*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2009. Том 50, № 4*

*УДК 512.542*

# О $p$–СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С $\mu$–ДОБАВЛЯЕМОЙ СИЛОВСКОЙ $p$–ПОДГРУППОЙ

**В. С. Монахов, А. В. Шныпарков**

**Аннотация.** Подгруппа $H$ группы $G$ называется *$\mu$-добавляемой в $G$*, если существует подгруппа $K$ такая, что $G = HK$ и $H_1K$ — собственная подгруппа группы $G$ для каждой максимальной подгруппы $H_1$ из $H$. Для начальных значений $p$ устанавливается $p$-сверхразрешимость конечной группы с $\mu$-добавляемой силовской $p$-подгруппой.

**Ключевые слова:** конечная группа, сверхразрешимая группа, силовская подгруппа, добавление.

## Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Пусть $\pi$ — некоторое множество простых чисел. Неединичная подгруппа $H$ группы $G$ называется *$\mu_\pi$-добавляемой подгруппой в $G$*, если существует такая подгруппа $B$, что $G = HB$ и $H_1B$ — собственная подгруппа в $G$ для каждой максимальной подгруппы $H_1$ из $H$, у которой $\pi(H : H_1) \subseteq \pi$. В этой ситуации подгруппу $B$ назовем *$\mu_\pi$-добавлением* к $H$. Здесь $\pi(H : H_1)$ — множество простых делителей индекса подгруппы $H_1$ в группе $H$.

В случае, когда $\pi$ — множество всех простых чисел, $\mu_\pi$-добавляемую подгруппу будем называть *$\mu$-добавляемой*, а ее $\mu_\pi$-добавление — *$\mu$-добавлением.*

Если множество $\pi$ состоит из одного простого числа ($\pi = \{p\}$), то будем пользоваться терминами: *$\mu_p$-добавляемая подгруппа* и *$\mu_p$-добавление.*

Единичную подгруппу считаем $\mu_\pi$-добавляемой, $\mu$-добавляемой и $\mu_p$-добавляемой, а всю группу $G$ — $\mu_\pi$-добавлением, $\mu$-добавлением и $\mu_p$-добавлением к ней.

Понятие $\mu$-добавляемой подгруппы введено в работе [1], в которой получены следующие результаты: *$p$-разрешимая группа $G$ тогда и только тогда $p$-сверхразрешима, когда ее силовская $p$-подгруппа $\mu$-добавляема в $G$; если каждая силовская подгруппа группы $G$ $\mu$-добавляема, то группа $G$ сверхразрешима* (теорема 3.1 и следствие 3.5 в [1] соответственно).

В первом утверждении условие $p$-разрешимости группы $G$ можно отбросить для начальных значений простого делителя $p$ ее порядка. Это вытекает из теорем 1 и 2 настоящей заметки в случае, когда $H = G_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$.

---

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор Ф 08Р–230).

## 1. Вспомогательные результаты

Группа с нормальной силовской $p$-подгруппой называется *$p$-замкнутой.* Если в группе имеется нормальное дополнение к силовской $p$-подгруппе, то группа называется *$p$-нильпотентной.*

Пусть $\pi$ — некоторое множество простых чисел и

$$1 \leq G_1 \leq G_2 \leq \ldots \leq G_n = G \tag{1}$$

— главный ряд неединичной группы $G$. Группа $G$ называется *$\pi$-сверхразрешимой*, если порядок каждого главного фактора $G_i/G_{i-1}$ группы $G$ либо не делится ни на одно простое число из множества $\pi$, либо равен некоторому простому числу $p \in \pi$. Если порядок каждого главного фактора $G_i/G_{i-1}$ группы $G$ есть простое число, то группа $G$ называется *сверхразрешимой* [2, с. 713]. Понятно, что если $\pi = \pi(G)$, то $\pi$-сверхразрешимая будет сверхразрешимой.

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Класс $\mathfrak{X}$ называется *замкнутым относительно фактор-групп*, если из условий $G \in \mathfrak{X}$ и $NG$ следует, что $G/N \in \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{X}$ называется *насыщенным*, если из условий $G/N \in \mathfrak{X}$ и $N \subseteq \Phi(G)$ вытекает, что $G \in \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{X}$ называется *замкнутым относительно подпрямых произведений*, если из условий $G/N_1 \in \mathfrak{X}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{X}$ следует, что $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{X}$. *Формацией* называется класс групп, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений.

Класс всех $\pi$-сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию [3, с. 35]. Классы всех $\pi$-замкнутых и $\pi$-нильпотентных групп также являются насыщенными формациями.

**Лемма 1.** *Пусть $G$ — группа, $H$ — ее подгруппа, $\pi$ — некоторое множество простых чисел. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $H$ — $\mu_\pi$-добавляемая подгруппа группы $G$, то $H$ будет $\mu_p$-добавляемой в $G$ для каждого $p \in \pi$.*
2. *Если $H$ — $\mu$-добавляемая подгруппа группы $G$, то $H$ будет $\mu_\pi$-добавляемой в $G$ для каждого множества простых чисел $\pi$.*

Доказательство. Оба утверждения непосредственно вытекают из предложенных определений.

**Лемма 2.** *Пусть $G$ — группа, $H$ — ее подгруппа, $\pi$ — некоторое множество простых чисел. Предположим, что $H$ $\mu_\pi$-добавляема в $G$ и подгруппа $B$ является ее $\mu_\pi$-добавлением. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $H \leq M \leq G$, то $H$ $\mu_\pi$-добавляема в $M$ и подгруппа $B \cap M$ является $\mu_\pi$-добавлением к $H$ в $M$.*
2. *Если $NG$ и $N \subseteq H$, то $H/N$ $\mu_\pi$-добавляема в $G/N$ и подгруппа $BN/N$ является $\mu_\pi$-добавлением к $H/N$ в $G/N$.*

Доказательство. 1. Ясно, что утверждение надо доказать в случае, когда $M$ — собственная подгруппа группы $G$. Пусть $H$ — $\mu_\pi$-добавляемая подгруппа группы $G$. Тогда существует подгруппа $B$ в группе $G$ такая, что $G = HB$ и $H_1B$ — собственная подгруппа в $G$ для каждой максимальной подгруппы $H_1$ из $H$, у которой $\pi(H : H_1) \subseteq \pi$. По тождеству Дедекинда $M = M \cap HB = H(M \cap B)$ и $M \cap H_1B = H_1(M \cap B)$ — подгруппа в $M$. Если предположить, что $M \cap H_1B = M$, то $M \subseteq H_1B$ и $G = HB \subseteq MB \subseteq H_1B \neq G$; противоречие. Поэтому $M \cap H_1B$ — собственная подгруппа в $M$ и $H$ $\mu_\pi$-добавляема в $M$, а подгруппа $B \cap M$ будет ее $\mu_\pi$-добавлением.

2. Пусть $H_1/N$ — максимальная подгруппа фактор-группы $H/N$ и $\pi(H/N : H_1/N) \subseteq \pi$. Тогда $|H/N : H_1/N| = |H : H_1|$, подгруппа $H_1$ максимальна в $H$ и $\pi(H : H_1) \subseteq \pi$. По определению $\mu_\pi$-добавляемой подгруппы $H_1B$ — собственная подгруппа в $G$, здесь $B$ — $\mu_\pi$-добавление к подгруппе $H$ в группе $G$. Поэтому $H_1B/N = H_1NB/N$ — собственная подгруппа в $G/N$. Таким образом, подгруппа $BN/N$ будет $\mu_\pi$-добавлением к подгруппе $H/N$ в фактор-группе $G/N$.

**Лемма 3.** *Пусть $\pi$ — некоторое множество простых чисел и $N$ — нормальная $\pi'$-подгруппа группы $G$. Подгруппа $H$ $\mu_\pi$-добавляема в $G$ тогда и только тогда, когда $HN/N$ $\mu_\pi$-добавляема в $G/N$.*

Доказательство. Пусть $H$ — $\mu_\pi$-добавляемая подгруппа группы $G$, $N$ — нормальная $\pi'$-подгруппа в группе $G$. Тогда существует подгруппа $B$ в группе $G$ такая, что $G = HB$ и $H_1B$ — собственная подгруппа в $G$ для каждой максимальной подгруппы $H_1$ из $H$, у которой $\pi(H : H_1) \subseteq \pi$. Понятно, что $(HN/N)(BN/N) = G/N$. Пусть $K/N$ — максимальная подгруппа из $HN/N$ и $\pi(HN/N : K/N) \subseteq \pi$. Тогда $K = (H \cap K)N$ и

$$1 \neq |HN/N : K/N| = |HN : K| = |HN : (H \cap K)N| = \frac{|H||N||H \cap K \cap N|}{|H \cap N||H \cap K||N|} = |H : H \cap K|.$$

Здесь использовалось равенство $H \cap K \cap N = H \cap N$. Но это означает, что $H \cap K$ — собственная подгруппа в $H$ и $\pi(H : H \cap K) \subseteq \pi$. Пусть $L$ — максимальная в $H$ подгруппа, содержащая $H \cap K$. Тогда $\pi(H : L) \subseteq \pi$, поскольку $|H : H \cap K| = |H : L||L : H \cap K|$. Поэтому $LB$ — собственная подгруппа в группе $G$. Если $HN = LN$, то

$$\frac{|H||N|}{|H \cap N|} = \frac{|L||N|}{|L \cap N|}, \quad 1 \neq |H : L| = |H \cap N : L \cap N|,$$

что невозможно, поскольку $|H : L|$ — $\pi$-число, а $|H \cap N : L \cap N|$ — $\pi'$-число. Значит, $HN \neq LN$, а так как $K = (H \cap K)N \subseteq LN \subseteq HN$, то $K = (H \cap K)N = LN$ и $H \cap K = L$. Теперь

$$(K/N)(BN/N) = (LN/N)(BN/N) = ((LN)(BN))/N = (LB)N/N$$

является подгруппой в группе $G/N$. Предположим, что $(K/N)(BN/N) = G/N$. Тогда $G = KB = LNB = (LB)N$ и

$$1 \neq |G : LB| = |LBN : LB| = |N : N \cap LB|$$

будет $\pi'$-числом. С другой стороны,

$$1 \neq |G : LB| = |HB : LB| = \frac{|H||B||L \cap B|}{|H \cap B||L||B|} = \frac{|H : L|}{|H \cap B : L \cap B|}$$

является $\pi$-числом; противоречие. Поэтому $(K/N)(BN/N)$ — собственная подгруппа в фактор-группе $G/N$. Это означает, что подгруппа $HN/N$ $\mu_\pi$-добавляема в $G/N$.

Обратно, пусть $HN/N$ — $\mu_\pi$-добавляемая подгруппа в фактор-группе $G/N$, где $H$ — некоторая подгруппа, $N$ — нормальная $\pi'$-подгруппа. Тогда существует подгруппа $B/N$ такая, что $(HN/N)(B/N) = G/N$ и $(K/N)(B/N)$ — собственная подгруппа в $G/N$ для каждой максимальной подгруппы $K/N$ из $HN/N$, у которой $\pi(HN/N : K/N) \subseteq \pi$. Понятно, что $HB = G$. Пусть $H_1$ — максимальная подгруппа в $H$ и $\pi(H : H_1) \subseteq \pi$. Предположим, что $HN = H_1N$. Тогда

$$\frac{|H||N|}{|H \cap N|} = \frac{|H_1||N|}{|H_1 \cap N|}, \quad 1 \neq |H : H_1| = |H \cap N : H_1 \cap N|,$$

что невозможно, поскольку $|H : H_1|$ — $\pi$-число, а $|H \cap N : H_1 \cap N|$ — $\pi'$-число. Поэтому $H_1N/N$ — максимальная подгруппа в $HN/N$ и $H_1NB = H_1B$ — собственная подгруппа группы $G$. Лемма доказана.

Замечание 1. Если множество $\pi$ состоит из одного простого числа $p$, то для $\mu_p$-добавляемых подгрупп остаются справедливы утверждения, аналогичные утверждениям лемм 2 и 3. Если множество $\pi$ состоит из всех простых чисел, то утверждения леммы 2 для $\mu$-добавляемых подгрупп также остаются справедливыми.

**Лемма 4.** *Пусть $H$ — $\mu_\pi$-добавляемая подгруппа группы $G$, $B$ — $\mu_\pi$-добавление к $H$. Если $H_1$ — максимальная подгруппа в $H$ и $\pi(H : H_1) \subseteq \pi$, то $|G : H_1B| = |H : H_1|$.*

Доказательство. Понятно, что $H_1 \subseteq H \cap H_1B = H_1(H \cap B)$. Так как подгруппа $H$ не содержится в $H_1B$, то $H_1(H \cap B)$ — собственная подгруппа в $H$. Поскольку $H_1$ — максимальная подгруппа в $H$, то $H_1 = H_1(H \cap B)$ и $H \cap B = H_1 \cap B$. Поэтому

$$|G : H_1B| = |HB : H_1B| = \frac{|H||B||H_1 \cap B|}{|H \cap B||H_1||B|} = |H : H_1|.$$

**Лемма 5.** *Пусть $G$ — группа и $p \in \pi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если группа $G$ $p$-нильпотентна, то $G$ $p$-сверхразрешима.*

2. *Если $p$ — наименьшее число из $\pi(G)$ и группа $G$ $p$-сверхразрешима, то $G$ $p$-нильпотентна.*

Доказательство. 1. Пусть группа $G$ $p$-нильпотентна. Тогда $G = [G_{p'}]G_p$ и в фактор-группе $G/G_{p'}$ имеется нормальный ряд

$$1 = G_0/G_{p'} \subseteq G_1/G_{p'} \subseteq G_2/G_{p'} \subseteq \ldots \subseteq G_m/G_{p'} = G/G_{p'}$$

с факторами $G_{i+1}/G_{p'}/G_i/G_{p'}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, $|G_p| = p^m$, простых порядков. Теперь ряд

$$1 \subseteq G_{p'} = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G$$

будет нормальным и его фактор $G_0$ является $p'$-группой, а остальные факторы имеют порядок $p$. Поэтому группа $G$ $p$-сверхразрешима.

2. Пусть $p$ — наименьшее число из $\pi(G)$, группа $G$ $p$-сверхразрешима и $N$ — ее минимальная нормальная подгруппа. Тогда фактор-группа $G/N$ $p$-сверхразрешима и по индукции $p$-нильпотентна, т. е. подгруппа $G_{p'}N$ нормальна в $G$. Если $|N|$ — $p'$-подгруппа, то $N \subseteq G_{p'}$ и $G_{p'}$ нормальна в группе $G$. Пусть $p$ делит порядок подгруппы $N$. Тогда $|N| = p$ и $G_{p'}N = G_{p'} \times N$. Поэтому $G_{p'}$ нормальна в $G$. Лемма доказана.

**Лемма 6** [2, теорема IV.4.7]. *Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$ и $N$ — нормальная подгруппа в $G$. Если $N \cap P \subseteq \Phi(P)$, то $N$ $p$-нильпотентна.*

**Лемма 7.** *Пусть $G$ — $p$-разрешимая группа и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу группы $G$. Если подгруппа $H$ $\mu_p$-добавляема в $G$, то группа $G$ $p$-сверхразрешима. В частности, если силовская $p$-подгруппа $p$-разрешимой группы $G$ $\mu$-добавляема, то $G$ $p$-сверхразрешима.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы $G$. В $p$-разрешимой группе каждая минимальная нормальная подгруппа является либо элементарной абелевой $p$-подгруппой, и в этом случае она содержится в $H$, либо $p'$-подгруппой. Согласно леммам 2 и 3 фактор-группа $G/K$ удовлетворяет условию доказываемой леммы для каждой минимальной нормальной подгруппы $K$ группы $G$, поэтому $G/K$ $p$-сверхразрешима. Поскольку класс всех $p$-сверхразрешимых групп образует насыщенную формацию, по индукции можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе $G$ единственная минимальная нормальная подгруппа, которую обозначим через $N$. Ясно, что $N = O_p(G)$ является элементарной абелевой $p$-подгруппой. Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы, не содержащая подгруппу $N$. Тогда $G = NM$ и $N \cap M = 1$. Ввиду леммы I.2.12 из [2] и теоремы IV.4.7 из [2] можно считать, что $G_p = NM_p$, здесь $G_p$ и $M_p$ — силовские $p$-подгруппы из $G$ и $M$ соответственно, причем подгруппу $G_p$ можно считать силовской в $H$. Пусть $P_j$ — максимальная подгруппа из $G_p$, содержащая подгруппу $M_p$. Так как подгруппа $H$ $p$-нильпотентна, существует максимальная в $H$ подгруппа $H_j = P_j[H_{p'}]$ индекса $p$, здесь $H_{p'}$ — $p'$-холлова подгруппа из $H$, нормальная в $H$. По условию подгруппа $H$ $\mu_p$-добавляема в $G$, поэтому существует подгруппа $B$ в группе $G$ такая, что $G = HB$ и $H_jB$ — собственная подгруппа в $G$. По лемме 4 $|G : H_jB| = p$. Так как $N$ — минимальная нормальная в $G$ подгруппа, то $N \subseteq H_jB$ или $N \cap H_jB = 1$. Если $N \subseteq H_jB$, то $G_p = NP_j \subseteq H_jB$ и $G = G_p(H_jB) \subseteq H_jB$; противоречие. Если $N \cap H_jB = 1$, то $|N| = p$ и группа $G$ $p$-сверхразрешима по индукции.

## 2. Основные результаты

**Теорема 1.** *Пусть $p$ — наименьший простой делитель порядка группы $G$ и $H$ — $p$-сверхразрешимая подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу группы $G$. Если подгруппа $H$ $\mu_p$-добавляема в $G$, то группа $G$ $p$-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа из $H$ и $P_1, \dots, P_n$ — все максимальные подгруппы в группе $P$. По лемме 5 подгруппа $H$ $p$-нильпотентна, поэтому в $H$ существует максимальная подгруппа $H_i = P_i[H_{p'}]$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Здесь $H_{p'}$ — $p'$-холлова подгруппа из $H$. Пусть $B$ — $\mu_p$-добавление к подгруппе $H$ в группе $G$. По лемме 4 $|G : H_iB| = |H : H_i| = p$ и подгруппа $H_iB$ нормальна в группе $G$. Поэтому подгруппа

$$K = \bigcap_{i=1}^{n} (H_iB) = \bigcap_{i=1}^{n} ((P_i[H_{p'}])B)$$

нормальна в группе $G$. Ясно, что

$$K = \bigcap_{i=1}^{n} ((P_i[H_{p'}])B) \supseteq (\Phi(P)[H_{p'}])B,$$

поэтому $\Phi(P) \subseteq P \cap K$. Подгруппа $P \cap K = P_0$ — силовская $p$-подгруппа в $K$. Предположим, что $P_0 \neq \Phi(P)$. Тогда существует максимальная подгруппа $P_j$ в $P$ такая, что $P_0$ не содержится в $P_j$. Так как $P_j$ нормальна в $P$, то $P_0P_j = P$. Но теперь

$$K = (P_0[H_{p'}])B \subseteq (P_j[H_{p'}])B, \quad P = P_0P_j \subseteq (P_j[H_{p'}])B,$$

поэтому $G = (P[H_{p'}])B \subseteq (P_j[H_{p'}])B$; противоречие. Значит, предположение оказалось неверным, и $\Phi(P)$ — силовская $p$-подгруппа в подгруппе $K$. Применяя лемму 6, заключаем, что подгруппа $K$ $p$-нильпотентна. Так как $K$ нормальна в $G$ и фактор-группа $G/K$ — $p$-группа, группа $G$ также $p$-нильпотентна. По лемме 5 группа $G$ $p$-сверхразрешима. Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.1.** *Пусть $p$ — наименьший простой делитель порядка группы $G$. Если силовская $p$-подгруппа $\mu$-добавляема в $G$, то группа $G$ $p$-сверхразрешима.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 1 в случае, когда $H = G_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$.

**Следствие 1.2.** *Пусть $G$ — группа, $\pi \subseteq \pi(G)$. Если группа имеет четный порядок, то пусть $2 \in \pi$. Если для каждого $p \in \pi$ силовская $p$-подгруппа циклическая или $\mu$-добавляема в группе $G$, то $G$ $\pi$-сверхразрешима.*

Доказательство. Если силовская 2-подгруппа $\mu$-добавляема в группе $G$, то $G$ 2-сверхразрешима по следствию 1.1 и 2-нильпотентна по лемме 6. Если силовская 2-подгруппа циклическая, то группа $G$ 2-нильпотентна по теореме IV.2.8 из [2], а по лемме 5 группа $G$ 2-сверхразрешима.

Пусть $p$ — произвольный простой делитель порядка группы $G_{2'}$, $p \in \pi \setminus \{2\}$. Здесь $G_{2'}$ — $2'$-холлова подгруппа группы $G$, нормальная в $G$. Если силовская $p$-подгруппа $\mu$-добавляема в группе $G$, то по лемме 2 она $\mu$-добавляема в $G_{2'}$. Поэтому группа $G_{2'}$ $p$-сверхразрешима по лемме 7. Если силовская $p$-подгруппа циклическая, то ясно, что группа $G_{2'}$ $p$-сверхразрешима. Так как $G_{2'}$ нормальна в $G$, группа $G$ $p$-сверхразрешима для каждого $p \in \pi \setminus \{2\}$. Ясно, что теперь вся группа $G$ $\pi$-сверхразрешима.

При $\pi = \pi(G)$ получаем

**Следствие 1.3.** *Если для каждого $p \in \pi(G)$ силовская $p$-подгруппа группы $G$ циклическая или $\mu$-добавляема в группе $G$, то $G$ сверхразрешима.*

Теорема 3.4 и следствие 3.5 работы [1] являются частными случаями следствия 1.3.

**Теорема 2.** *Пусть $G$ — группа, $\pi(G) = \{p_1, p_2 = p, p_3, \dots, p_n\}$, $p_1 < p_2 = p < p_3 < \dots < p_n$ и $H$ — $p$-нильпотентная подгруппа, содержащая силовскую $p$-подгруппу группы $G$. Если подгруппа $H$ $\mu_p$-добавляема в $G$, то группа $G$ $p$-сверхразрешима.*

Замечание. Для третьего по возрастанию простого делителя $p$ порядка группы $G$ условие $p$-разрешимости группы отбросить нельзя. Примером служит простая группа порядка 60, в которой силовская 5-подгруппа $\mu$-добавляема.

Доказательство. Согласно лемме 7 достаточно доказать $p$-разрешимость группы $G$. Воспользуемся индукцией по порядку $G$. Поскольку множество всех $p$-разрешимых групп образует насыщенную формацию, на основе лемм 2 и 3 можно утверждать, что $O_{p'}(G) = O_p(G) = R_p(G) = \Phi(G) = 1$ и в группе $G$ существует единственная минимальная нормальная подгруппа $N$. Здесь $R_p(G)$ — $p$-разрешимый радикал группы $G$, т. е. наибольшая нормальная $p$-разрешимая подгруппа группы $G$.

Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа из $H$ и $P_i$, $i = 1, \dots, n$, — все максимальные подгруппы в группе $P$. В $H$ существует максимальная подгруппа $H_i = P_i[H_{p'}]$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Здесь $H_{p'}$ — $p'$-холлова подгруппа из $H$. Пусть $B$ — $\mu_p$-добавление к подгруппе $H$ в группе $G$. По лемме 4

$|G : H_iB| = |H : H_i| = p$. Теперь фактор-группа $G/(H_iB)_G$ является подгруппой симметрической группы $S_p$ степени $p$ и $|G/(H_iB)_G| = p_1^{a_1}p$. Поэтому фактор-группа $G/(H_iB)_G$ $p$-сверхразрешима. Подгруппа

$$K = \bigcap_{i=1}^{n}(H_iB)_G = \bigcap_{i=1}^{n}((P_i[H_{p'}])B)_G$$

нормальна в группе $G$, и фактор-группа $G/K$ изоморфна подгруппе прямого произведения $G/(H_1B)_G \times G/(H_2B)_G \times \ldots \times G/(H_nB)_G$, поэтому $G/K$ $p$-сверхразрешима. Ясно, что

$$K = \bigcap_{i=1}^{n}((P_i[H_{p'}])B)_G \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} P_i = \Phi(P),$$

тем самым $\Phi(P) \subseteq P \cap K$. Подгруппа $P \cap K = P_0$ — силовская $p$-подгруппа в $K$. Предположим, что $P_0 \neq \Phi(P)$. Тогда существует максимальная подгруппа $P_j$ в $P$ такая, что $P_0$ не содержится в $P_j$. Так как $P_j$ нормальна в $P$, то $P_0P_j = P$. Но теперь

$$P_0 \subseteq K \subseteq (P_j[H_{p'}])B, \quad P = P_0P_j \subseteq (P_j[H_{p'}])B,$$

поэтому

$$G = (P[H_{p'}])B \subseteq (P_j[H_{p'}])B;$$

противоречие. Значит, предположение оказалось неверным, и $\Phi(P)$ — силовская $p$-подгруппа в подгруппе $K$. Применяя лемму 6, заключаем, что подгруппа $K$ $p$-нильпотентна и $K \subseteq R_p(G) = 1$. Следовательно, группа $G$ $p$-сверхразрешима. Теорема 2 доказана.

**Следствие 2.1.** *Пусть $G$ — группа и $\pi(G) = \{p_1, p_2 = p, p_3, \ldots, p_n\}$, $p_1 < p_2 = p < p_3 < \ldots < p_n$. Если силовская $p$-подгруппа $\mu$-добавляема в $G$, то группа $G$ $p$-сверхразрешима.*

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 2 в случае, когда $H = G_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$.

**Следствие 2.2.** *Если силовская 3-подгруппа $\mu$-добавляема в $G$, то группа $G$ 3-сверхразрешима.*

Замечание 2. В простой группе порядка 60 силовская 5-подгруппа $\mu$-добавляема. Поэтому ограничения для величины простого числа $p$ в теоремах 1 и 2 существенны.

Авторы выражают благодарность рецензенту, обнаружившему пробел в начальном варианте статьи.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Мяо Л., Цянь Г.* Условие разрешимости конечных групп // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 866–872.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

*Статья поступила 17 июня 2008 г.*

Монахов Виктор Степанович, Шныпарков Александр Валерьевич
Гомельский гос. университет, кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
monakhov@gsu.by, shnyparkov@tut.by