\varepsilon = 0$, то $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varphi = e^{(1-c)x}\varphi_1(v)$, $b = e^{(1-c)x}\varphi_1'$. Из определяющих уравнений (5.1) следует, что $\varepsilon_2\varphi_1'' = 0$, $a = e^{(1-c)x}a_1(v)$. Преобразование эквивалентности сводит систему (0.1) к линейной.

Если $\varepsilon = 0$, $c = 1$, то $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2\varphi_v = 0$, отсюда $\varepsilon_2 = 0$, $c = 0$; противоречие.

Итак, алгебра с базисными операторами (5.5) допускается системой (0.1) с коэффициентами (5.2), которые определяются из уравнений (5.3), (5.4).

Аналогичные вычисления для других структур приводят к следующим представлениям.

5.2. $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_2$, $[X_1, X_4] = X_1$, $[X_2, X_4] = 0$, $[X_3, X_4] = 0$. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x + \varepsilon\partial_v + w\partial_w, \quad X_4 = t\partial_t + n\partial_x + m\partial_v,$$

$$a = \exp\frac{(n-1)v - (m-\varepsilon)x}{m - \varepsilon n}, \quad b = \exp\frac{(m+\varepsilon)x - (n+1)v}{m - \varepsilon n}, \quad m \neq \varepsilon n,$$

где ε равно 0 или 1, m, n — постоянные.

5.3. $[X_1, X_3] = X_1$, $[X_2, X_3] = X_2$, $[X_1, X_4] = X_2$, $[X_2, X_4] = -X_1$, $[X_3, X_4] = 0$. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = t\partial_t + \partial_x - \partial_v + w\partial_w, \quad X_4 = -w\partial_t - k^{-1}e^{k(x+v)}\partial_x - k^{-1}e^{-k(v+x)}\partial_v + w\partial_w,$$

$$a = -e^{-kv-(k+2)x}(1 + e^{2k(x+v)})^{1+k^{-1}}, \quad b = e^{k(x+v)}.$$

5.4. Разрешимые алгебры с абелевой трехмерной подалгеброй. Для четырех разрешимых алгебр с абелевой трехмерной подалгеброй имеются одинаковые коммутаторы $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = 0$. Далее записываем остальные три коммутатора.

5.4.1. $[X_1, X_4] = \varepsilon X_1$, $[X_2, X_4] = kX_2$, $[X_3, X_4] = lX_3$, ε равно 0 или 1. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad X_4 = \varepsilon t\partial_t + l(x\partial_x + v\partial_v) + kw\partial_w,$$

$$a = -|x+v|^{2(k+\varepsilon)l^{-1}}, \quad b = -|x+v|^{(k-\varepsilon)l^{-1}}$$

при $l \neq 0$;

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad X_4 = \varepsilon t\partial_t - m\partial_v + kw\partial_w,$$

$$a = -e^{(k+\varepsilon)m^{-1}(x+v)}, \quad b = -e^{(\varepsilon-k)m^{-1}(v+x)}$$

при $l = 0$. Здесь k, l, m, n — постоянные.

5.4.2. $[X_1, X_4] = kX_1 + X_2$, $[X_2, X_4] = -X_1 + kX_2$, $[X_3, X_4] = lX_3$. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x + \partial_v, \quad X_4 = (kt - w)\partial_t + (lx - \varphi_1(x-v))\partial_x + (lv + \psi_1(x-v))\partial_v + (t + kw)\partial_w,$$

$$b = -\varphi_1', \quad \varphi_1'\psi_1' = -1, \quad ab = m\exp(2(k-l+1)\operatorname{arctg} b), \quad b' = nb\exp(l\operatorname{arctg} b).$$

5.4.3. $[X_1, X_4] = kX_1 + X_2$, $[X_2, X_4] = kX_2$, $[X_3, X_4] = \varepsilon X_3$. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad X_4 = kt\partial_t + \varepsilon x\partial_x - (\varepsilon x - b'^{-1})\partial_v + (t + kw)\partial_w,$$

$$a = a(x+v), \quad b = b(x+v), \quad b' = -nbe^{-\varepsilon b}, \quad ab = e^{2(\varepsilon-k)b}.$$

Еще одна подалгебра отнесена в последнюю подсекцию.

5.5. Алгебры, не имеющие представления операторами. Для пяти алгебр нет нелинейных систем, допускающих их представления операторами:

1) $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_1, X_4] = 2X_1$, $[X_2, X_4] = X_2$, $[X_3, X_4] = X_2 + X_3$;

2) $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_1, X_4] = qX_1$, $[X_2, X_4] = X_3$, $[X_3, X_4] = -X_2 + qX_3$, $q^2 < 4$;

3) $[X_1,X_3]=0$, $[X_2,X_3]=0$, $[X_1,X_4]=kX_1+X_2$, $[X_2,X_4]=kX_2+X_3$, $[X_3,X_4]=\varepsilon X_3$;

4) $[X_1,X_3]=0$, $[X_2,X_3]=X_3$, $[X_1,X_4]=0$, $[X_2,X_4]=-X_4$, $[X_3,X_4]=-2X_2$;

5) $[X_1,X_3]=0$, $[X_2,X_3]=X_4$, $[X_1,X_4]=0$, $[X_2,X_4]=-X_3$, $[X_3,X_4]=X_2$.

Для примера докажем утверждение для алгебры с номером 5.

Из коммутационных соотношений, кроме последнего, следует представление

$$\xi_1=\xi(x,v)\sin w+\bar\xi(x,v)\cos w,\quad \xi_2=\xi(x,v)\cos w-\bar\xi(x,v)\sin w,$$

$$\eta_1=\eta(x,v)\sin w+\bar\eta(x,v)\cos w,\quad \eta_2=\eta(x,v)\cos w-\bar\eta(x,v)\sin w,$$

$$\zeta_1=\zeta(x,v)\sin w+\bar\zeta(x,v)\cos w,\quad \zeta_2=\zeta(x,v)\cos w-\bar\zeta(x,v)\sin w,$$

$$\chi_1=\chi(x,v)\sin w+\bar\chi(x,v)\cos w,\quad \xi_2=\chi(x,v)\cos w-\bar\chi(x,v)\sin w.$$

Из определяющих уравнений (2.1), кроме двух последних, следует, что функции ξ, $\bar\xi$, ζ, $\bar\zeta$, χ, $\bar\chi$ зависят только от v:

$$\eta=a\bar\xi',\quad \bar\eta=-a\xi',\quad (a\xi')_v+b\xi=0,\quad (a\bar\xi')_v+b\bar\xi=0,\quad \frac{b}{a}=\frac{\bar\chi'}{\zeta}=-\frac{\chi'}{\zeta}\equiv n^{-1}(v).$$

Если $\xi'\neq0$ ($\bar\xi'\neq0$), то $a=\xi_0(x)\xi'^{-1}\exp(-\xi n^{-1}\xi'^{-1})$, $b=an^{-1}$. Замена x преобразованием эквивалентности делает $\xi_0=1$. Далее годограф приводит к линейной системе.

Если $\xi'=\bar\xi'=0$, то $\eta=\bar\eta=0$, $a=n(v)b$, $\zeta=n\bar\chi'$, $\bar\zeta=-n\chi'$.

Замена v преобразованием эквивалентности делает $n=1$. Из предпоследнего уравнения определяющей системы (2.1) получим $b_v(\bar\chi'\sin w-\chi'\cos w)=0$, откуда $\chi'=\bar\chi'=0$, $\chi=A$, $\bar\chi=B$, где A, B — постоянные. Из последнего уравнения определяющей системы (2.1) имеем $A\cos w-B\sin w=0$ значит, $A=B=0$, откуда $X_3=X_4=0$; противоречие.

Итак, получили 7 типов систем (0.1), допускающих четырехмерные алгебры Ли.

§ 6. Доказательство теоремы 4

Учитывая рассмотренные частные случаи, теорему надо доказать при условии $I\neq\mathrm{const}$, $(\ln b)_{xv}\neq0$, $(g+h)_s\neq0$. По лемме 2 функции ξ, η линейны по переменным t, w, причем существенно зависят от них:

$$\eta=t\eta_1(x,v)+w\eta_2(x,v)+\eta_3(x,v),\quad \zeta=t\zeta_1(x,v)+w\zeta_2(x,v)+\zeta_3(x,v),\tag{6.1}$$

где $\eta_1^2+\eta_2^2\neq0$, $\zeta_1^2+\zeta_2^2\neq0$.

Подстановка представления (6.1) в определяющую систему (2.1), кроме двух последних уравнений, дает

$$\eta_2=a\xi_v,\quad t\eta_{1v}+w\eta_{2v}+\eta_{3v}=b\xi_w,\quad \eta_1=ab\xi_x;$$

$$\xi_1=a\chi_x,\quad \chi_t=b(t\zeta_{1x}+w\zeta_{2xv}+\zeta_{3x}),\quad b\zeta_2=a\chi_v.$$

Изучение совместности этой системы приводит к представлению

$$\xi=C_1tw+\frac12C_2w^2+C_3w+C_7t+\xi_0(x,v),\quad \chi=\frac12C_4t^2+C_5tw+C_6t+C_8w+\chi_0(x,v)\tag{6.2}$$

и уравнениям

$$\eta_{kv} = C_k b, \quad b\zeta_{kx} = C_{3+k}, \quad k = 1, 2, 3; \tag{6.3}$$

$$\eta_1 = ab\xi_{0x}, \quad \eta_2 = a\xi_{0v}, \quad \zeta_1 = a\chi_{02}, \quad \zeta_2 = ab^{-1}\chi_{0v}, \tag{6.4}$$

где C_i — произвольные постоянные.

Последние два уравнения системы (2.1) после подстановки представления решения (6.1), (6.2) и приравнивания к нулю коэффициентов при свободных переменных t, w дают равенства

$$\begin{aligned} \eta_{1x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)\eta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta_1, \\ C_5 - \zeta_{1v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)\zeta_1; \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} \eta_{2x} - C_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)\eta_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta_2, \\ -\zeta_{2v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)\zeta_2; \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} \eta_{3x} - C_7 &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)\eta_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta_3, \\ C_8 - \zeta_{3v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)\zeta_3. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Условия совместности равенств (6.4)

$$\left(\frac{\zeta_1}{a}\right)_v = \left(\frac{b}{a}\zeta_2\right)_x, \quad \left(\frac{\eta_1}{ab}\right)_v = \left(\frac{\eta_2}{a}\right)_x \tag{6.8}$$

определяют функции ξ_0, χ_0 через криволинейные интегралы:

$$\xi_0 = \int a^{-1}b^{-1}(\eta_1\,dx + b\eta_2\,dv), \quad \chi_0 = \int a^{-1}(\zeta_1\,dx + b\zeta_2\,dv). \tag{6.9}$$

Условия совместности (6.5) с (6.3) при $k = 1$ имеют вид

$$\eta_1 j_x + \zeta_1 j_v = -C_1 i - C_5 j, \quad \eta_1 i_x + \zeta_1 i_v = -C_4 i. \tag{6.10}$$

Условия совместности (6.6) с (6.3) при $k = 2$ имеют вид

$$\eta_2 j_x + \zeta_2 j_v = -C_2 i, \quad \eta_2 i_x + \zeta_2 i_v = -C_1 i - C_5 j. \tag{6.11}$$

Условия совместности (6.7) с (6.3) при $k = 3$ имеют вид

$$\eta_3 j_x + \zeta_3 j_v = -C_3 i - C_8 j, \quad \eta_3 i_x + \zeta_3 i_v = -C_6 j - C_7 i. \tag{6.12}$$

Если $\Delta = j_x i_v - i_x j_v \neq 0$, то из (6.10)–(6.12) получим

$$\eta_1 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_1 i + C_5 j & j_v \\ C_4 j & i_v \end{vmatrix}, \quad \zeta_1 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_1 i + C_5 j & j_x \\ C_4 j & i_x \end{vmatrix} \tag{6.13}$$

— линейные однородные функции постоянных C_1, C_4, C_5;

$$\eta_2 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_2 i & j_v \\ C_1 i + C_5 j & i_v \end{vmatrix}, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_2 i & j_x \\ C_1 i + C_5 j & i_x \end{vmatrix} \tag{6.14}$$

— линейные однородные функции постоянных C_1, C_2, C_5;

$$\eta_3 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_3 i + C_8 j & j_v \\ C_7 i + C_6 j & i_v \end{vmatrix}, \quad \zeta_3 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_3 i + C_8 j & j_x \\ C_7 i + C_6 j & i_x \end{vmatrix} \tag{6.15}$$

— линейные однородные функции постоянных C_3, C_6–C_8.

Подстановка в (6.8) приводит к классификационным соотношениям

$$\begin{aligned} &(C_1 + ji^{-1}C_5)(ii_v + bji_x + 2bij_x) - 2C_2 bii_x - C_4 ji^{-1}(ij_v + bjj_x) = 0, \\ &-(C_1 ij^{-1} + C_5)(2ji_v + ij_v + bjj_x) + C_2(i^2 j^{-1} i_v + bii_x) + 2C_4 jj_v = 0. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Подстановка (6.13)–(6.15) в (6.3) приводит к шести классификационным соотношениям

$$\begin{aligned} -C_1\left[\left(\frac{ii_v}{\Delta}\right)_v + b\right] + C_4\left(\frac{jj_v}{\Delta}\right)_v - C_5\left(\frac{ji_v}{\Delta}\right)_v = 0, \\ C_1\left(\frac{ii_v}{\Delta}\right)_x - C_4\left[\left(\frac{jj_x}{\Delta}\right)_x + b^{-1}\right] + C_5\left(\frac{ji_x}{\Delta}\right)_x = 0; \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned} C_1\left(\frac{ij_v}{\Delta}\right)_v - C_2\left[\left(\frac{ii_v}{\Delta}\right)_v + b\right] + C_5\left(\frac{jj_v}{\Delta}\right)_v = 0, \\ -C_1\left(\frac{ij_x}{\Delta}\right)_x + C_2\left(\frac{ii_x}{\Delta}\right)_x - C_5\left[\left(\frac{jj_x}{\Delta}\right)_x + b^{-1}\right] = 0; \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned} -C_3\left[\left(\frac{ii_v}{\Delta}\right)_v + b\right] + C_6\left(\frac{jj_v}{\Delta}\right)_v + C_7\left(\frac{ij_v}{\Delta}\right)_v - C_8\left(\frac{ji_v}{\Delta}\right)_v = 0, \\ C_3\left(\frac{ii_x}{\Delta}\right)_x - C_6\left[\left(\frac{jj_x}{\Delta}\right)_x + b^{-1}\right] - C_7\left(\frac{ij_x}{\Delta}\right)_x + C_8\left(\frac{ji_x}{\Delta}\right)_x = 0. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Подстановка (6.13)–(6.15) в (6.5)–(6.7) приводит еще к шести классификационным соотношениям, которые здесь не выписываем.

Представление для решения (6.1), (6.2) определяющих уравнений (2.1) с учетом формул (6.9) принимают вид

$$\begin{aligned} \xi &= C_1 tw + \frac{1}{2}C_2 w^2 + C_3 w + C_7 t + C_1\int\frac{i(-i_v\,dx + bj_v\,dv)}{ab\Delta} - C_2\int\frac{ii_v\,dv}{a\Delta} \\ &\qquad + C_4\int\frac{jj_v\,dx}{ab\Delta} + C_5\int\frac{j(-i_v\,dx + bj_v\,dv)}{ab\Delta} + C_{01}, \\ \eta &= t\Big(-C_1\frac{ii_v}{\Delta} + C_4\frac{jj_v}{\Delta} - C_5\frac{ji_v}{\Delta}\Big) + w\Big(-C_2\frac{ii_v}{\Delta} + C_1\frac{ij_v}{\Delta} + C_5\frac{jj_v}{\Delta}\Big) \\ &\qquad - C_3\frac{ii_v}{\Delta} + C_6\frac{jj_v}{\Delta} + C_7\frac{ij_v}{\Delta} - C_8\frac{ji_v}{\Delta}, \\ \zeta &= t\Big(C_1\frac{ii_x}{\Delta} - C_4\frac{jj_x}{\Delta} + C_5\frac{ji_x}{\Delta}\Big) + w\Big(-C_1\frac{ij_x}{\Delta} + C_2\frac{ii_x}{\Delta} - C_5\frac{jj_x}{\Delta}\Big) \\ &\qquad + C_3\frac{ii_x}{\Delta} - C_6\frac{jj_x}{\Delta} - C_7\frac{ij_x}{\Delta} + C_8\frac{ji_x}{\Delta}, \\ \chi &= \frac{1}{2}C_4 t^2 + C_5 tw + C_6 t + C_8 w + C_1\int\frac{i(i_x\,dx - bj_x\,dv)}{a\Delta} + C_2\int\frac{bii_x\,dv}{a\Delta} \\ &\qquad - C_4\int\frac{jj_x\,dx}{a\Delta} + C_5\int\frac{j(i_x\,dx - bj_x\,dv)}{a\Delta} + C_{02}. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Из этих формул видно, что размерность векторного пространства решений не более 10 по числу постоянных. Ядру отвечают постоянные C_{01}, C_{02}.

Имеется 14 классификационных соотношений на постоянные C_k и функции a, b.

Векторное пространство решений образует алгебру Ли, поэтому коммутатор операторов X_l, $l = 1, 2$, отвечающих наборам постоянных C_k^l, $k = 1, \dots, 8$, снова является решением.

Вычисляя коммутатор по правилу

$$[X_1, X_2] = (X_1\xi^2 - X_2\xi^1)\partial_t + (X_1\eta^2 - X_2\eta^1)\partial_x + (X_1\zeta^2 - X_2\zeta^1)\partial_v + (X_1\chi^2 - X_2\chi^1)\partial_w,$$

убедимся, что при ∂_t и ∂_w стоят выражения с кубическими слагаемыми по переменным t и w, а при ∂_x, ∂_v — выражения с квадратичными слагаемыми по t и w. Поскольку коммутатор должен линейно выражаться через представление решения (6.20), то коэффициенты при кубических слагаемых по t, w при ∂_t, ∂_w и при квадратичных слагаемых по t, w при ∂_x, ∂_v равны нулю. Это приводит к пропорциям

$$\frac{C_5^2}{C_4^2} = \frac{C_5^1}{C_4^1}, \quad \frac{C_5^2}{C_2^2} = \frac{C_5^1}{C_2^1}, \quad \frac{C_4^2}{C_1^2} = \frac{C_4^1}{C_1^1} \tag{6.21}$$

и уравнениям

$$C_4^1\eta_2^2 + 2\eta_1^1\eta_{1x}^2 + 2\zeta_1^1\eta_{1v}^2 = C_4^2\eta_2^1 + 2\eta_1^2\eta_{1x}^1 + 2\zeta_1^2\eta_{1v}^1,$$

$$\begin{aligned} C_1^1\eta_1^2 + C_5^1\eta_2^2 + \eta_1^1\eta_{2x}^2 + \eta_2^1\eta_{1x}^2 + \zeta_1^1\eta_{2v}^2 + \zeta_2^1\eta_{1v}^2 \\ = C_1^2\eta_1^1 + C_5^2\eta_5^1 + \eta_1^2\eta_{2x}^1 + \eta_2^2\eta_{1x}^1 + \zeta_1^2\eta_{2v}^1 + \zeta_2^2\eta_{1v}^1, \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} C_2^1\eta_1^2 + 2\eta_2^1\eta_{2x}^2 + 2\zeta_2^1\eta_{2v}^2 = \eta_2^2\eta_{2x}^1 + 2\zeta_2^2\eta_{2v}^1 + C_2^2\eta_1^1, \\ C_4^1\zeta_2^2 + 2\eta_1^1\zeta_{1x}^2 + 2\zeta_1^1\zeta_{1v}^2 = C_4^2\zeta_2^1 + 2\eta_1^2\zeta_{1x}^1 + 2\zeta_1^2\zeta_{1v}^1, \end{gathered} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned} C_1^1\zeta_1^2 + C_5^1\zeta_2^2 + \eta_1^1\zeta_{2x}^2 + \eta_2^1\zeta_{1x}^2 + \zeta_1^1\zeta_{2v}^2 + \zeta_2^1\zeta_{1v}^2 \\ = C_1^2\zeta_1^1 + C_5^2\zeta_2^1 + \eta_1^2\zeta_{2x}^1 + \eta_2^2\zeta_{1x}^1 + \zeta_1^2\zeta_{2v}^1 + \zeta_2^2\zeta_{1v}^1, \end{aligned}$$

$$C_2^1\zeta_1^2 + 2\eta_2^1\zeta_{2x}^2 + 2\zeta_2^1\zeta_{2v}^2 = C_2^2\zeta_1^1 + 2\eta_2^2\zeta_{2x}^1 + 2\zeta_2^2\zeta_{2x}^1.$$

Из соотношений (6.21) следует, что линейное пространство величин C_1, C_2, C_4, C_5 одномерно. Рассмотрим четыре возможных случая.

6.1. $C_4 = kC_1$, $C_2 = nC_1$, $C_5 = lC_1$, $C_1 \neq 0$. Постоянной $C_1 \neq 0$ отвечает оператор (это следует из (6.20))

$$\begin{aligned} X_0 = \big(tw + (1/2)nw^2 + C_3^0 w + C_7^0 t + \xi_0\big)\partial_t + \big(t\eta_1 + w\eta_2 + \eta_3^0\big)\partial_x \\ + \big(t\zeta_1 + w\zeta_2 + \zeta_3^0\big)\partial_v + \big((1/2)kt^2 + ltw + C_6^0 t + C_8^0 w + \chi_0\big)\partial_w. \end{aligned}$$

При $C_1 = 0$ получим еще не более четырех линейно независимых операторов, отличающихся друг от друга лишь значением постоянных C_3, C_6–C_8:

$$X_\sigma = \big(C_3^\sigma w + C_7^\sigma t\big)\partial_t + \eta_3^\sigma\partial_x + \zeta_3^\sigma\partial_v + \big(C_8^\sigma w + C_6^\sigma t\big)\partial_w, \quad \sigma = 1, 2, \dots, p, \tag{6.23}$$

$p \in \mathbb{N}$, $p \leq 4$.

Вычислим коммутаторы и запишем условия алгебры:

$$[X_0, X_\sigma] = \lambda_\sigma X_0 + \sum_{\tau \neq 0} \mu_\tau^\sigma X_\tau. \tag{6.24}$$

Сравнивая коэффициенты при степенях переменных t и w, получим

$$C_6^\sigma = (1/2)kC_3^\sigma, \quad C_3^\sigma(kn-4l) = 0, \quad \lambda_\sigma = -lC_3^\sigma - C_8^\sigma,$$

$$C_3^\sigma(ln-2)+n\bigl(C_7^\sigma - C_8^\sigma\bigr) = 0, \quad k(C_8^\sigma - C_7^\sigma) = 0, \quad C_3^\sigma(l^2-(1/2)k)+l\bigl(C_8^\sigma - C_7^\sigma\bigr) = 0.$$

Решения этих уравнений представляются четырьмя случаями.

Если $C_3 \neq 0$, $C_8 \neq C_7$, то $k = l = 0$, $C_6 = 0$, $C_3 = \frac{1}{2}n(C_7 - C_8)$, $\lambda_\sigma = -C_8^\sigma$, $n \neq 0$.

Если $C_3 = 0$, $C_8 \neq C_7$, то $n = k = l = 0$, $C_6 = 0$, $\lambda_\sigma = -C_8^\sigma$.

Если $C_3 \neq 0$, $C_8 = C_7$, то $n = 2l^{-1}$, $k = 2l^2$, $\lambda_\sigma = -lC_3^\sigma - C_7^\sigma$, $C_6 = l^2C_3$.

Если $C_3 = 0$, $C_8 = C_7$, то $C_6 = 0$, $\lambda_\sigma = C_7^\sigma$ и алгебра четырехмерна.

В первых трех случаях алгебра может быть пятимерной. Считаем, что $\sigma = 1, 2$.

6.1.1. $C_6 = 0$, $C_3 = \frac{1}{2}n(C_7 - C_8)$, $n \neq 0$, $k = l = 0$, $C_7 \neq C_8$, C_7, C_8 — произвольные постоянные. Выберем базис алгебры так, что $C_7^1 = 1$, $C_8^1 = 0$, $C_7^2 = 0$, $C_8^2 = 1$, $C_7^0 = C_8^0 = 0$ и операторы базиса принимают вид

$$X_0 = (tw + (1/2)nw^2 + \xi_0)\partial_t + (t\eta_1 + w\eta_2)\partial_x + (t\zeta_1 + w\zeta_2)\partial_v + \chi_0\partial_w,$$

$$X_1 = ((1/2)nw + t)\partial_t + \eta_3^1\partial_x + \zeta_3^1\partial_v, \quad X_2 = -(1/2)nw\partial_t + \eta_3^2\partial_x + \zeta_3^2\partial_v + w\partial_w,$$

откуда

$$[X_1, X_2] = 0. \tag{6.25}$$

По формулам (6.20) имеем $\Delta\eta_3^1 = ij_v$, $\Delta\eta_3^2 = -ji_v$, $\Delta\zeta_3^1 = -ij_x$, $\Delta\zeta_3^2 = ji_x$, $\Delta\eta_1 = -ii_v$, $\Delta\eta_2 = i(j_v - ni_v)$, $\Delta\zeta_1 = ii_x$, $\Delta\zeta_2 = i(ni_x - j_x)$. Отсюда следует $\eta_2 = n\eta_1 + \eta_3^1$, $\zeta_2 = n\zeta_1 + \zeta_3^1$ и из условий алгебры (6.24), (6.25) получим $\eta_1 = \zeta_1 = 0$, т. е. $i_x = i_v = 0$ или $\Delta = 0$; противоречие.

6.1.2. $C_3 = 0$, $C_6 = 0$, $n = k = l = 0$, $C_7 \neq C_8$, C_7, C_8 — произвольные постоянные. Выберем базис так, чтобы $C_7^1 = 1$, $C_8^1 = 0$, $C_7^2 = 0$, $C_8^2 = 1$, $C_7^0 = C_8^0 = 0$. Тогда операторы базиса имеют вид

$$X_0 = (tw + \xi_0)\partial_t + (t\eta_1 + w\eta_2)\partial_x + (t\zeta_1 + w\zeta_2)\partial_v + \chi_0\partial_w,$$

$$X_1 = t\partial_t + \eta_3^1\partial_x + \zeta_3^1\partial_v, \quad X_2 = \eta_3^2\partial_x + \zeta_3^2\partial_v + w\partial_w \quad \Rightarrow \quad (6.25).$$

По формулам (6.20) $\eta_3^1 = ij_v\Delta^{-1} = \eta_2$, $\zeta_3^1 = -ij_x\Delta^{-1} = \zeta_2$, $\eta_3^2 = -ji_v\Delta^{-1} = ji^{-1}\eta_1$, $\zeta_3^2 = ji_x\Delta^{-1} = ji^{-1}\zeta_1$. Условия алгебры (6.23), (6.25) выполняются в силу (6.10) и (6.11). Из классификационных соотношений (6.16)–(6.19) имеем

$$ii_v + b(ji_x + 2ij_x) = 0 \quad 2ji_v + ij_v + bjj_x = 0,$$

$$ii_v = -\varphi\Delta, \quad ij_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_2(x)\Delta,$$

$$ii_x = \beta_1(v)\Delta, \quad ij_x = \beta_2(v)\Delta, \quad ji_x = \beta_3(v)\Delta, \quad \text{где } b = \varphi_v.$$

Подстановка в первое равенство выражений для производных дает уравнение для определения φ:

$$\varphi = \varphi_0(x)\exp\left(\int(\beta_1 + 2\beta_2)^{-1}\,dv\right) \quad \Rightarrow \quad (\ln b)_{xv} = 0;$$

противоречие.

6.1.3. $C_8 = C_7$, $C_6 = l^2C_3$, $n = 2l^{-1}$, $k = 2l^2$, $l \neq 0$, $C_3 \neq 0$, C_7, C_3 — произвольные постоянные. Базис пятимерной алгебры такой:

$$X_0 = (tw + l^{-1}w^2 + \xi_0)\partial_t + (t\eta_1 + w\eta_2)\partial_x + (t\zeta_1 + w\zeta_2)\partial_v + (l^2t^2 + ltw + \chi_0)\partial_w,$$

$$X_1 = w\partial_t + \eta_3^1\partial_x + \zeta_3^1\partial_v + l^2 t\partial_w, \quad X_2 = t\partial_t + \eta_3^2\partial_x + \zeta_3^2\partial_v + w\partial_w \Rightarrow (6.25),$$

где в силу (6.20) $\eta_1 = \Delta^{-1}(-ii_v + 2l^2 ji_v - lji_v)$, $\eta_2 = (-2l^{-1}ii_v + ij_v + ljj_v)\Delta^{-1}$, $\zeta_1 = \Delta^{-1}(ii_x - 2l^2 jj_x + lji_x)$, $\zeta_2 = \Delta^{-1}(-ij_x + 2l^{-1}ii_x - ljj_x)$, $\eta_3^1 = \Delta^{-1}(-ii_v + l^2 jj_v)$, $\zeta_3^1 = \Delta^{-1}(ii_x - l^2 jj_x,)$ $\eta_3^2 = \Delta^{-1}(ij_v - ji_v)$, $\zeta_3^2 = \Delta^{-1}(-ij_x + ji_x) \Rightarrow \zeta_1 + l\zeta_2 = 3\zeta_3^1 + l\zeta_3^2$, $\eta_1 + l\eta_2 = 3\eta_3^1 + l\eta_3^2$.

Из условий алгебры $[X_0, X_1] = -lX_0$, $[X_0, X_2] = -X_0$, $[X_1, X_2] = 0$ следуют соотношения $3\eta_3^1 + l\eta_3^2 = 0$, $3\zeta_3^1 + l\zeta_3^2 = 0$.

Из (6.19) получим $\eta_{3v}^1 = b$, $\eta_{3v}^2 = 0$, $\zeta_{3x}^1 = l^2 b^{-1}$, $\zeta_{3x}^2 = 0$. Отсюда $b = 0$; противоречие.

6.2. $C_1 = 0$, $C_4 = kC_2$, $C_5 = lC_2$, $C_2 \neq 0$. Постоянной $C_2 \neq 0$ соответствует оператор (по формулам (6.20))

$$X_0 = ((1/2)w^2 + C_3^0 w + C_7^0 t + \xi_0)\partial_t + \big(t\eta_1 + w\eta_2 + \eta_3^0\big)\partial_x + \big(t\zeta_1 + w\zeta_2 + \zeta_3^0\big)\partial_v + \big((1/2)kt^2 + ltw + C_6^0 t + C_8^0 w + \chi_0\big)\partial_w.$$

Если положить $C_2 = 0$, то получим еще не более четырех линейно независимых операторов вида (6.23), отличающихся друг от друга лишь значениями постоянных C_3, C_6–C_8. Выполняются условия алгебры (6.24).

Приравнивая к нулю коэффициенты при квадратичных по t, w слагаемых, приходим к равенствам

$$\lambda_\sigma = C_7^\sigma - 2C_8^\sigma, \quad C_6 = 0, \quad C_3 l = C_3 k = 0, \quad l(C_7 - C_8) = 0, \quad k(C_7 - C_8) = 0.$$

Алгебра четырехмерна, если $C_3 = C_6 = 0$, $C_7 = C_8$.

Если $k = l = 0$, $C_6 = 0$, то алгебра может быть шестимерна. В этом случае из классификационных соотношений (6.16) следует, что $i_x = 0$, $i_v = 0$, откуда $\Delta = 0$; противоречие.

6.3. $C_1 = C_2 = 0$, $C_5 = kC_4$, $C_4 \neq 0$. Постоянной $C_4 \neq 0$ отвечает оператор (6.20):

$$X_0 = \big(C_3^0 w + C_7^0 t + \xi_0\big)\partial_t + \big(t\eta_1 + w\eta_2 + \eta_3^0\big)\partial_x + \big(t\zeta_1 + w\zeta_2 + \zeta_3^0\big)\partial_v + \big((1/2)t^2 + ktw + C_6^0 t + C_8^0 w + \chi_0\big)\partial_w.$$

Другие операторы с $C_4 = 0$ имеют вид (6.23). Из уравнения алгебры (6.24) получаем $C_3 = 0$ и $C_8 = C_7 + 2kC_6$ при $k \neq 0$.

Если $k = 0$, то $C_3 = C_1 = C_2 = C_5 = 0$, $C_4 \neq 0$ и из (6.16) вытекает, что $j_v = j_x = 0 \Rightarrow \Delta = 0$; противоречие.

При $k \neq 0$ из (6.16)–(6.19) получим $b^{-1} = \psi_x$;

$$k(ii_v + bji_x + 2bij_x) = ij_v + bjj_x, \quad k(2ji_v + ij_v + bjj_x) = 2jj_v; \tag{6.26}$$

$$jj_v - kji_v = \alpha_1(x)\Delta,\ jj_v = \alpha_2(x)\Delta,\ jj_v - 2kji_v = \alpha_3(x)\Delta,\ ij_v - ji_v = \alpha_4(x)\Delta; \tag{6.27}$$

$$jj_x + \psi\Delta = kjj_x = \beta_1(v)\Delta = 2kji_x - \beta_2(v)\Delta, \quad ji_x - ij_x = \beta_3(v)\Delta. \tag{6.28}$$

При $\alpha_2 \neq 0$ из уравнений (6.27) следует, что $i = j\alpha(x)$, $\Delta = -\alpha' jj_v \neq 0$, $\alpha_1 = (k\alpha - 1)\alpha'^{-1}$, $\alpha_2 = -\alpha'^{-1}$, $\alpha_3 = (2k\alpha - 1)\alpha'^{-1}$ и $\alpha_4 = 0$.

Из уравнений (6.28) вытекает, что $j = j_0(x)\beta(v)$, $j_0(x) = J_0\alpha^{m-1}$, J_0, m — постоянные, $\beta_1 = \beta_2 = -mk\beta\beta'^{-1}$, $\beta_3 = -\beta\beta'^{-1}$.

Из (6.26), исключая b, получим тождество по переменной α:

$$(m-1)k\alpha(k\alpha - 1) - (3k\alpha - 2)\,[(m-1)(3k\alpha - 1) + k\alpha] = 0.$$

При $\alpha = 0$ будет $m = 1$. Остается тождество $3k\alpha = 2$, из которого $k = 0$, $2 = 0$; противоречие.

В завершение рассмотрим случай $\alpha_2 = 0$, при котором $j = j_0(x)$, $\Delta = j_0' i_v \neq 0$. Из (6.28) следует, что $i = i_0(x)\beta(v)$, $\psi = \beta_1 - j_0 i_0^{-1} \beta'^{-1} \Rightarrow b^{-1} = \psi_x = -\big(j_0 i_0^{-1}\big)' \beta'^{-1} \Rightarrow (\ln b)_{xv} = 0$; противоречие.

6.4. $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_5 \neq 0$. Постоянной C_5 соответствует оператор

$$X_0 = \big(C_3^0 w + C_7^0 t + \xi_0\big)\partial_t + \big(t\eta_1 + w\eta_2 + \eta_3^0\big)\partial_x + \big(t\zeta_1 + w\zeta_2 + \zeta_3^0\big)\partial_w + \big(tw + C_6^0 t + C_8^0 w + \chi_0\big)\partial_w.$$

Другие операторы алгебры имеют вид (6.23). Из уравнений алгебры (6.24) следует, что $C_3 = 0$, $C_6 = 0$. Из (6.17)–(6.19) получаем $i = \alpha(x)j$, $j = j_0(x)\beta(v)$, $j_0 = J_0\alpha^k$; J_0, k — постоянные. Тогда из (6.16)

$$k = -3/8, \quad b = -3\alpha j_0 {j'_0}^{-1} \beta' \beta^{-1},$$

т. е. $(\ln b)_{xv} = 0$; противоречие.

Рассмотрим последнюю возможность.

6.5. $\Delta = 0 \Rightarrow j = f(i)$. Из (6.10)–(6.12) получим

$$f'(i)C_4 f = C_1 i + C_5 f, \quad f'(C_1 i + C_5 f) = C_2 i, \quad f'(C_6 f + C_7 i) = C_3 i + C_8 f, \tag{6.29}$$

при этом $f i^{-1} = g \neq \mathrm{const}$. С переменной g уравнения (6.29) принимают вид

$$C_4(ig' - g) = C_1 g^{-1} + C_5, \quad (ig' - g)(C_5 g + C_1) = C_2.$$

Исключая g', имеем тождество по переменной g:

$$C_2 C_4 g = (C_1 + C_5 g)^2.$$

Отсюда $C_5 = C_1 = 0$, $C_2 C_4 = 0$.

Если $C_2 = 0$, $C_4 = 1$, то получим противоречие из 1-го уравнения (6.29). Если $C_2 = 1$, $C_4 = 0$, то получим противоречие из 2-го уравнения (6.29).

Итак, если размерность алгебры Ли, допускаемой нелинейной системой (0.1), больше четырех, то приходим к противоречию.

Заключение

При решении задачи групповой классификации нелинейной системы (0.1) использованы следующие факты.

1. Вычислена бесконечная группа преобразований эквивалентности и ее инварианты.
2. Система определяющих уравнений алгебры Ли приведена в инволюцию.
3. Использовано важное свойство определяющих уравнений: коммутатор двух решений есть решение определяющей системы.
4. Доказано, что размерность алгебры Ли , допускаемой нелинейной системой (0.1), не больше четырех.
5. Для классификации систем (0.1) использованы неподобные структуры алгебр Ли размерностей 3 и 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ibragimov N. H., Khabirov S. V.* Contact transformation group classification of nonlinear wave equation // Nonlinear Dynam. 2000. V. 22. P. 61–71.

2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

3. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.

4. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.

Статья поступила 14 ноября 2007 г.

Хабиров Салават Валеевич
Институт механики УНЦ РАН, пр. Октября, 71, Уфа 450054
habirov@anrb.ru