Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 519.48

БАЗИС ТОЖДЕСТВ АЛГЕБРЫ ПРОСТЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

С. Р. Сверчков

Аннотация. Доказано, что все тождества алгебры простых включений от счетного числа порождающих над полем нулевой характеристики следуют из правосимметричного тождества. Доказано, что базисы свободной специальной йордановой алгебры и специальной алгебры простых включений совпадают. Построена бесконечная серия соотношений в алгебре простых включений, выполняющаяся для слов длины k, $k \in \mathbb{N}$.

Ключевые слова: теория компьютерных вычислений ДНК, алгебра простых включений, специальная алгебра простых включений, правосимметричная алгебра.

1. Введение. Определим на свободной ассоциативной алгебре $\mathrm{Ass}[X]$ от порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ новую операцию умножения $*$ по следующему правилу:

$$x_{i_1} \dots x_{i_n} * a = \sum_{k=0}^{n} x_{i_1} \dots x_{i_k} a x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n},$$

где a — произвольный элемент из $\mathrm{Ass}[X]$, и если $b = \sum \alpha_s u_s$, где $\alpha_s \in F$, u_s — одночлены из $\mathrm{Ass}[X]$, то

$$b * a = \sum \alpha_s (u_s * a).$$

Введенная операция $*$ называется *операцией правых простых включений*. Операция простых включений впервые введена М. Бремнером [1] и является алгебраической формализацией операции нормальных включений в теории компьютерных вычислений ДНК (см. [2, 3]).

Новую алгебру $\langle \mathrm{Ass}[X], +, * \rangle$ назовем *алгеброй правых простых включений* от множества порождающих X и будем обозначать через $\mathrm{Ass}^*[X]$. Известно, что алгебра $\mathrm{Ass}^*[X]$ удовлетворяет правосимметричному тождеству

$$(x, y, z) = (x, z, y), \tag{1}$$

где $(x, y, z) = (x * y) * z - x * (y * z)$ — ассоциатор элементов $x, y, z \in \mathrm{Ass}^*[X]$. Впервые этот факт доказан Герстенхабером в [4].

Аналогично можно определить операцию *левых простых включений*

$$a * x_{i_1} \dots x_{i_n} = \sum_{k=0}^{n} x_{i_1} \dots x_{i_k} a x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n}$$

и построить алгебру *левых простых включений*. Соответственно эта алгебра будет удовлетворять левосимметричному тождеству $(x, y, z) = (y, x, t)$. Нетрудно заметить, что категории алгебр левых и правых простых включений, равно как и категории левосимметричных и правосимметричных алгебр, эквивалентны. Любая такая алгебра меняет свою левую (правую) симметрию на противоположную при новом умножении $(u, y) = y * x$. Соответственно эта новая операция «переписывает» любое левое (правое) соотношение в правый (левый) его аналог.

Далее под *алгеброй простых включений* понимается алгебра правых простых включений.

В [1] с помощью компьютерной программы доказано, что все тождества степени 4 алгебры $\mathrm{Ass}^*[X]$ следуют из (1). В случае тождеств степени 5 построено соотношение, которое выполняется для всех слов алгебры $\mathrm{Ass}^*[X]$ длины 2.

Обозначим через RS многообразие правосимметричных алгебр и через $RS[X]$ — свободную алгебру в многообразии RS от порождающих $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$.

Нам потребуется описание базиса свободной правосимметричной алгебры $RS[X]$, построенного Сегалом [5].

Обозначим через W множество всех неассоциативных слов от X, через $d(w)$ — длину $w \in W$. Пусть $w = uv \in W$. Тогда $l(w) = u$, $r(w) = v$ называют *левым* и *правым множителями слова* w. Если $w \in X$, то считаем, что $l(w) = 1$, $r(w) = w$. Определим порядок на W по правилу: $u < v$, если $d(u) < d(v)$ или если $d(u) = d(v)$, $r(u) < r(v)$, или если $d(u) = d(v)$, $r(u) = r(v)$ и $l(u) < l(v)$.

Определим *базис Сегала* на $RS[X]$ индукцией по $d(w)$. Если $d(w) \leq 2$, то w — базисное слово. Пусть $d(w) = n$, $n \geq 3$, и все базисные слова длины меньше n уже определены. Тогда w — базисное слово, если $w = x_i u$, $x_i \in X$, u — базисное слово или $w = (ab)c$, где a, b, c, ab — базисные слова и $b \leq c$.

Для записи неассоциативных слов будем использовать левонормированную расстановку скобок, т. е. $v_1 \dots v_n$ означает $(\dots(v_1 v_2)\dots v_{n-1})v_n$. Рассмотрим произвольное слово $w \in W$. Пусть $w = x_i a_1 \dots a_m$, где $x_i \in X$, $a_j \in W$. Тогда $b(w) = x_i$ назовем *началом* w, число $R(w) = m$ — *R-длиной* слова w. Полагаем $R(w) = 0$, если $w \in X$. Например, если $w = x_1((x_1, x_1)x_1)(x_1 x_1)$, то $d(w) = 6$, $R(w) = 2$.

Все алгебры в данной работе рассматриваются над полем F нулевой характеристики. Поэтому определяющие тождества многообразия алгебр над F можно считать полилинейными. Стандартные определения и обозначения взяты из [6].

2. Базис тождеств алгебры $\mathrm{Ass}^*[X]$. Пусть J — некоторая алгебра над F и $A \subseteq J$. Через $L_J(A)$ обозначим линейное подпространство J, порожденное множеством A в J, т. е.

$$L_J(A) = \Big\{\sum_i \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in F,\, a_i \in A\Big\}.$$

Пусть $k_1, \dots, k_m$ — некоторый набор ненулевых натуральных чисел. Обозначим $L = L(k_1, \dots, k_m \mid y) = L_{\mathrm{Ass}[y,X]}(y^{k_1} a_1 y^{k_2} a_2 \dots a_{m-1} y^{k_m} \mid a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathrm{Ass}[X])$.

Лемма 1. *Пусть* b_i, $i \in I$, *— произвольный базис* $\mathrm{Ass}[X]$. *Тогда множество* $B = \{y^{k_1} b_{i_1} y^{k_2} b_{i_2} \dots b_{i_{m-1}} y^{k_m}\}$, *где* $(i_1, \dots, i_{m-1})$ *пробегает все различные наборы из* I^{m-1}, *является базисом* L.

Доказательство. Пусть $A = \bigotimes\limits_{i=1}^{m-1} \mathrm{Ass}[X]$ — тензорное произведение линейных пространств над F. Рассмотрим отображение $\varphi : A \to L$, определенное по правилу

$$\varphi(a_1 \otimes \dots \otimes a_{m-1}) = y^{k_1} a_1 y^{k_2} a_2 \dots a_{m-1} y^{k_m}.$$

Нетрудно заметить, что φ — изоморфизм. Следовательно, множество B — базис L. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $C = \{f_i, i \in I\}$ — множество всех полилинейных одночленов от $x_1, \dots, x_n$ из базиса Сегала степени $\leq n$. Тогда для любого $s > n$ множество*

$$C|_{x_1=y_1^s,\dots,x_n=y_n^s} = \{f_i|_{x_1=y_1^s,\dots,x_n=y_n^s},\ f_i \in C\}$$

линейно независимо в алгебре $\mathrm{Ass}^*[Y]$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Для $n = 1, 2$ утверждение индукции очевидно. Пусть утверждение индукции верно для всех полилинейных одночленов от $x_1, \dots, x_{n-1}$ степени $\leq n-1$ из базиса Сегала. Предположим противное, т. е. что множество $C|_{x_1=y_1^s,\dots,x_n=y_n^s}$ линейно зависимо в $\mathrm{Ass}^*[Y]$ для некоторого $s > n$. Зафиксируем число s. Будем для краткости писать $\bar{f} = f|_{x_1=y_1^s,\dots,x_n=y_n^s}$. Предположим, что существует нетривиальная линейная комбинация элементов из C, $f = \sum\limits_{i\in J} \alpha_i f_i$, $\alpha_i \neq 0$ для всех $i \in J \subseteq I$, такая, что $\bar{f} = \sum\limits_{i\in J} \alpha_i \bar{f}_i = 0$. Пусть $R(f) = \max\limits_{i\in J} R(f_i) = m$. Очевидно, что $m < n < s$. Среди всех слагаемых $f = \sum\limits_{i\in J} \alpha_i f_i$, $\alpha_i \neq 0$, выберем все слагаемые, имеющие R-длину m и одинаковое начало. Не ограничивая общности, считаем, что все они начинаются с x_1. Тогда

$$f = \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in I_1} \alpha_{i_1\dots i_m} x_1 a_{i_1} \dots a_{i_m} + \sum_{i\in I_2} \beta_i g_i, \tag{2}$$

где для любого $(i_1, \dots, i_m) \in I_1$, $i \in I_2$, скаляры $\alpha_{i_1\dots i_m}$, β_i отличны от нуля; $x_1 a_{i_1} \dots a_{i_m}$ и g_i — линейно независимые элементы базиса Сегала, причем либо $b(g_1) = x_1$ и $R(g_1) < m$, либо $b(g_i) \neq x_1$.

Рассмотрим множество $D = \{a_{i_k}\}$ всех различных элементов a_{i_k}, входящих в запись $x_1 a_{i_1} \dots a_{i_m}$ первой суммы (2) для всех $(i_1, \dots, i_m) \in I_1$. По построению множество D состоит из линейно независимых полилинейных одночленов от $x_2, \dots, x_n$ из базиса Сегала степени $\leq n-1$. По предположению индукции множество $D|_{x_2=y_2^s,\dots,x_n=y_n^s}$ линейно независимо в алгебре $\mathrm{Ass}^*[X]$. В силу нашего предположения

$$\bar{f} = \sum_{(i_1,\dots i_m)\in I_1} \alpha_{i_1\dots i_m} y_1^s * \bar{a}_{i_1} * \dots * a_{i_m} + \sum_{i\in I_2} \beta_i \bar{g}_i = 0. \tag{3}$$

Согласно сделанным замечаниям элементы вида $y_1^{s-m} \bar{a}_{j_1} y_1 \bar{a}_{j_1} \dots \bar{a}_{j_m} y_1$, где $a_{j_s} \in D$, будут входить только в первую сумму (3). Поэтому

$$\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in I_1} \alpha_{i_1\dots i_m} \sum_{\sigma\in S_m} \left(y_1^{s-m} \bar{a}_{i_{\sigma(1)}} y_1 \bar{a}_{i_{\sigma(2)}} \dots \bar{a}_{i_{\sigma(m)}} y_1 \right) = 0.$$

Из леммы 1 вытекает, что $\alpha_{i_1\dots i_m} = 0$ для любого $(i_1, \dots, i_m) \in I$. Получено противоречие. Лемма доказана.

Теорема 1. *Все тождества алгебры* $\mathrm{Ass}^*[X]$ *следуют из* (1).

Доказательство. Пусть $f = f(x_1, \dots, x_n)$ — полилинейное однородное тождество в $\mathrm{Ass}^*[X]$. Разложим f по базису Сегала $f = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i f_i$. Выберем произвольное $s > n$. Тогда $\bar{f} = f|_{x_1=y_1^s,\dots,x_n=y_n^s} = 0$ в алгебре $\mathrm{Ass}^*[Y]$. Из леммы 2 получаем, что $\alpha_i = 0$ для всех $i \in I$. Теорема доказана

3. Специальные алгебры простых включений. Напомним, что свободная специальная йорданова алгебра $SJ[X]$ есть подалгебра алгебры $\mathrm{Ass}[X]^{(+)}$, порожденная множеством X, относительно операции $a \circ b = \frac{1}{2}(ab+ba)$, где $a, b \in \mathrm{Ass}[X]$.

По аналогии подалгебру алгебры $\mathrm{Ass}^*[X]$, порожденную множеством X, назовем *специальной алгеброй простых включений от порождающих* X и будем обозначать ее через $SI[X]$. В этом пункте покажем, что линейные пространства $SJ[X]$ и $SI[X]$ совпадают, т. е. $SJ[X] = SI[X]$, и докажем, что все тождества $SI[X]$ следуют из (1).

Лемма 3. *В алгебре* $\mathrm{Ass}^*[X]$ *выполнены следующие соотношения:*

$$(x_1 \dots x_n) * y = (x_1 \dots x_n) \circ y + \sum_{i=1}^{n} x_1 \dots (x_i \circ y) \dots x_n \tag{4}$$

для любого $y \in \mathrm{Ass}^*[X]$*;*

$$f(x_1 \dots x_n) * y = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \dots, x_i \circ y, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n) \circ y \tag{5}$$

для любого полилинейного многочлена $f(x_1, \dots, x_n) \in SJ[X]$ *и любого* $y \in \mathrm{Ass}^*[X]$.

Доказательство. (4) Индукция по n. Очевидно, что

$$x_1 * y = yx_1 + x_1y = x_1 \circ y + x_1 \circ y.$$

Далее, по определению операции $*$ и предположению индукции

$$\begin{aligned}(x_1 \dots x_n) * y &= (x_1 \dots x_{n-1}) * yx_n + x_1 \dots x_n y \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_1 \dots (x_i \circ y) \dots x_{n-1}x_n + (x_1 \dots x_{n-1}) \circ yx_n + x_1 \dots x_n y \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_1 \dots (x_i \circ y) \dots x_n + \frac{1}{2} yx_1 \dots x_n + \frac{1}{2} x_1 \dots x_{n-1} yx_n + x_1 \dots x_n y \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_1 \dots (x_i \circ y) \dots x_n + (x_1 \dots x_n) \circ y.\end{aligned}$$

Соотношение (5) непосредственно следует из (4). Лемма доказана.

Теорема 2. *Линейные пространства* $SJ[X]$ *и* $SI[X]$ *совпадают.*

Доказательство. Достаточно доказать, что подпространства полилинейных многочленов $SJ[X]$ и $SI[X]$ совпадают.

1. $SI[X] \subseteq SJ[X]$. Возьмем однородный полилинейный одночлен $f = f(x_1, \dots, x_n) \in SI[X]$ и докажем индукцией по n, что $f \in SJ[X]$. Для $n = 1, 2$ утверждение очевидно. Пусть $f = g * h$, где g и h — однородные полилинейные многочлены из $SI[X]$. По предположению индукции $g, h \in SJ[X]$. Если $g \in X$, то по определению $g * h = 2g \circ h \in SJ[X]$. Пусть $g = g(x_1, \dots, x_k)$, где $1 < k < n$. Тогда

$$g(x_1, \dots, x_k) * h \underset{(5)}{=} \sum_{i=1}^{k} g(x_1, \dots, x_i \circ h, \dots, x_k) + g(x_1, \dots, x_k) \circ h \in SJ[X].$$

2. $SJ[X] \subseteq SI[X]$. Рассуждаем, как в п. 1. Пусть $f \in SJ[X]$ и $f = g(x_1, \dots, x_k) \circ h$, где $g = g(x_1, \dots, x_k)$, $h \in SI[X]$. Тогда

$$f = g \circ h \underset{(5)}{=} g * h - \sum_{i=1}^{k} g(x_1, \dots, x_i \circ h, \dots, x_k).$$

По предположению индукции $x_i \circ h \in SI[X]$ для $i = 1, \dots, k$. Поэтому $f \in SI[X]$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Все тождества алгебры* $SI[X]$ *следуют из* (1).

Доказательство. С учетом того, что подстановки $x_1 = y_1^s, \dots, x_n = y_n^s$ являются элементами $SI[Y]$, доказательство теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 1. Теорема доказана.

4. Соотношения Дирихле в алгебре $\mathrm{Ass}^*[X]$. Как упоминалось во введении, в работе Бремнера [1] с помощью компьютера построено соотношение степени 5, которое выполняется для всех слов алгебры $\mathrm{Ass}^*[X]$ длины 2 и не является следствием (1):

$$\begin{aligned} &I(v,w,x,y,z)\\ &= -(((vw)x)y)z + ((vy)z)(wx) + ((vx)z)(vy) + ((vw)z)(xy) + ((vx)y)(wz)\\ &\quad + ((vw)y)(xz) + ((vw)x)(yz) - (v(xy))(wz) - (v(wy))(xz)\\ &\quad - (v(wx))(yz) + (vz)((wx)y) + (vy)((wx)z) + (vx)((wy)z) + (vw)((xy)z)\\ &\quad - (vz)(y(wx)) - (vy)(z(wx)) - (vz)(x(wy)) - (vx)(z(wy))\\ &\quad - (vz)(w(xy)) - (vw)(z(xy)) - (vy)(x(wz)) - (vx)(y(wz)) - (vy)(w(xz))\\ &\quad - (vw)(y(xz)) - (vx)(w(yz)) - (vw)(x(yz)) + v(((wx)y)z)\\ &\quad - v((yz)(wx)) - v((xz)(wy)) - v((wz)(xy)) - v(z((wx)y)) - v(y((wx)z))\\ &\quad - v(x((wy)z)) - v(w((xy)z)) - v(y(z(wx))) + v(z(x(wy))) + v(x(z(wy))) + v(z(y(wx)))\\ &\quad + v(z(w(xy))) + v(w(z(xy))) + v(y(x(wz))) + v(x(y(wz))) + v(y(w(xz)))\\ &\quad + v(w(y(xz))) + v(x(w(yz))) + v(w(x(yz))) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В силу теоремы 1 соотношение (6) не является тождеством в алгебре $\mathrm{Ass}^*[X]$. В частности, по лемме 2 $I(v,w,x,y,z) \neq 0$ для слов длины 6. Соотношение (6) имеет довольно сложную структуру, содержит 46 слагаемых и с трудом просматриваемую симметрию. В [1] естественно задается вопрос: существуют ли еще соотношения типа (6) в алгебре $\mathrm{Ass}^*[X]$?

В этом пункте мы построим бесконечную серию соотношений, выполняющихся для всех слов алгебры $\mathrm{Ass}^*[X]$ длины k, $k \in \mathbb{N}$, которые не являются следствием правосимметрического тождества.

Алгоритм построения этих соотношений связан с простым принципом Дирихле: нельзя разместить $n+1$ зайцев в n клетках так, чтобы в каждой клетке было по одному зайцу.

Формализуем алгоритм размещения Дирихле. Пусть $a = x_1 \dots x_n$ — одночлен из $\mathrm{Ass}[X]$ и $r_1, \dots, r_k$, $k \le n+1$, — размещаемые переменные. Нам необходимо разместить $r_1, \dots, r_k$ в $n+1$ ячейках $\sqcup x_1 \sqcup x_2 \sqcup \dots \sqcup x_n \sqcup$ так, чтобы в каждой ячейке «$\sqcup$» было не больше одной переменной. Определим оператор размещения $T(r_1, \dots, r_k)$: $\mathrm{Ass}[X] \to \mathrm{Ass}[X \cup \{r_1, \dots, r_k\}]$, где $k \le n+1$, по следующему правилу:

$$aT(r_1,\dots,r_k)=\sum_{\sigma\in S_k}\sum_{\substack{u_0,\dots,u_k\\ u_0u_1\dots u_k=a\\ \deg u_i\geq 1 \text{ при } i=1,\dots,k-1}} u_0r_{\sigma(1)}u_2r_{\sigma(2)}\dots u_{k-1}r_{\sigma(k)}u_k. \tag{7}$$

Например,

$$x_1T(a)=ax_1+x_1a,\quad x_1x_2T(a,a)=2(ax_1ax_2+ax_1x_2a+x_1ax_2a),$$

$$x_1x_2x_3T(a,a,a,a)=4!ax_1ax_2ax_3a.$$

Обозначим через R_a, $a\in \mathrm{Ass}^*[X]$, оператор правого умножения в алгебре $\mathrm{Ass}^*[X]$, т. е.

$$\forall b\in \mathrm{Ass}^*[X]\quad bR_a=b*a.$$

Алгебру правых умножений $\mathrm{Ass}^*[X]$ обозначим через $R(\mathrm{Ass}^*[X])$.

Определим $D(x_1,\dots,x_m)\in R(\mathrm{Ass}^*[X])$ рекуррентно от m:

$$\begin{aligned}D(x_1)&=R_{x_1},\\ D(x_1,\dots,x_m)&=D(x_1,\dots,x_{m-1})R_{x_m}-\sum_{i=1}^{m-1}D(x_1,\dots,x_i*x_m,\dots,x_{m-1}).\end{aligned}\tag{8}$$

Лемма 4. *В алгебре* $\mathrm{Ass}^*[X]$ *выполнено соотношение*

$$aD(y_1,\dots,y_k)=aT(y_1,\dots,y_k),\tag{9}$$

где $1\leq k\leq n+1$; $a,y_1,\dots,y_k\in \mathrm{Ass}^*[X]$ *и* $\deg(a)=n$.

Доказательство. Достаточно проверить равенство (9) в случае, когда $a=x_1\dots x_n$ — одночлен из $\mathrm{Ass}^*[X]$. Проведем индукцию по k. При $k=1$ из (7), (8) имеем $aT(y_1)=a*y_1=aD(y_1)$. Пусть утверждение верно для $k-1$, где $1<k-1<n+1$. Тогда

$$\begin{aligned}aD(y_1,\dots,y_{k-1})R_{y_k}&=aT(y_1,\dots,y_{k-1})*y_k\\ &\underset{(7)}{=}\Bigg(\sum_{\sigma\in S_{k-1}}\sum_{\substack{u_0,\dots u_{k-1}\\ u_0u_1\dots u_{k-1}=a\\ \deg u_i\geq 1 \text{ при } i=1,\dots,k-2}} u_0y_{\sigma(1)}u_2u_{\sigma(2)}\dots u_{k-2}y_{\sigma(k-1)}u_{k-1}\Bigg)\\ &*y_k=\sum_{\sigma\in S_k}\sum_{\substack{u_0,\dots u_k\\ u_0u_1\dots u_k=a\\ \deg u_i\geq 1 \text{ при } i=1,\dots,k-1}} u_0y_{\sigma(1)}u_2u_{\sigma(2)}\dots u_{k-1}y_{\sigma(k)}u_k\end{aligned}$$

$$-\sum_{i=1}^{k-1}aT(y_1,\dots,y_i*y_k,\dots,y_{k-1})\underset{(7)}{=}aT(y_1,\dots,y_k)-\sum_{i=1}^{k-1}aD(y_1,\dots,y_i*y_k,\dots,y_{k-1}).$$

Отсюда $aD(y_1,\dots,y_k)=aT(y_1,\dots,y_k)$. Лемма доказана.

Теорема 4. *В алгебре* $\mathrm{Ass}^*[X]$ *выполнены соотношения:*

$$aD(y_1,\dots,y_{n+1})*y_{n+2}=\sum_{i=1}^{n+1}aD(y_1,\dots,y_i*y_{n+2},\dots,y_{n+1})\tag{10}$$

для всех $a, y_1, \dots, y_{n+2} \in \mathrm{Ass}^*[X]$ *и* $\deg(a) = n$.

Доказательство. Достаточно проверить равенство (10) в случае, когда $a = x_1 \dots x_n$ — одночлен из $\mathrm{Ass}^*[X]$. Имеем

$$\begin{aligned} aD(y_1, \dots, y_{n+1})R_{y_{n+2}} &\underset{(9)}{=} aT(y_1, \dots, y_{n+1}) * y_{n+2} \\ &\underset{(7)}{=} \Big(\sum_{\sigma \in S_{n+1}} y_{\sigma(1)} x_1 y_{\sigma(2)} x_2 \dots x_n y_{\sigma_{(n+1)}} \Big) * y_{n+2} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} (y_{\sigma(1)} x_1 \dots (y_{\sigma(i)} * y_{n+2}) x_i \dots x_n y_{\sigma(n+1)}) \\ &\underset{(7)}{=} \sum_{i=1}^{n+1} aT(y_1, \dots, y_i * y_{n+2}, \dots, y_{n+1}) \underset{(9)}{=} \sum_{i=1}^{n+1} aD(y_1, \dots, y_i * y_{n+2}, \dots, y_{n+1}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность профессору И. Хенцелю, познакомившему автора с проблемами теории генетических алгебр, и профессору М. Бремнеру за постановку интересных вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bremner M.* DNA computing, insertion of words and left-symmetric algebras // Proc. of the Maple conf., 17–20 Jule, 2005: ed. by Ilias S. Kotsireas. Waterloo: Maple Inc., 2005.
2. *Daley M., Kari L., McQuillan I.* Families of languages defined by ciliate bio-operations // Theoret. Comput. Sci. 2004. V. 320, N 1. P. 51–69.
3. *Daley M., Kari L.* DNA computing: Models and implementations // Comm. Theoret. Biology. 2002. V. 7. P. 177–198.
4. *Gerstenhaber M.* The cohomology structure of an associative ring // Ann. Math. 1963. V. 78. P. 267–288.
5. *Segal D.* Free left-symmetric algebras and an analogue of the Poincare–Birkhoff–Witt theorem // J. Algebra. 1994. V. 164. P. 750–772.
6. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 16 сентября 2008 г.

Сверчков Сергей Робертович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
sverchkovSR@yandex.ru