*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2009. Том 50, № 5*

*УДК 517.956.224+512.813.52+517.518.23*

# НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА ГРУППАХ КАРНО

**С. К. Водопьянов, Н. А. Кудрявцева**

**Аннотация.** Для бесселевых ядер на группе Карно установлены основные факты нелинейной теории потенциала: неравенство типа неравенства Вольфа, оценки для емкости и сильное емкостное неравенство. В качестве следствия получены неравенство типа Соболева — Адамса, соотношения между емкостью и мерой Хаусдорфа, а также оценки снизу для емкости Тейхмюллера. Отсюда выведена непрерывность монотонных функций одного класса Соболева и получены оценки, применяемые при исследовании тонких свойств функций.

**Ключевые слова:** нелинейная теория потенциала, бесселево ядро на группе Карно, пространство Соболева, теорема вложения, емкость Тейхмюллера.

*Посвящается Юрию Григорьевичу Решетняку*
*по случаю 80-летия со дня рождения*

Развитие нелинейной теории потенциала, основанной на классической линейной теории, было вызвано, в частности, потребностями описания различных тонких свойств слабых решений квазилинейных уравнений эллиптического типа (см. работы [1, 2]), а также применениями идей и методов теории потенциала к функциональным пространствам в работах Ароншайна, теории отображений с ограниченным искажением в работах Ю. Г. Решетняка, и другим областям. Основы нелинейной теории потенциала, заложенные работах [3–6], обеспечили возможность ее применения в смежных разделах анализа и послужили источником различных ее обобщений и источником развития новых идей (см. монографии [7, 8], в которых изложены принципиальные аспекты теории и некоторые ее важные применения).

В ряде работ [9–15] методы нелинейной теории потенциала применяются к функциональным классам на группе Карно, а также к теории субэллиптических уравнений и смежным разделам анализа. Отметим, что в [9, 13] рассматривались в основном радиальные ядра, что несколько сужает область применения теории потенциала, так как аналог бесселева ядра на группе Карно таким свойством не обладает.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы адаптировать методы нелинейной теории потенциала работ [9, 13] к пространству бесселевых потенциалов

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00531), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–5682.2008.1).

на группе Карно. Актуальность этой задачи мотивирована непосредственными связями бесселевых потенциалов с неголономными пространствами Соболева [16, 17], субэллиптическими уравнениями и квазиконформным анализом на группах Карно.

В § 1 определяются потенциалы Бесселя на группах Карно. В § 2 доказана справедливость неравенства типа Вольфа. В § 3 определено понятие емкости на группе Карно, получены оценки на емкость множеств через оценки потенциала Вольфа для мер с носителями на этих множествах. В качестве следствия приведена оценка емкости шара. В § 4 доказано сильное емкостное неравенство и на его основе получена непрерывность вложения пространства потенциалов в пространство Лебега. В случае строгого соотношения между показателями получено условие непрерывности вложения в терминах шаров (обобщение теоремы вложения Соболева [16]). В § 5 рассматривается связь между емкостью множества и его хаусдорфовой мерой. В § 6 доказано, что бесселевы потенциалы на группах Карно являются уточненными и квазинепрерывными функциями, а также получены оценки снизу для емкости Тейхмюллера. Отсюда выведена непрерывность монотонных функций одного класса Соболева и установлены оценки, применяемые при исследовании тонких свойств функций.

## § 1. Потенциалы Бесселя и их свойства на группах Карно

*Стратифицированной однородной группой* [18] или, в другой терминологии, *группой Карно* называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли $V$ которой разлагается в прямую сумму $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ векторных пространств таких, что $\dim V_1 \geq 2$, $[V_1, V_k] = V_{k+1}$ для $1 \leq k \leq m-1$ и $[V_1, V_m] = \{0\}$. Пусть векторные поля $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$ составляют базис $V_1$. Так как они порождают $V$, для каждого $1 < i \leq m$ можно выбрать базис $X_{ij}$, $1 \leq j \leq n_i = \dim V_i$, для $V_i$, который состоит из коммутаторов полей $X_{1k} \in V_1$ порядка $i-1$. Отождествим элемент $g \in \mathbb{G}$ с элементом $x \in \mathbb{R}^N$, $N = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$, $x = (x_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, посредством экспоненциального отображения $\exp\bigl(\sum x_{ij} X_{ij}\bigr) = g$. Растяжения $\delta_t$, определяемые как $\delta_t x = (t^i x_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i}$, суть автоморфизмы $\mathbb{G}$ для любого $t > 0$. Мера Лебега $dx$ на $\mathbb{R}^N$ есть биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_t x) = t^\nu dx$, где $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i \dim V_i$ — однородная размерность группы $\mathbb{G}$. Мера Лебега $|E|$ измеримого множества $E \subset \mathbb{G}$ равна $\int\limits_E dx$.

Однородная норма на группе $\mathbb{G}$ есть непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \to [0, \infty)$, бесконечно гладкая на $\mathbb{G} \setminus 0$ и обладающая следующими свойствами:

1) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $\rho(x) = \rho(x^{-1})$ и $\rho(\delta_t(x)) = t\rho(x)$;

3) $\rho(x_1, x_2) \leq \varkappa(\rho(x_1) + \rho(x_2))$, $x_1, x_2 \in \mathbb{G}$, где $\varkappa \geq 1$ — некоторая постоянная.

Фиксируем однородную норму на группе и будем обозначать ее символом $d$. Она определяет однородную метрику: для точек $x, y \in \mathbb{G}$ полагаем расстояние между ними равным $d(y^{-1}x)$. По отношению к этой метрике стандартным образом определяются шары $B(x, t)$, сферы $S(x, t)$ и топология, которая оказывается эквивалентной евклидовой. Нормируем меру Лебега так, чтобы мера шара $B(0, 1)$ была равна 1. Тогда $|B(0, r)| = r^\nu$.

Наша цель — получить основные факты нелинейной теории потенциала на группах Карно для бесселева ядра $J_\alpha(x)$.

В работе Фолланда [17] определяется обобщенное ядро Бесселя $J_\alpha(x)$ на группах Карно для $\operatorname{Re}\alpha > 0$ по формуле

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha/2-1} \exp(-t) h(x,t)\,dt. \tag{1}$$

Здесь функция $h(x,t)$, равная нулю при $t \leq 0$, является фундаментальным решением оператора $\mathscr{L} + \partial/\partial t$, где $\mathscr{L} = -\sum\limits_{i=1}^{n_1} X_{1i}^2$ — сублапласиан на группе $\mathbb{G}$.

Перечислим свойства фундаментального решения оператора теплопроводности на группе Карно [17]. Функция $h(x,t)$ бесконечно гладкая на $(\mathbb{G}\times\mathbb{R}) \setminus (0\times 0)$. Интеграл $\int\limits_{\mathbb{G}} h(x,t)\,dx$ равен 1 для всех $t$, $h(x,t) \geq 0$ для всех $x$, $t$, $h(x^{-1},t) = h(x,t)$, и выполняется равенство

$$h(\delta_r x, r^2 t) = r^{-\nu} h(x,t). \tag{2}$$

**Лемма 1.** *Ядро Бесселя $J_\alpha(x)$ определено для всех $x \neq 0$, а в случае $\operatorname{Re}\alpha > \nu$ и при $x = 0$. Кроме того, $J_\alpha(x)$ — функция класса $C^\infty$ вне точки $0$. Если $\operatorname{Re}\alpha < \nu$, то $J_\alpha(x) = O(d(x)^{\operatorname{Re}\alpha-\nu})$ при $x \to 0$. Если $\operatorname{Re}\alpha = \nu$, то $J_\alpha(x) = O(\log(1/d(x))$ при $x \to 0$. Функция $J_\alpha(x)$ непрерывна в нуле, если $\operatorname{Re}\alpha > \nu$. Для любых $N$ справедливо $J_\alpha(x) = O(d(x)^{-N})$ при $x \to \infty$.*

*При действительных $\alpha \in (0,\nu)$ и $d(x) \leq 1$ выполняется следующее неравенство:*

$$J_\alpha(x) \geq c d(x)^{\alpha-\nu}. \tag{3}$$

Доказательство. Все утверждения леммы, кроме последнего, доказаны в [17]. Докажем последнее утверждение. Здесь и всюду далее через $c$ будем обозначать произвольную постоянную, точное значение которой нам не важно. Запишем $J_\alpha(x) = J_\alpha\big(\delta_{d(x)} \circ \delta_{d(x)}^{-1}(x)\big)$ и фиксируем точку $x$. Обозначим $d(x) = r$, $\delta_r^{-1}(x) = y$. Очевидно, $y \in S(0,1)$. В интеграле (1), определяющем функцию $J_\alpha(x)$, воспользуемся свойством (2) функции $h$. Имеем

$$\begin{aligned} J_\alpha(\delta_r y) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha/2-1}\exp(-t) h(\delta_r y, t)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha/2-1}\exp(-t) r^{-\nu} h(y, t/r^2)\,dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int\limits_0^\infty (sr^2)^{\alpha/2-1}\exp(-sr^2) h(y,s) r^2\,ds r^{-\nu} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} r^{\alpha-\nu} \int\limits_0^\infty s^{\alpha/2-1}\exp(-sr^2) h(y,s)\,ds. \end{aligned}$$

Так как $r \leq 1$, то $\exp(-sr^2) \geq \exp(-s)$. Отсюда получаем $J_\alpha(\delta_r y) \geq r^{\alpha-\nu} J_\alpha(y)$. Функция $J_\alpha(y)$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{G}\setminus 0)$. В силу непрерывности она ограничена снизу: $J_\alpha(y) \geq c$ на единичной сфере $S(0,1)$. Так как функция $h(x,t)$ строго положительна при $t > 0$ [18], постоянная $c$ положительна. Следовательно, $J_\alpha(x) \geq c d(x)^{\alpha-\nu}$ при $d(x) \leq 1$, и неравенство (3) доказано. $\square$

Операция *свертки* на группе определяется следующей формулой:

$$f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} f(xy^{-1}) g(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{G}} f(y) g(y^{-1}x)\, dy.$$

*Пространство бесселевых потенциалов* на группе Карно есть [18] пространство $S_p^\alpha$ функций вида

$$g(x) = f * J_\alpha(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x) f(y)\, dy,$$

где $f \in L_p(\mathbb{G})$, $p \in (1,\infty)$, $\alpha \in (0,\infty)$, с нормой $\|g \mid S_p^\alpha\| = \|f \mid L_p\|$. Если $\alpha$ — натуральное число, $\alpha = k$, то $S_p^k(\mathbb{G}) = W_p^k(\mathbb{G})$, где пространство Соболева $W_p^k(\mathbb{G})$ состоит из функций $f \in L_p$, имеющих обобщенные горизонтальные производные $X_{1i_1} \dots X_{1i_k} f \in L_p$, $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n_1$, порядка $k$ [18]. Кроме того, если функция $g \in W_p^k(\mathbb{G})$ представляется в виде свертки с ядром Бесселя целого порядка, $g = f * J_k$, то $c^{-1}\|f\|_{L_p} \leq \|g\|_{W_p^k} \leq c\|f\|_{L_p}$, где $c = c(k,p,\nu)$. Заметим, что в случае евклидова пространства получим хорошо известное пространство бесселевых потенциалов [19].

Ядро Рисса на группе Карно можно определить как $R_\alpha(x) = d(x)^{\alpha-\nu}$ [17]. В силу оценок на ядро Бесселя ясно, что $J_\alpha(x) \leq c R_\alpha(x)$. Потенциал Рисса функции $f$ определяется как свертка

$$f * R_\alpha(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} \frac{f(y)}{d(y^{-1}x)^{\nu-\alpha}}\, dy, \quad 0 < \alpha < \nu.$$

Для произвольной неотрицательной меры $\mu$ определим максимальную функцию

$$M_\alpha \mu(x) = \sup\{r^{\nu-\alpha} \mu(B(x,r)) : r > 0\}.$$

Нетрудно видеть, что справедливо поточечное неравенство $M_\alpha\mu(x) \leq c\mu * R_\alpha(x)$. Обратное неравенство справедливо лишь в интегральном смысле, оно доказано в евклидовом случае в работе [20]. На однородных группах это неравенство доказано в [9] (см. также [21]). Приведем точную формулировку этого результата.

**Предложение 1.** *Если $0 < p < \infty$, $0 < \alpha < \nu$, то существует константа $A = A(\alpha,p,\nu)$ такая, что $\|\mu * R_\alpha\|_p \leq A\|M_\alpha\mu\|_p$.*

Аналогичное неравенство выполняется и для ядра Бесселя. Чтобы доказать его в этом случае, нужны более точные оценки на фундаментальное решение уравнения теплопроводности, полученные в работе [22].

**Теорема 1.** *Существуют положительные постоянные $A_1$, $A_2$, $c_1$ и $c_2$ такие, что $A_1 t^{-\nu/2} e^{-c_1 d(x)^2/t} \leq h(x,t) \leq A_2 t^{-\nu/2} e^{-c_2 d(x)^2/t}$ для всех $t > 0$ и всех $x \in \mathbb{G}$.*

С помощью теоремы можно оценить ядро Бесселя: $J_\alpha(x) \leq c \exp^{-cd(x)}$ при $d(x) \geq 1$, непосредственно исследуя интеграл, определяющий $J_\alpha(x)$, и рассуждая так же, как в [23, гл. 5, § 3]. Этой оценки нам будет достаточно для доказательства неравенства типа Макенхаупта — Уидена для бесселева потенциала. Определим модифицированную максимальную функцию следующим образом:

$$M_{\alpha,\rho}\mu(x) = \sup_{0 < r \leq \rho} \frac{\mu(B(x,r))}{r^{\nu-\alpha}}, \quad 0 \leq \alpha < \nu, \ \rho > 0.$$

Будем рассматривать также модифицированное ядро Рисса

$$\widetilde{R}_\alpha(x) = \begin{cases} d(x)^{\alpha-\nu}, & 0 < d(x) \le 1, \\ 0, & d(x) \ge 1. \end{cases}$$

Справедливо следующее обобщение предложения 1.

**Теорема 2.** *Пусть* $0 < p < \infty$, $0 < \alpha < \nu$ *и* $\rho > 0$. *Найдется положительная постоянная* $c(\rho)$ *такая, что* $\|\mu * J_\alpha\|_p \le c(\rho)\|M_{\alpha,\rho}\mu\|_p$ *для любой положительной меры* $\mu$.

Доказательство аналогично евклидову случаю [7, с. 75]. Без ограничения общности полагаем $\rho = 1$. Сначала докажем, что $\|\mu * J_\alpha\|_p \le c\|\mu * \widetilde{R}_\alpha\|_p + c\|M_{\alpha,1}\mu\|_p$. Ввиду оценок на ядро Бесселя имеем

$$\mu * J_\alpha \le \mu * \widetilde{R}_\alpha + c\int\limits_{\mathbb{G}} e^{-cd(y^{-1}x)}\, d\mu(y).$$

Обозначим последний интеграл через $I(x)$ и положим $E(x) = e^{-cd(x)}$. Тогда $I(x) = \mu * E(x)$. Определим функцию $\chi_1(x) = |B(0,1)|^{-1}$ для $d(x) \le 1$ и $\chi_1(x) = 0$ для $d(x) \ge 1$. Очевидно, найдется постоянная $A$ такая, что $E \le A\chi_1 * E$. Следовательно, $\mu * E \le A\mu * \chi_1 * E \le AM_{\alpha,1}\mu * E$, так как $\mu * \chi_1 \le M_{\alpha,1}\mu$. Применяя неравенство Минковского, получаем нужную нам оценку $\|\mu * E\|_p \le A\|M_{\alpha,1}\mu * E\|_p \le A\|E\|_1\|M_{\alpha,1}\|_p = c\|M_{\alpha,1}\|_p$. $\square$

## § 2. Энергия и нелинейные потенциалы. Неравенство Вольфа

Под мерой будем понимать меру Радона: неотрицательную счетно-аддитивную функцию множества, принимающую конечные значения на компактных подмножествах $\mathbb{G}$. *Потенциалом меры* $\mu$ относительно ядра $J_\alpha$ называется функция

$$K_\alpha(\mu, x) = \mu * J_\alpha(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x)\, d\mu(y).$$

Определим $(\alpha, p)$-энергию меры $\mu$:

$$E_{\alpha,p}\mu = \int\limits_{\mathbb{G}} K_\alpha(\mu, x)^q\, dx. \tag{4}$$

Здесь числа $p$ и $q$ связаны соотношением $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$. Если записать $K_\alpha(\mu, x)^q = K_\alpha(\mu, x)^{q-1}K_\alpha(\mu, x)$ и поменять порядок интегрирования в (4), то получим $E_{\alpha,p}\mu = \int\limits_{\mathbb{G}} U_{\alpha,p}\mu(x)\, d\mu(x)$, где

$$U_{\alpha,p}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(x^{-1}y)\left[\int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(z^{-1}y)\, d\mu(z)\right]^{q-1} dy$$

— нелинейный потенциал меры $\mu$ относительно ядра $J_\alpha$. Заметим, что так как $h(x^{-1}, t) = h(x, t)$, то $J_\alpha(x^{-1}y) = J_\alpha(y^{-1}x)$. Поэтому мы можем написать выражение для нелинейного потенциала в виде свертки $U_{\alpha,p}\mu(x) = (\mu * J_\alpha)^{q-1} * J_\alpha$. Определим потенциал Вольфа следующим образом:

$$x \in \mathbb{G} \Rightarrow W_{\alpha,p}\mu(x) = \int\limits_0^1 \left[\frac{\mu(B(x,r))}{r^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1} \frac{dr}{r}, \quad \alpha p \le \nu.$$

Докажем на группах справедливость неравенства типа Вольфа [24].

**Теорема 3.** *Пусть $\mu$ — мера Радона на группе Карно $\mathbb{G}$. Существуют постоянные $c_1$ и $c_2$ такие, что*

$$c_1 \int\limits_{\mathbb{G}} W_{\alpha,p}\mu(x)\, d\mu \le \int\limits_{\mathbb{G}} U_{\alpha,p}\mu(x)\, d\mu(x) \le c_2 \int\limits_{\mathbb{G}} W_{\alpha,p}\mu(x)\, d\mu(x), \quad \alpha p \le \nu.$$

Доказательство. Покажем, что для левой части неравенства выполняется поточечная оценка $U_{\alpha,p}\mu(x) \ge c_1 W_{\alpha,p}\mu(x)$. Имеем

$$U_{\alpha,p}\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x)\Big[\int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(z^{-1}y)\, d\mu(z)\Big]^{q-1} dy$$
$$\ge \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x)\Big[\int\limits_{d(z^{-1}y)\le 2\varkappa} J_\alpha(z^{-1}y)\, d\mu(z)\Big]^{q-1} dy.$$

При $d(z^{-1}y) \le 1$ выполняется неравенство (3): $|J_\alpha(z^{-1}y)| \ge c d(z^{-1}y)^{\alpha-\nu}$. Так как функция $J_\alpha$ гладкая вне 0, то $|J_\alpha(z^{-1}y)| \ge c_1 d(z^{-1}y)^{\alpha-\nu}$ при $1 \le d(z^{-1}y) \le 2\varkappa$. Следовательно,

$$U_{\alpha,p}\mu(x) \ge \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x)\Big[\int\limits_{d(z^{-1}y)\le 2\varkappa} c_1 d(z^{-1}y)^{\alpha-\nu}\, d\mu(z)\Big]^{q-1} dy$$
$$\ge c\int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x)\left[\int\limits_0^{2\varkappa} \frac{\mu(B(y,r))}{r^{\nu-\alpha}}\,\frac{dr}{r}\right]^{q-1} dy$$
$$\ge c\int\limits_{d(y^{-1}x)\le 1} d(y^{-1}x)^{\alpha-\nu}\left[\int\limits_{2\varkappa d(y^{-1}x)}^{2\varkappa} \frac{\mu(B(y,r))}{r^{\nu-\alpha}}\,\frac{dr}{r}\right]^{q-1} dy$$
$$\ge c\int\limits_{d(y^{-1}x)\le 1} d(y^{-1}x)^{\alpha-\nu}\mu(B(y,2\varkappa d(y^{-1}x)))^{q-1}\left[\int\limits_{2\varkappa d(y^{-1}x)}^{2\varkappa} \frac{dr}{r^{\nu-\alpha+1}}\right]^{q-1} dy.$$

Здесь мы воспользовались формулой: для любого $\delta > 0$ верно

$$\int\limits_{d(y^{-1}x)\le\delta} \frac{d\mu(y)}{d(y^{-1}x)^{\nu-\alpha}} = (\nu-\alpha)\int\limits_0^\delta \frac{\mu(B(x,r))}{r^{\nu-\alpha}}\,\frac{dr}{r} + \frac{\mu(B(x,\delta))}{\delta^{\nu-\alpha}}, \quad 0<\alpha<\nu.$$

Доказательство этой формулы, приведенное [7] в евклидовом пространстве, почти дословно переносится на случай групп Карно. Так как $B(y, 2\varkappa d(y^{-1}x)) \supset B(x, d(y^{-1}x))$, то

$$U_{\alpha,p}\mu(x) \ge c\int\limits_{d(y^{-1}x)\le 1} d(y^{-1}x)^{\alpha-\nu+(\alpha-\nu)(q-1)}\mu(B(x,d(y^{-1}x)))^{q-1}\, dy$$
$$\ge c\int\limits_0^1 \left[\frac{\mu(B(x,r))}{r^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1}\frac{dr}{r}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались сферической системой координат из [18].

Докажем правую часть неравенства Вольфа. Имеем $\|\mu * J_\alpha\|_q \leq A_\rho \|M_{\alpha,\rho}\mu\|_q$, $1 < q < \infty$, в силу предложения 1, т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{G}} \Bigl( \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x)\, d\mu(y) \Bigr)^q dx \leq A_\rho \int\limits_{\mathbb{G}} (M_{\alpha,\rho}\mu(x))^q\, dx.$$

Положим

$$I_{\alpha,q}\mu(x) = \left[ \int\limits_0^{\frac{1}{2\varkappa}} \left[ \frac{\mu(B(x,r))}{r^{\nu-\alpha}} \right]^q \frac{dr}{r} \right]^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Для любого $\delta$, $0 < \delta \leq 1/4\varkappa$,

$$I_{\alpha,q}\mu(x) \geq \left[ \int\limits_\delta^{2\delta} \left[ \frac{\mu(B(x,r))}{r^{\nu-\alpha}} \right]^q \frac{dr}{r} \right]^{1/q} \geq \frac{\mu(B(x,\delta))}{(2\delta)^{\nu-\alpha}} (\ln 2)^{1/q}.$$

Отсюда вытекает оценка

$$M_{\alpha,\frac{1}{4\varkappa}}\mu(x) \leq c I_{\alpha,q}\mu(x). \tag{5}$$

Так как

$$\int\limits_{\mathbb{G}} U_{\alpha,p}\mu(x)\, d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} \Bigl( \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x)\, d\mu(x) \Bigr)^q dy,$$

принимая во внимание предложение 1 и неравенство (5), для доказательства неравенства Вольфа достаточно показать, что

$$\int\limits_{\mathbb{G}} (I_{\alpha,q}\mu(x))^q\, dx \leq c \int\limits_{\mathbb{G}} W_{\alpha,p}\mu(x)\, d\mu(x).$$

Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{G}} (I_{\alpha,q}\mu(x))^q\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \int\limits_0^{\frac{1}{2\varkappa}} \left[ \frac{\mu(B(x,r))}{r^{\nu-\alpha}} \right]^q \frac{dr}{r}\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2\varkappa}} \Bigl( \int\limits_{\mathbb{G}} \mu(B(x,r))^q\, dx \Bigr) \frac{dr}{r^{(\nu-\alpha)q+1}}. \tag{6}$$

Оценим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{\mathbb{G}} \mu(B(x,r))^q\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \mu(B(x,r))^{q-1} \Bigl( \int\limits_{d(x^{-1}y)<r} d\mu(y) \Bigr) dx$$
$$= \int\limits_{\mathbb{G}} \Bigl( \int\limits_{d(y^{-1}x)<r} \mu(B(x,r)^{q-1}\, dx \Bigr) d\mu(y) \leq c r^\nu \int\limits_{\mathbb{G}} \mu(B(y,2\varkappa r))^{q-1}\, d\mu(y).$$

Итак,

$$\int\limits_{\mathbb{G}} (I_{\alpha,q}\mu(x))^q\, dx \leq c \int\limits_0^{\frac{1}{2\varkappa}} \Bigl( \int\limits_{\mathbb{G}} \mu(B(y,2\varkappa r))^{q-1}\, d\mu(y) \Bigr) \frac{dr}{r^{(\nu-\alpha)q+1}} r^\nu.$$

Отсюда и следует требуемое неравенство. $\square$

## § 3. Емкость и нелинейные потенциалы

Сформулируем основные положения теории нелинейной емкости [6] для групп Карно. Пусть $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}_1$ — группы Карно, $k(x,y)$ — неотрицательная измеримая функция на $\mathbb{G}\times\mathbb{G}_1$, $\mu$, $\gamma$ — неотрицательные меры, определенные на $\sigma$-алгебре всех борелевских множеств групп $\mathbb{G}$ и $\mathbb{G}_1$, $f$ — неотрицательная функция, $f\in L_p(\mathbb{G}_1,\gamma)$. Положим

$$k(x,f\gamma)=\int\limits_{\mathbb{G}_1} k(x,y)f(y)\,d\gamma(y),\quad k(\mu,y)=\int\limits_{\mathbb{G}} k(x,y)\,d\mu(x).$$

Если $E$ — произвольное подмножество $\mathbb{G}$, то определим его емкость следующим образом:

$$\operatorname{cap}_{k,\gamma,p}(E)=\inf\biggl\{\int\limits_{\mathbb{G}_1} f(y)^p\,d\gamma(y):f\geq 0,\ k(x,f\gamma)\geq 1 \text{ на } E\biggr\}. \tag{7}$$

Будем также говорить, что некоторое свойство выполняется *для квазивсех* $x$, если оно выполняется всюду, кроме множества $\operatorname{cap}_{k,\gamma,p}$-емкости нуль.

Из минимаксной теоремы [7] следует двойственное выражение для емкости компактного множества $e$:

$$\operatorname{cap}_{k,\gamma,p}(e)^{1/p}=\sup\biggl\{\|\mu\|_1:\mu\in M^+(e)\text{ и }\int\limits_{\mathbb{G}_1} k(\mu,y)^q\,d\gamma(y)\leq 1\biggr\}, \tag{8}$$

где $M^+(e)$ — множество борелевских мер, сосредоточенных на $e$, $\|\mu\|_1$ — полная вариация меры $\mu$, а числа $p$ и $q$ связаны соотношением $pq=p+q$. Более того, для компакта $e$ существует борелевская мера $\mu_e$, сосредоточенная на $e$, такая, что

$$\|\mu_e\|_1=\operatorname{cap}_{k,\gamma,p}(e)=\int\limits_{\mathbb{G}_1} k(\mu_e,y)^q\,d\gamma(y);$$

$$U^{\mu_e}(x)=k(x,k(\mu_e,.)^{q-1}\gamma)\geq 1\quad\text{для } \operatorname{cap}_{k,\gamma,p}\text{-квазивсех } x\in e; \tag{9}$$

$$U^{\mu_e}(x)\leq 1\quad\text{для всех } x\in\operatorname{supp}\mu_e. \tag{10}$$

Здесь $\operatorname{supp}\mu$ — носитель меры $\mu$. Экстремальная мера $\mu_e$ называется *емкостной мерой множества* $e$. Функция $U^\mu$ называется *нелинейным потенциалом меры* $\mu$, ассоциированным с ядром $k$.

Если положить $\mathbb{G}_1=\mathbb{G}$, $d\gamma_1=dy$, а $k_1(x,y)=J_\alpha(y^{-1}x)$, то получим бесселеву емкость

$$\operatorname{cap}_{\alpha,p}(E)=\operatorname{cap}_{k_1,\gamma_1,p}(E)=\inf\biggl\{\int\limits_{\mathbb{G}} f(y)^p\,dy:f\geq 0,\ J_\alpha(x,f)\geq 1\ \text{ на } E\biggr\}.$$

Нетрудно видеть, что нелинейный потенциал, ассоциированный с ядром $k_1$, есть $U_{\alpha,p}\mu(x)$. Из формулы (10) и теоремы 3 вытекает, что для экстремальной меры $\mu_e$, ассоциированной с ядром $J_\alpha$, потенциал Вольфа ограничен:

$$W_{\alpha,p}\mu_e(x)\leq c\quad\text{для всех } x\in\operatorname{supp}\mu_e. \tag{11}$$

Будем говорить, что две положительные величины $A$ и $B$ *сравнимы*, $A\sim B$, если $c_1B\leq A\leq c_2B$ для некоторых положительных постоянных, не зависящих от $A$ и $B$. Используя неравенство Вольфа, можно найти емкость, сравнимую с бесселевой емкостью. Возьмем ядро $k_2(x,(y,t)) = \chi(\delta_{t^{-1}}(y^{-1}x))t^{\alpha-\nu}$ при $t > 0$ и $k_2(x,(y,t)) = 0$ для значений $t \le 0$. Здесь $x, y \in \mathbb{G}$, $\chi(z)$ — характеристическая функция единичного шара. Положим $d\gamma_2 = dy\,dt/t$, $0 < t \le 1$, $d\gamma_2 = 0$ при $t > 1$. Бесселева емкость $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(E)$ сравнима с емкостью, определенной в общем виде (7) для ядра $k_2(x,(y,t))$ и меры $\gamma_2$: $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(E) \sim \operatorname{cap}_{k_2,\gamma_2,p}(E)$. Действительно, заметим, что нелинейный потенциал $U^\mu(x) = k_2(x, k_2(\mu,\cdot)^{1/p-1}\gamma)$, ассоциированный с ядром $k_2$, сравним с потенциалом Вольфа $W_{\alpha,p}\mu(x)$. Имеем

$$U^\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{G}\times[0,1]} k_2(x,(y,t))\biggl(\int\limits_{\mathbb{G}} k_2(z,(y,t))\,d\mu(z)\biggr)^{\frac{1}{p-1}} dy\frac{dt}{t}.$$

Внутренний интеграл в этом выражении равен $t^{\alpha-\nu}\mu(B(y,t))$. Поменяв порядок интегрирования, получим

$$U^\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{G}}\int\limits_0^1 \chi(\delta_{t^{-1}}(y^{-1}x))t^{(\alpha-\nu)(q-1)}\mu(B(y,t))^{q-1}\,dtdy$$
$$= \int\limits_0^1\int\limits_{B(x,t)} t^{(\alpha-\nu)q-1}\mu(B(y,t))^{q-1}\,dydt.$$

Воспользовавшись тем, что $B(y,t) \subset B(x, 2\varkappa t)$ и $B\bigl(x, \frac{t}{2\varkappa}\bigr) \subset B(y,t)$, приходим к сравнимости потенциалов.

Ввиду теоремы 3 имеем $\|k_1(\mu,\cdot)\|_{L_q(\gamma_1)} \sim \|k_2(\mu,\cdot)\|_{L_q(\gamma_2)}$ для любой меры $\mu$. Из определения емкости (8) отсюда получаем сравнимость емкостей. Заметим, что из неравенства (9) вытекает неравенство $W_{\alpha,p}\mu_e(x) \ge 1/c > 0$, справедливое для квазивсех $x \in e$, где $\mu_e$ — некоторая экстремальная мера, ассоциированнная с ядром $k_2$.

В этом параграфе докажем теорему, позволяющую оценивать емкость множеств через верхние и нижние границы потенциалов мер. Следующее предложение доказано в евклидовом случае в [24], и его доказательство дословно переносится на группы Карно.

**Предложение 2.** *Для любой неотрицательной меры $\mu$ выполняется неравенство*

$$\operatorname{cap}_{\alpha,p}(W_{\alpha,p}\mu > \lambda) \le \frac{c}{\lambda^{p-1}}\|\mu\|_1, \quad \alpha p \le \nu,$$

*где постоянная $c$ зависит только от $\alpha$, $p$, $\nu$.*

Из предложения 2 и полученных выше оценок вытекает

**Теорема 4.** *Пусть $e$ — компактное множество в $\mathbb{G}$, $\mu$ — мера с носителем в $e$, $\alpha p \le \nu$.*

(i) *Если $W_{\alpha,p}\mu(x) \le 1$ для всех $x \in e$, то $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e) \ge c_1\|\mu\|_1$.*

(ii) *Если $W_{\alpha,p}\mu \ge 1$ для всех $x \in e$, то $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e) \le c_1\|\mu\|_1$. Здесь постоянные $c_1$ и $c_2$ зависят только от $\alpha$, $p$ и $\nu$.*

В качестве следствия получаем оценку для емкости шара.

**Следствие 1.** *Для $p > 1$, $\alpha p < \nu$, всех $x \in \mathbb{G}$ и $r \le 1$ для бесселевой емкости шара $B(x,r)$ справедлива эквивалентность:* $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(B(x,r)) \sim r^{\nu-\alpha p}$.

Доказательство. Очевидно, шар можно рассматривать замкнутым, а $r < \frac{1}{2\varkappa}$. Пусть $y$ — произвольная точка из шара $B(x,r)$, $r < \frac{1}{2\varkappa}$, мера $\mu$ равна мере $Ady$, ограниченной на шаре $B(x,r)$, где постоянную $A$ выберем позже.

Оценим снизу потенциал Вольфа в точке $y$:

$$W(y) = \int\limits_0^1 \left[\frac{\mu(B(y,t))}{t^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1} \frac{dt}{t}.$$

Так как $B(y,t) \supset B(x,r)$ при $t \geq 2\varkappa r$, то

$$W(y) \geq \int\limits_{2\varkappa r}^1 \left[\frac{\mu(B(y,t))}{r^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1} \frac{dt}{t} \geq A^{q-1}\mu(B(x,r)^{q-1} \int\limits_{2\varkappa r}^1 t^{(\alpha p-\nu)(q-1)} \frac{dt}{t}.$$

Постоянную $A$ выберем так, чтобы последнее выражение равнялось 1. Воспользовавшись теоремой 4, получим $\mathrm{cap}_{\alpha,p}(B(x,r)) \leq c\|\mu\|_1 = cA\mu(B(x,r)) \leq cr^{\nu-\alpha p}$.

Чтобы оценить потенциал Вольфа сверху, разобьем промежуток интегрирования на 2: $[0, 2\varkappa r]$ и $[2\varkappa r, 1]$. Второй интеграл оценивается аналогично предыдущему случаю и не превосходит $cA^{q-1}\mu(B(x,r)^{q-1}r^{(\alpha p-\nu)(q-1)}$. Первый интеграл не превосходит $cr^{\alpha q}$, что, в свою очередь, не превосходит второго интеграла. Из первого утверждения теоремы получим оценку снизу для емкости шара $B(x,r)$. $\square$

**Следствие 2.** *Для $p > 1$, $\alpha p = \nu$, всех $x \in \mathbb{G}$, $r < 1$ для бесселевой емкости шара $B(x,r)$ справедлива эквивалентность:* $\mathrm{cap}_{\alpha,p}(B(x,r)) \sim \left(\ln \frac{2}{r}\right)^{1-p}$.

Доказательство. Оценка емкости сверху получается так же, как и выше для случая $\alpha p < \nu$. Справедливость оценки снизу вытекает из следующего предложения. $\square$

**Предложение 3.** *Если $\alpha p = \nu$ и диаметр множества $e$ не превосходит 1, то* $\mathrm{cap}_{\alpha,p}(e) \geq c(\ln(2^\nu/|e|))^{1-p}$.

Доказательство. Чтобы оценить емкость множества $e$ снизу, воспользуемся обобщением неравенства Похожаева:

$$\int\limits_{\mathbb{G}} F\left(c\frac{|u|^{p'}}{\|u\|^{p'}_{S^\alpha_p}}\right) dx \leq 1 \tag{12}$$

для любой $u \in S^\alpha_p$, где $c$ — постоянная, не зависящая от $u$ (доказательство этого неравенства в [25], полученное в евклидовом пространстве, очевидно, обобщается на группы Карно).

Пусть $u$ — допустимая функция для оценки емкости, $u = f * J_\alpha \geq 1$ на $e$. Из (12) получаем оценку $F\left(c\|u\|^{-p'}_{S^\alpha_p}\right)|e| \leq 1$. Значит, $F(c(\mathrm{cap}_{\alpha,p}(B(x,r)))^{1/(1-p)}) \leq |e|^{-1}$. Так как аргумент функции $F$ в этом неравенстве отделен от нуля, то $\exp(c(\mathrm{cap}_{\alpha,p}(B(x,r)))^{1/(1-p)}) \leq c|e|^{-1}$. $\square$

## § 4. Емкостное неравенство и теоремы вложения

Рассуждая так же, как в [7, 8, 13], можно доказать сильное емкостное неравенство типа Мазьи.

**Теорема 5.** *Найдется постоянная $c$, зависящая только от $\alpha, p, \nu$, такая, что*

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{cap}_{\alpha,p}(x : (f * J_\alpha)(x) \geq t)\, dt^p \leq c \int\limits_{\mathbb{G}} f(x)^p\, dx$$

*для всех* $f \geq 0$.

Используя сильное емкостное неравенство, можно получить следующее утверждение о непрерывности вложения пространства потенциалов $S_p^\alpha(\mathbb{G})$ в пространство $L_q(\mu, \mathbb{G})$. Через $\mu_K$ будем обозначать ограничение меры $\mu$ на множество $K$.

**Теорема 6.** *Пусть* $1 < p \leq q < \infty$ *и* $\mu$ *— борелевская мера на* $\mathbb{G}$. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *существует постоянная* $c_1$ *такая, что* $\|f * J_\alpha\|_{L_q(\mu)} \leq c_1 \|f\|_{L_p(\mathbb{G})}$ *для всех измеримых функций* $f \in L_p$;

2) *существует постоянная* $c_2$ *такая, что* $\|\mu_K * J_\alpha\|_{p'} \leq c_2 \mu(K)^{1/q'}$ *для всех компактных множеств* $K$;

3) *существует постоянная* $c_3$ *такая, что* $\sup\limits_{t>0} \mu(\{x : |f * J_\alpha| \geq t\})^{1/q} \leq c_3 \|f\|_{L_p(\mathbb{G})}$ *для всех* $f \in L_p(\mathbb{G})$;

4) *существует постоянная* $c_4$ *такая, что* $\mu(K)^{1/q} \leq c_4 \operatorname{cap}_{\alpha,p}(K)^{1/p}$ *для всех компактных множеств* $K$.

Доказательство. Покажем, что $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$. В силу того, что $J_\alpha(x^{-1}) = J_\alpha(x)$, выполняется следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{G}} f(\mu_K * J_\alpha)\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} f * J_\alpha \, d\mu_K.$$

Поэтому первая импликация следует из того, что

$$\int\limits_{\mathbb{G}} f * J_\alpha \, d\mu_K \leq \|f * J_\alpha\|_{L_q(\mu)} \mu(K)^{1/q'} \leq c_1 \|f\|_p \mu(K)^{1/q'} \quad \text{для всех } f \in L_p.$$

Для доказательства второй импликации возьмем произвольную функцию $f \in C_0^\infty(\mathbb{G})$. Множество

$$N_t = \left\{ x \in \mathbb{G} : (f * J_\alpha)(x) = \int\limits_{\mathbb{G}} J_\alpha(y^{-1}x) f(y)\, dy \geq t \right\}$$

компактно. Имеем $t\mu_t(N_t) \leq \int\limits_{\mathbb{G}} |f * J_\alpha| d\mu_{N_t} \leq \|f\|_p \|\mu_{N_t} * J_\alpha\|_{p'} \leq c_2 \|f\|_p \mu(N_t)^{1/q'}$. Искомый результат доказывается аппроксимацией произвольной функции $f \in L_p$ последовательностью функций из $C_0^\infty(\mathbb{G})$ в $L^p$-норме.

Для доказательства третьей импликации возьмем функцию $f$ такую, что $J_\alpha * f \geq 1$ на множестве $K$. Из условия (3) следует, что $\mu(K)^{1/q} \leq c_3 \|f\|_p$, и из определения емкости вытекает: $\mu(K)^{1/q} \leq c_3 \operatorname{cap}_{\alpha,p}(K)^{1/p}$.

Чтобы доказать последнюю импликацию, применим сильное емкостное неравенство к функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{G})$. Учитывая условие 4, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{G}} |f * J_\alpha|^q \, d\mu = \int\limits_0^\infty \mu(N_t)\, dt^q \leq A_q(\mu)^q \int\limits_0^\infty \operatorname{cap}_{\alpha,p}(N_t)^{q/p}\, dt^q.$$

Здесь $A_q(\mu) = \sup\bigl\{\mu(K)^{1/q} \operatorname{cap}_{\alpha,p}(K)^{-1/p} : K \text{ — компакт}\bigr\}$. Из определения емкости легко получить элементарное неравенство

$$\operatorname{cap}_{\alpha,p}(x \in \mathbb{G} : (f * J_\alpha)(x) \geq t) \leq t^{-p} \int\limits_{\mathbb{G}} f^p \, dx.$$

Воспользовавшись этим неравенством, имеем $t\,\mathrm{cap}_{\alpha,p}(N_t)^{1/p} \le \|f\|_p$. Так как $q \ge p$, то

$$\int_0^\infty \mathrm{cap}_{\alpha,p}(N_t)^{q/p}\,dt^q \le q/p\|f\|_p^{q-p}\int_0^\infty \mathrm{cap}_{\alpha,p}(N_t)\,dt^p.$$

Наконец, с помощью теоремы 5 выводим $\int\limits_{\mathbb{G}} |f * J_\alpha|^q\,d\mu \le c(q/p)A_q(\mu)^q\|f\|^q_{L_p\mathbb{G})}$, и искомый результат получается предельным переходом. $\square$

Если $1 < p < q < \infty$, то условие (4) можно заменить более простым условием. Вместо семейства всех компактных множеств достаточно рассмотреть семейство всех шаров. Следующий результат применяется в [26, 27].

**Теорема 7.** *Если $1 < p < q < \infty$, $\alpha p \le \nu$, то необходимым и достаточным условием непрерывности отображения $f \to f * J_\alpha$ из $L_p(\mathbb{G})$ в $L_q(\mu, \mathbb{G})$ является условие*

$$\mu(B(x,r)) \le \begin{cases} (cr^{\nu-\alpha p})^{q/p} & \text{при } \alpha p < \nu,\\ c\bigl(\ln \frac{2}{r}\bigr)^{(1-p)q/p} & \text{при } \alpha p = \nu \end{cases} \tag{13}$$

*для всех $r \in (0,1)$.*

Доказательство. Покажем, что выполняется условие (2) предыдущей теоремы. Воспользовавшись неравенством Вольфа, имеем

$$\|\mu_K * J_\alpha\|_{p'}^{p'} \le \int\limits_K W_{\alpha,p}\mu_K(x)\,d\mu(x) = \int\limits_K \int\limits_0^1 \left[\frac{\mu_K(B(x,r))}{r^{\nu-\alpha p}}\right]^{p'-1}\frac{dr}{r}\,d\mu.$$

Разберем сначала случай $\alpha p < \nu$. Ввиду предположения теоремы $\mu_K(B(x,r)) \le cr^{(\nu-\alpha p)q/p}$. Кроме того, $\mu_K(B(x,r)) \le \mu(K)$. Пусть $0 < R < 1$. Тогда

$$\|\mu_K * J_\alpha\|_{p'}^{p'} \le \int\limits_K \left(\int\limits_0^R cr^{(\nu-\alpha p)(q/p-1)(p'-1)}\frac{dr}{r} + \mu(K)^{p'-1}\int\limits_R^1 \frac{1}{r^{(\nu-\alpha p)(p'-1)}}\frac{dr}{r}\right)d\mu.$$

Следовательно, $\|J_\alpha * \mu_K\|_{p'}^{p'} \le \frac{c\mu(K)}{R^{(\alpha p-\nu)(p'-1)(q/p-1)}} + \mu(K)^{p'}R^{(\alpha p-\nu)(p'-1)}$. Если $\mu(K) \le 1$, то выберем $0 < R < 1$ так, чтобы $\mu(K)^{-p'/q} = R^{(\alpha p-\nu)(p'-1)}$. Имеем $\|\mu_K * J_\alpha\|_{p'}^{p'} \le (c+1)\mu(K)^{p'/q'}$. Если $\mu(K) > 1$, то возьмем $R = 1$. Тогда $\|\mu_K * J_\alpha\|_{p'}^{p'} \le c\mu(K) \le c\mu(K)^{p'/q'}$, так как $p'/q' > 1$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha p = \nu$. По предположению теоремы $\mu_K(B(x,r)) \le c\bigl(\ln\frac{2}{r}\bigr)^{(1-p)q/p}$. Также выполняется тривиальное неравенство $\mu_K(B(x,r)) \le \mu(K)$. Тогда для любого $0 < R < 1$ получаем

$$\|\mu_K * J_\alpha\|_{p'}^{p'} \le \int\limits_K \left(\int\limits_0^R \frac{c\,dr}{r\bigl(\ln\frac{2}{r}\bigr)^{q/p}} + \mu(K)^{p'-1}\int\limits_R^1 \frac{dr}{r}\right)d\mu.$$

Следовательно, $\|J_\alpha * \mu_K\|_{p'}^{p'} \le \frac{c\mu(K)}{(\ln\frac{2}{R})^{q/p-1}} + c\mu(K)^{p'}\ln\frac{2}{R}$. Если $\mu(K) \le 1$, то выберем $0 < R < 1$ так, чтобы $\mu(K) = (\ln\frac{2}{r})^{(1-p)q/p}$. Имеем $\|\mu_K * J_\alpha\|_{p'}^{p'} \le \mu(K)^{p'/q'}$. Если $\mu(K) > 1$, то возьмем $R = 1$. Тогда $\|\mu_K * J_\alpha\|_{p'}^{p'} \le c\mu(K) \le c\mu(K)^{p'/q'}$, так как $p'/q' > 1$. $\square$

## § 5. Емкостные и метрические характеристики множеств

Пусть $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неубывающая непрерывная функция, $h(0) = 0$. Для борелевского множества $E \subset \mathbb{G}$ определим величину

$$H_h^\rho(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} h(\operatorname{diam} E_i) : E \subset \bigcup E_i,\ \operatorname{diam} E_i \le \rho\right\},$$

где $0 < \rho \le \infty$ и нижняя грань берется по всем счетным покрытиям множества $E$ множествами $E_i$ с диаметрами $\operatorname{diam} E_i \le \rho$. Ясно, что $H_h^{\rho_1}(E) \le H_h^{\rho_2}(E)$, если $\rho_2 \le \rho_1$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{\rho\to 0} H_h^\rho(E) = H_h(E) \le \infty$. Величина $H_h(E)$ есть мера Хаусдорфа множества $E$ относительно калибровочной функции $h$. Если $h(\rho) = \rho^\alpha$, будем писать просто $H_\alpha(E)$. Функцию множества $H_h^\infty(E)$ называют *вместимостью Хаусдорфа.* Согласно критерию Каратеодори все борелевские множества $H_h$-измеримы. Стандартным образом доказывается

**Предложение 4.** *Пусть $\rho \in (0,\infty]$, а $E$ — множество в $\mathbb{G}$. Значение $H_h^\rho(E)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $H_h(E)$ равно нулю.*

Рассмотрим также следующую величину:

$$\lambda_h^\rho(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} c_i h(\operatorname{diam} E_i) : E \subset \bigcup E_i,\ \operatorname{diam} E_i \le \rho\right\},$$

где нижняя грань берется по всем счетным покрытиям множества $E$ таким, что $\operatorname{diam} E_i \le \rho$, $0 < c_i \le 1$ и $\chi_E \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{E_i}$. В [28] доказан аналог теоремы Фростмана для метрических пространств в случае степенной калибровочной функции $h(\rho) = \rho^s$. Нетрудно убедиться в том, что приведенное там доказательство теоремы 8.17, опирающееся на теорему Хана — Банаха о продолжении линейного функционала, остается справедливым и для произвольной функции $h$.

**Теорема 8.** *Пусть $X$ — компактное метрическое пространство, $K \subset X$ — компакт. Существует мера Радона $\omega$ с носителем в $K$ такая, что $\omega(K) = \lambda_h^\rho(K)$ и $\omega(E) \le h(\operatorname{diam} E)$ для всех $E \subset X$ с $\operatorname{diam} E \le \rho$.*

Заметим, что в классической теореме Фростмана речь идет о функции множества $H_h^\rho(E)$, а не $\lambda_h^\rho(E)$. Ясно, что $\lambda_h^\rho(E) \le H_h^\rho(E)$ для всех $E \subset X$ и $0 < \rho \le \infty$. Обратное неравенство $\lambda_h^\rho(E) \le cH_h^\rho(E)$ доказано в работе [28] лишь для степенной калибровочной функции. В случае метрического пространства с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, это неравенство доказано в [29] для произвольной функции $h$.

**Теорема 9.** *Пусть $e \subset \mathbb{G}$ — компактное множество, $h(\rho)$ — неубывающая непрерывная функция, для которой $h(0) = 0$. Предположим, что*

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{h(\rho)}{\rho^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1} \frac{d\rho}{\rho} < \infty. \tag{14}$$

*Тогда существует постоянная $A$ такая, что $H_h^\infty(e) \le A\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e)$. Таким образом, $H_h(e) = 0$, если $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e) = 0$.*

Доказательство. Пусть $e$ — компактное множество на группе $\mathbb{G}$. По теореме 8 существует ненулевая мера $\mu$, сосредоточенная на $e$ и такая, что

$\mu(B(x,\rho)) \le h(\rho)$ при любом положительном $\rho > 0$ и $H_h^\infty(e) \le A\mu(e)$. Из условия (14) вытекает, что для всех $x \in E$ верно $W_{\alpha,p}\mu(x) \le M$. Тогда по теореме 2 для меры $\mu$ имеем $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e) \ge cM^{1-p}\|\mu\|_1$, где постоянная $c$ не зависит от множества $e$. Следовательно, $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e) \ge cM^{1-p}A^{-1}H_h^\infty(e)$. $\square$

В определении меры Хаусдорфа мы покрывали исходное множество $E$ произвольными множествами, диаметры которых не превосходят $\rho$. Отметим, что в классическом определении рассматривают покрытия множества $E$ шарами так, что $E \subset \bigcup B(x_i, t_i)$ и $t_i \le \rho$. В следующей теореме рассматривается сферическая мера Хаусдорфа

$$H^\rho_{\mathrm{sph},h}(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty h(t_i) : E \subset \cup B(x_i,t_i), t_i \le \rho\right\},$$

где $0 < \rho \le \infty$, $H_{\mathrm{sph},h}(E) = \lim\limits_{\rho\to 0} H^\rho_{\mathrm{sph},h}(E)$. Для степенной функции $h(t) = t^s$ сферическая мера и стандартная мера Хаусдорфа абсолютно непрерывны относительно друг друга, $1/2^s H_{\mathrm{sph},s} \le H_s \le H_{\mathrm{sph},s}$ [30].

**Теорема 10.** *Пусть $e$ — компактное множество на группе $\mathbb{G}$,*

$$h(r) = \begin{cases} r^{\nu-\alpha p}, & \text{если } \alpha p < \nu, \\ h(r) = (\ln_+ 2/r)^{1-p}, & \text{если } \alpha p = \nu. \end{cases}$$

*Если хаусдорфова мера $H_h(e)$ множества $e$ конечна, то $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e) = 0$.*

Доказательство. Допустим, что $\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e) > 0$. Пусть $\mu_e$ — емкостная мера для множества $e$. Тогда $U_{\alpha,p}\mu_e(x) \le 1$ при любом $x \in \operatorname{supp}\mu_e$. Воспользовавшись принципом ограниченности для потенциала Вольфа, получим $W_{\alpha,p}\mu_e(x) \le M$ на группе $\mathbb{G}$. Рассуждая так же, как в [9], можно показать: найдется такое компактное множество $K$, что $\mu_e(K) > 0$ и функция $W_{\alpha,p}\theta(x)$, где $\theta$ — сужение меры $\mu_e$ на множество $K$, непрерывна в $\mathbb{G}$. Положим

$$F_\rho = \int_\rho^1 \left[\frac{\theta(B(x,\tau))}{\tau^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Тогда функция $F_\rho$ непрерывна в $\mathbb{G}$ и из теоремы Дини следует равномерная сходимость $F_\rho(x)$ к функции $W_{\alpha,p}\theta(x)$ при $\rho \to 0$ в шаре $B \supset K$. Шар $B$ возьмем таким, чтобы для точек $x \notin B$ выполнялось $W_{\alpha,p}\theta(x) = F_\rho(x) = 0$. Итак, мы можем утверждать, что ряд

$$\sum_{m=1}^\infty \int_{(m+1)^{-1}}^{m^{-1}} \left[\frac{\theta(B(x,\tau))}{\tau^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1} \frac{d\tau}{\tau}$$

сходится равномерно в $\mathbb{G}$ и сумма его всюду не превосходит $M$. Обозначив члены ряда через $\varphi_m(x)$, подберем теперь последовательность положительных чисел $k_m$, $m \in \mathbb{N}$, монотонно стремящуюся к нулю и такую, что ряд $\sum\limits_{m=1}^\infty k_m^{-1}\varphi_m(x)$ по-прежнему сходится равномерно в $\mathbb{G}$, а сумма его не превосходит $2M$. Пусть $k(\rho) = k_m$, если $\rho \in [(m+1)^{-1}, m^{-1}]$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\int_0^1 \left[\frac{\theta(B(x,\rho))}{\rho^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1} \frac{d\rho}{k(\rho)\rho} \le 2M \tag{15}$$

при любом $x \in \mathbb{G}$. Пусть теперь $B_t \subset \mathbb{G}$ — любой шар радиуса $t \le \frac{1}{4\varkappa}$, где $\varkappa$ — константа из неравенства треугольника. Если $x \in B_t$, то в случае $\alpha p < \nu$ имеем

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{\theta(B(x,\rho))}{\rho^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1} \frac{d\rho}{k(\rho)\rho} \ge \int\limits_{2\varkappa t}^{4\varkappa t} \left[\frac{\theta(B(x,\rho))}{\rho^{\nu-\alpha p}}\right]^{q-1} \frac{d\rho}{k(\rho)\rho} \ge \frac{A[\theta(B_t)]^{q-1}}{t^{(\nu-\alpha p)(q-1)}k(2ct)}.$$

Учитывая неравенство (15), выводим $A\theta(B_t)/k(2\varkappa t)^{p-1} \le (2M)^{p-1}t^{\nu-\alpha p}$ для любого шара $B_t \subset \mathbb{G}$ радиуса $t \le \frac{1}{4\varkappa}$.

Для случая $\alpha p = \nu$ имеем

$$\int\limits_0^1 [\theta(B(x,\rho))]^{q-1} \frac{d\rho}{k(\rho)\rho} \ge \int\limits_{2\varkappa t}^1 [\theta(B(x,\rho))]^{q-1} \frac{d\rho}{k(\rho)\rho} \ge A[\theta(B_t)]^{q-1}k(2\varkappa t)\ln\frac{1}{2\varkappa t}.$$

Принимая во внимание неравенство (15), получаем, что $A\theta(B_t)/k(2\varkappa t)^{p-1} \le (2M)^{p-1}\bigl(\ln\frac{1}{2\varkappa t}\bigr)^{1-p}$ для любого шара $B_t \subset \mathbb{G}$ радиуса $t \le \frac{1}{4\varkappa}$.

Пусть $\mathscr{B} = \{B_i\}$ — какое-нибудь не более чем счетное покрытие множества $e$, состоящее из шаров, радиусы $t_B$ которых меньше $\varepsilon$. Тогда

$$A\frac{\theta(K)}{[k(\varepsilon)]^{p-1}} \le \sum_{B\in\mathscr{B}} \frac{\theta(B)}{[k(t_B)]^{p-1}} \le (2M)^{p-1} \sum_{B\in\mathscr{B}} t_B^{\nu-\alpha p} \tag{16}$$

для случая $\alpha p < \nu$ и

$$A\frac{\theta(K)}{[k(\varepsilon)]^{p-1}} \le \sum_{B\in\mathscr{B}} \frac{\theta(B)}{[k(t_B)]^{p-1}} \le (2M)^{p-1} \sum_{B\in\mathscr{B}} \ln(2\varkappa t)^{1-p} \tag{17}$$

для случая $\alpha p = \nu$. Поскольку мера Хаусдорфа $H_h(e)$ множества $e$ конечна, при некотором положительном числе $c$ правые части (16) и (17) соответственно были бы меньше $c$ для некоторого покрытия $\mathscr{B} = \{B\}$. Выбор покрытия зависит от выбора положительного числа $\varepsilon$, которое может быть произвольным. Однако это невозможно, так как $\theta(K) > 0$, а $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} k(\varepsilon) = 0$. $\square$

## § 6. Уточненные и квазинепрерывные функции

**1. Теоремы Егорова и Лузина.** Для функций класса $S_p^\alpha$ можно сформулировать известные теоремы Егорова и Лузина из теории функций вещественного переменного, которые могут быть уточнены за счет использования понятия емкости.

**Теорема 11.** *Пусть ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m$ функций $u_m \in S_p^\alpha$, $\alpha p \le \nu$, сходится абсолютно в пространстве $S_p^\alpha$, и пусть $u$ — его сумма. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать открытое множество $U \subset \mathbb{G}$ такое, что $\operatorname{cap}_{\alpha,p} U < \varepsilon$ и ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m$ равномерно и абсолютно сходится на $\mathbb{G} \setminus U$ к функции $u$.*

Из теоремы 11 выводим, что всякая функция $u$ класса $S_p^\alpha$, $\alpha p \le \nu$, является *уточненной* в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать открытое множество $U \subset \mathbb{G}$ и последовательность функций $u_k \in S_p^\alpha \cap C(\mathbb{G})$ такие, что $\operatorname{cap}_{\alpha,p} U < \varepsilon$ и последовательность $u_k$ сходится равномерно на $\mathbb{G} \setminus U$ к функции $u$ при $k \to \infty$.

Функция $u : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ называется $(\alpha, p)$-*квазинепрерывной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $V \subset \mathbb{G}$ такое, что $\operatorname{cap}_{\alpha,p} V < \varepsilon$ и функция $u$ непрерывна на множестве $\mathbb{G} \setminus V$.

**Теорема 12.** *Всякая функция $u \in S_p^\alpha$ является $(\alpha,p)$-квазинепрерывной.*

Доказательство этих теорем принципиально не отличается от евклидова случая, приведенного, например, в [4].

Символом $d_c(x,y)$ будем обозначать метрику Карно — Каратеодори на группе $\mathbb{G}$.

**Предложение 5.** 1. *Ограничение любой функции $u \in S_p^\alpha$, $\nu-1<\alpha p\le\nu$, на сферу $S(x,r)=\{y\in\mathbb{G}: d_c(x,y)=r\}$ непрерывно для почти всех $r>0$.*

2. *Если последовательность функций $u_m \in S_p^\alpha$, $\nu-1<\alpha p\le\nu$, сходится к функции $u$ в $S_p^\alpha$, то некоторая подпоследовательность $u_{m_k}$ сходится равномерно к $u$ на сфере $S(x,r)$ для почти всех $r>0$.*

Доказательство. 1. Фиксируем точку $x_0\in\mathbb{G}$. Рассмотрим отображение $\varkappa:\mathbb{G}\to\mathbb{R}$, определенное по правилу $\varkappa(y)=d_c(x_0,y)$. Поскольку постоянная Липшица этой функции не превосходит 1, то для любого компактного множество $e\subset\mathbb{G}$ имеем $H^1_\infty(\varkappa(e))\le H^{\nu-\alpha p}_\infty(\varkappa(e))\le H^{\nu-\alpha p}_\infty(e)$. Так как функция $u$ $(\alpha,p)$-квазинепрерывна, для любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество $V\subset\mathbb{G}$ такое, что $\operatorname{cap}_{\alpha,p}V<\varepsilon$ и функция $u$ непрерывна на множестве $\mathbb{G}\setminus V$. Рассмотрим произвольное компактное множество $e\subset V$. Известно, что $\sup\limits_{e\subset V}\operatorname{cap}_{\alpha,p}e=\operatorname{cap}_{\alpha,p}V$. По теореме 9 имеем $H^{\nu-\alpha p}_\infty(e)\le A\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e)$ для любого компактного множества $e\subset V$. Следовательно,

$$H^1(\{r>0: S(x_0,r)\cap V\neq\varnothing\}) \\ \le \sup_{e\subset V} H^1_\infty(\varkappa(e)) \le \sup_{e\subset V} H^{\nu-\alpha p}_\infty(e) \le \sup_{e\subset V} A\operatorname{cap}_{\alpha,p}(e) < A\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon>0$ произвольно, первое утверждение доказано.

2. Для доказательства второго воспользуемся теоремой 11. Существует подпоследовательность $u_{m_k}$ такая, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать открытое множество $U\subset\mathbb{G}$, для которого $\operatorname{cap}_{\alpha,p}U<\varepsilon$ и подпоследовательность $u_{m_k}$ сходится равномерно на $\mathbb{G}\setminus U$ к функции $u$ при $k\to\infty$. Так же, как и в предыдущем случае, приходим к выводу, что множество радиусов, для которых нет равномерной сходимости подпоследовательности $u_{m_k}$ к функции $u$ на сфере $S(x_0,r)$ при $k\to\infty$, имеет нулевую меру. $\square$

Так как любую функцию $u\in W^1_p(U)$, $\nu-1<p\le\nu$, можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы она локально совпадала с некоторой функцией класса $S^1_p$, выводы предложения 5 остаются справедливыми и для квазинепрерывных функций класса $W^1_p(U)$.

**Следствие 3.** 1. *В каждом классе $u\in W^1_p(U)$, $\nu-1<p\le\nu$, существует $(1,p)$-квазинепрерывный представитель $\tilde u$, ограничение которого на сферу $S(x,r)$ непрерывно для почти всех $r\in(0,\operatorname{dist}(x,\partial U))$.*

2. *Если последовательность функций $u_m\in W^1_p(U)$, $\nu-1<p\le\nu$, сходится к функции $u$ в $W^1_p(U)$, то квазинепрерывные представители $\tilde u_{m_k}$ некоторой подпоследовательности $u_{m_k}$ сходятся равномерно к квазинепрерывному представителю $\tilde u$ функции $u$ на сфере $S(x,r)$ для почти всех $r\in(0,\operatorname{dist}(x,\partial U))$.*

**2. Емкость Тейхмюллера и монотонные функции.** Рассмотрим два континуума $F_0$ и $F_1$ на группе Карно $\mathbb{G}$. Пусть $U\subset\mathbb{G}$ — ограниченная область в $\mathbb{G}$, имеющая непустое пересечение как с $F_0$, так и с $F_1$. *Емкостью* $\operatorname{cap}\big(F_0,F_1;W^1_p(U)\big)$ называется величина $\inf\int\limits_U|\nabla_{\mathscr L}u|^p\,dx$, где нижняя грань берется по всем функциям $u \in C(U) \cap W_p^1(U)$, удовлетворяющим условиям $u|_{F_0 \cap U} \leq 0$ и $u|_{F_0 \cap U} \geq 1$. Здесь $\nabla_{\mathscr{L}} u = (X_{11}u, \dots, X_{1n_1}u)$ — субградиент функции $u$. Рассмотрим в качестве области $U$ кольцо $A_{r,R} = \{x \in \mathbb{G} : 0 < r < d_c(0,x) < R < \infty\}$. *Емкостью Тейхмюллера кольца* $A_{r,R}$ называется величина

$$T(r,R;p) = \inf \operatorname{cap}\bigl(F_0, F_1; W_p^1(A_{r,R})\bigr),$$

где нижняя грань берется по всем континуумам $F_0$, $F_1$, пересекающимся как с $F_0$, так и с $F_1$. В качестве следствия теоремы 9 получаем оценку снизу для емкости Тейхмюллера.

**Предложение 6.** *Емкость Тейхмюллера* $T(r,R;p)$, $\nu - 1 < p \leq \nu$, *строго положительна для любых* $0 < r < R < \infty$.

Мы получим это утверждение, доказанное ранее в [14, 31, 32], как следствие более общего результата. Назовем *обобщенной емкостью Тейхмюллера* кольца $A_{r,R}$ величину

$$GT(r,R;p) = \inf \int\limits_{A_{r,R}} |\nabla_{\mathscr{L}} u|^p \, dx,$$

где нижняя грань берется по всем квазинепрерывным функциям $u \in W_p^1(U)$, удовлетворяющим условиям $\min u|_{S(0,t)} \leq 0$ и $\max u|_{S(0,t)} \geq 1$ для почти всех $t \in (r,R)$, где $S(0,t) = \{y \in \mathbb{G} : d_c(0,y) = t\}$.

**Предложение 7.** *Обобщенная емкость Тейхмюллера* $GT(r,R;p)$, $\nu - 1 < p \leq \nu$, *строго положительна для любых* $0 < r < R < \infty$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть кольцо $A_{1,2}$ (в остальных случаях рассуждения аналогичны). Пусть, напротив, $GT(1,2;p) = 0$ для некоторого $\nu - 1 < p \leq \nu$. Тогда найдется последовательность квазинепрерывных функций $u_k \in W_p^1(A_{1,2})$ таких, что $\min u_k|_{S(0,t)} \leq 0$ и $\max u_k|_{S(0,t)} \geq 1$ для почти всех $t \in (1,2)$ и $\|\nabla_{\mathscr{L}} u_k \mid L_p(A_{1,2})\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Используя известные свойства пространств Соболева с первыми обобщенными производными, можно предполагать, что $0 \leq u_k \leq 1$, $k \in \mathbb{N}$, и $u_k(x) \to c$ для квазивсех $x \in A_{1,2}$, где $c \in [0,1]$ — некоторая постоянная (это свойство можно получить с помощью неравенства Пуанкаре). Пусть для определенности $c \leq 1/2$ (иначе $T_0$ и $T_1$ можно поменять местами). Тогда рассмотрим новую последовательность функций $v_k = 2\eta(u_k - c)$, где $\eta \in C_0^\infty(A_{1,2})$ — срезка, равная 1 на $A_{5/4,7/4}$. Очевидно, $v_k \in W_p^1(\mathbb{G}) = S_p^1(\mathbb{G})$ — квазинепрерывная функция, $\|v_k \mid W_p^1\| \to 0$ при $k \to \infty$, и $\max v_k|_{S(0,t)} \geq 1$ для почти всех $t \in (5/4, 7/4)$. С другой стороны, в силу следствия 3 некоторая подпоследовательность $v_{k_m}$ сходится равномерно к нулю на сфере $S(0,t)$ для почти всех $t \in (5/4, 7/4)$. Полученное противоречие приводит к выводу, что $GT(1,2;p) > 0$. $\square$

Из предложения 7 стандартным образом можно получить

**Следствие 4.** *Предположим, что* $p > \nu - 1$, *а* $r < R/2$. *Тогда для обобщенной емкости Тейхмюллера справедливы следующие оценки снизу:*

$$GT(r,R;p) \geq \begin{cases} \gamma_1 \ln \frac{R}{r}, & \text{если} \quad p = \nu, \\ \gamma_2\bigl(\frac{1}{r^{p-\nu}} - \frac{1}{R^{p-\nu}}\bigr), & \text{если} \quad p > \nu, \\ \gamma_3(R^{\nu-p} - r^{\nu-p}), & \text{если} \quad \nu - 1 < p < \nu, \end{cases}$$

*где $\gamma_1$, $\gamma_2$ и $\gamma_3$ — постоянные, не зависящие от $r$ и $R$.*

Доказательство. Например, в случае $p=\nu$ возьмем такое $n$, чтобы $\frac{R}{2^{n+1}} < r \le \frac{R}{2^n}$. Тогда $n \sim \ln\frac{R}{r}$. Поэтому с учетом равенства $T(R/2,R;\nu) = T(R/2^k, R/2^{k-1};\nu)$ для любого $k\in\mathbb{N}$ выводим, что

$$T(r,R;\nu) \ge \sum_{k=1}^{n} T(R/2^k, R/2^{k-1};\nu) \ge nT(1/2,1;\nu) \ge \gamma_1 \ln\frac{R}{r}. \qquad \square$$

Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{G}$, а $f\in W_p^1(\Omega)$, $\nu-1<p\le\nu$. Будем называть $f$ *сферически монотонной*, если ее квазинепрерывный представитель $\tilde f$ удовлетворяет следующему условию. Для любой точки $a\in\Omega$ существует число $r_a>0$ такое, что для почти всех $r\in(0,r_a)$ на шаре $B(a,r)\subset\Omega$, где $B(a,r)=\{y\in\mathbb{G}: d_c(a,y)<r\}$, выполняются неравенства

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B(a,r)} f(x) \le \max_{x\in S(a,r)} f(x) \quad \text{и} \quad \operatorname*{ess\,inf}_{x\in B(a,r)} f(x) \ge \min_{x\in S(a,r)} f(x). \tag{18}$$

**Предложение 8.** *Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{G}$, а $f\in W_\nu^1(\Omega)$ сферически монотонна. Тогда ее квазинепрерывный представитель $\tilde f$ для любого $a\in\Omega$ и почти любого радиуса $r\in(0,r_a/2)$, где $r_a$ — некоторое положительное число, зависящее от $a$, удовлетворяет оценке*

$$(\operatorname*{osc}_{S(a,r)} \tilde f)^\nu \le C\left(\ln\frac{r_a}{r}\right)^{-1} \int\limits_{r<d_c(x,a)<r_a} |\nabla_{\mathscr L} f|^\nu(x)\,dx \tag{19}$$

*с некоторой постоянной $C$, не зависящей от $f$ и $r$.*

Доказательство. По следствию 3 квазинепрерывный представитель $\tilde f$ непрерывен на сфере $S(a,r)$ для $r\in(0,r_a)\setminus E(a,r_a)$, где одномерная мера множества $E(a,r_a)$ равна нулю. Фиксируем $r\in(0,r_a/2)\setminus E(a,r_a)$ и на кольце $A(a;r,r_0)=\{y\in\mathbb{G}: r<d_c(a,y)<r_0\}$ рассмотрим функцию $g(x) = (\tilde f - \min\limits_{S(a,r)} f)/\operatorname*{osc}\limits_{S(a,r)} \tilde f$ (при условии $\operatorname*{osc}\limits_{S(a,r)} \tilde f>0$, иначе доказывать нечего). Функция $g$ будет $(1,\nu)$-квазинепрерывной и обладать следующим свойством: на почти всех сферах $S(a,t)$, $t\in(r,r_0)$, она принимает как значение, большее 1, так и значение, меньшее 0. Тогда ее можно использовать как тестовую функцию для нахождения обобщенной емкости Тейхмюллера, для которой справедливо первое неравенство следствия 4:

$$\gamma_1 \ln\frac{r_0}{r} \le \int\limits_{r<d_c(x,a)<r_a} |\nabla_{\mathscr L} g|^\nu(x)\,dx.$$

Отсюда получаем (19). $\square$

Из предложения 8 легко выводится следующее утверждение.

**Теорема 13.** *Если $f\in W_\nu^1(\Omega)$ сферически монотонна на открытом множестве $\Omega$, то в этом классе существует непрерывный представитель.*

Доказательство. Фиксируем точку $a\in\Omega$ и такое число $r_a>0$, при котором выполняются условие сферической монотонности и неравенство (25). Далее символ $\tilde f$ обозначает $(1,\nu)$-квазинепрерывный представитель класса $f$. В силу следствия 3 функция $\tilde f$ непрерывна на сфере $S(a,r)$ для $r\in(0,r_a)\setminus E(a,r_a)$, где одномерная мера множества $E(a,r_a)$ равна нулю. Из (18) выводим, что для всех точек $x \in B(a,r_a) \setminus \Sigma(a,r_a)$, где множество $\Sigma(a,r_a)$ имеет $(1,\nu)$-емкость, равную нулю, а следовательно, и меру, равную нулю, выполняется неравенство

$$\min_{x\in S(a,r)} \tilde f(x) \le \tilde f(x) \le \max_{x\in S(a,r)} \tilde f(x). \tag{20}$$

Из (20) непосредственно получаем, что для $r \in (0,r_a) \setminus E(a,r_a)$

$$\operatorname*{ess\,osc}_{B(a,r)} \tilde f = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in B(a,r)} \tilde f(x) - \operatorname*{ess\,inf}_{x\in B(a,r)} \tilde f(x) \le \operatorname*{osc}_{S(a,r)} \tilde f. \tag{21}$$

Из (18), (20) и (21) вытекает, что для всех $a \in \Omega$

$$\lim_{r\to 0, r\in(0,r_a)\setminus E(a,r_a)} \operatorname*{ess\,inf}_{B(a,r)} \tilde f = \lim_{r\to 0, r\in(0,r_a)\setminus E(a,r_a)} \operatorname*{ess\,sup}_{B(a,r)} \tilde f.$$

Обозначим общее значение этих пределов в точке $a \in \Omega$ символом $g(a)$. Заметим, что в силу соотношений

$$\operatorname*{ess\,inf}_{y\in B(a,r)} \tilde f(y) \le \frac{1}{|B(a,r)|} \int\limits_{B(a,r)} \tilde f(y)\,dy \le \operatorname*{ess\,sup}_{y\in B(a,r)} \tilde f(y),$$

справедливых для всех $r \in (0,r_a) \setminus E(x,r_a)$, предел

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(a,r)|} \int\limits_{B(a,r)} \tilde f(y)\,dy \tag{22}$$

существует для всех $a \in \Omega$ и равен $g(a)$. Следовательно, для любой точки $y \in B(a,r)$, где $r \in (0,r_a) \setminus E(a,r_a)$, верны соотношения $\operatorname*{ess\,inf}_{B(a,r)} \tilde f \le g(y) \le \operatorname*{ess\,sup}_{B(a,r)} \tilde f$.

Из этих неравенств вытекает непрерывность функции $g$ в точке $a \in \Omega$. Поскольку предел (22) совпадает почти всюду с функцией $\tilde f$, имеем две $(1,\nu)$-квазинепрерывные функции $\tilde f$ и $g$, совпадающие почти всюду. Значит [10], они равные квазивсюду (т. е. всюду, за исключением множества нулевой $(1,\nu)$-емкости). □

Из (18) и теоремы 13 вытекает следующая оценка, выведенная другим способом в [32] и часто используемая для получения тонких свойств отображений на группах Карно (см., например, [32–39]).

**Следствие 5.** *Пусть $\Omega$ — область в $\mathbb{G}$, а $f \in W^1_\nu(\Omega)$ сферически монотонна. Тогда ее непрерывный представитель $\tilde f$ для любого $a \in \Omega$ и любого радиуса $r \in (0,r_a/2)$, где $r_a$ — некоторое положительное число, зависящее от $a$, удовлетворяет оценке*

$$(\operatorname*{osc}_{S(a,r)} \tilde f)^\nu \le C \int\limits_{r<d_c(x,a)<2r} |\nabla_{\mathscr{L}} f|^\nu(x)\,dx$$

*с некоторой постоянной $C$, не зависящей от $f$ и $r$.* □

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазья В. Г.* Полигармоническая емкость в теории первой краевой задачи // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 1. С. 127–148.
2. *Serrin J.* Local behavior of solutions of quasilinear equations // Acta Math. 1964. V. 3, N 3–4. P. 247–302.

**3.** *Fuglede B.* Applications du theorém minimax a l'ètude de diverses capacités // C. R. Acad. Sci. Paris., Ser. A. 1968. V. 266. P. 921–923.

**4.** *Решетняк Ю. Г.* О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 5. С. 1109–1138.

**5.** *Мазья В. Г., Хавин В. П.* Нелинейная теория потенциала // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 6. С. 67–138.

**6.** *Meyers M. G.* A theory of capacities for potentials of function in Lebesgue classes // Mat. Scand. 1970. V. 2. P. 255–292.

**7.** *Adams D., Hedberg L.* Function spaces and potential theory. Berlin etc.: Springer-Verl., 1996.

**8.** *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

**9.** *Водопьянов С. К.* Теория потенциала на однородных группах // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 1. С. 57–77.

**10.** *Водопьянов С. К.* $L_p$-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 45–89.

**11.** *Водопьянов С. К.* $L_p$-теория потенциала для обобщенных ядер // Мат. заметки. 1990. Т. 47, № 5. С. 146–148.

**12.** *Водопьянов С. К.* $L_p$-теория потенциала для обобщенных ядер и ее приложения. Новосибирск, 1990. 47 с. (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 6).

**13.** *Водопьянов С. К.* Весовая $L_p$-теория потенциала на однородных группах // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 2. С. 29–48.

**14.** *Водопьянов С. К., Черников В. М.* Пространства Соболева и гипоэллиптические уравнения // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1995. Т. 29. С. 7–62.

**15.** *Водопьянов С. К., Маркина И. Г.* Основы нелинейной теории потенциала для гипоэллиптических уравнений // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1996. Т. 31. С. 100–160.

**16.** *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.

**17.** *Folland G. B.* Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups // Ark. Math. 1975. V. 13, N 2. P. 161–207.

**18.** *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.

**19.** *Calderon A. P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. Mat. Univ. Parma (6). 1951. N 2. P. 203–213.

**20.** *Muckenhoupt B., Wheeden R.* Weighted norm inequalities for fractional integrals // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 192, N 1. P. 261–274.

**21.** *Lu G.* *BMO* Estimates for Eigenfunctions on Riemannian Surfaces and Degenerate Differential Equations Given by Vector Fields Satisfying Hormanderś Condition. Thes. ... doct. phylosophy. Univ. Rutgers, 1991.

**22.** *Jerison D. S., Sanchez–Calle A.* Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields // Indiana Univ. Math. J. 1986. V. 35, N 4. P. 835–854.

**23.** *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

**24.** *Hedberg L. I., Wolff T. H.* Thin sets in nonlinear potential theory // Ann. Inst. Fourier. 1983. V. 33. P. 161–187.

**25.** *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.

**26.** *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Следы бесселевых потенциалов на множествах Альфорса групп Карно // Мат. тр. 2007. Т. 10, № 2. С. 1–43.

**27.** *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Следы пространств Соболева на множествах Альфорса групп Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1201–1221.

**28.** *Mattila P.* Geometry of sets and measures in Euclidean spaces. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

**29.** *Björn J., Onninen J.* Orlicz capacities and Hausdorff measures on metric spaces // Math. Z. 2005. V. 251, N 1. P. 131–146.

**30.** *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002. (Math. Surv. Monogr.; V. 91).

**31.** *Heinonen Ju.* A capacity estimate on Carnot groups // Bull. Sci. Math. Fr. 1995. V. 119, N 5. P. 473–484.

**32.** *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.

**33.** *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 644–677.

**34.** *Vodopyanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Тр. по анализу и геометрии. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2000. С. 603–670.

**35.** *Водопьянов С. К.* $\mathscr{P}$-Дифференцируемость отображений классов Соболева на группе Карно // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 3. С. 305–309.

**36.** *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.

**37.** *Водопьянов С. К.* Основания теории отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 1. С. 7–12.

**38.** *Vodopyanov S. K.* Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups. The interaction of analysis and geometry // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 303–344.

**39.** *Vodopyanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings. The interaction of analysis and geometry // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–302.

*Статья поступила 1 апреля 2008 г.*

Водопьянов Сергей Константинович,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`vodopis@math.nsc.ru`

Кудрявцева Наталья Анатольевна
Новосибирский гос. университет, физический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`nkudr@itam.nsc.ru`