Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 512

О СУПЕРАЛГЕБРАХ НАД ОПЕРАДАМИ

С. Н. Тронин

Аннотация. Показано, что класс многообразий мультиоператорных супералгебр, определяемых полилинейными тождествами и рассматриваемых с точностью до рациональной эквивалентности, совпадает с классом многообразий суперагебр над операдами. Определены в самом общем случае понятия грассмановой и клиффордовой оболочек и исследованы их свойства. Определены понятия модуля над супералгеброй над операдой и универсальной обертывающей супералгебры для алгебры над операдой и исследованы их свойства.

Ключевые слова: супералгебра, операда, тождество.

Введение

Мы продолжаем начатое в [1] построение общей теории мультиоператорных супералгебр, использующее язык теории операд. Определения и результаты [1] предполагаются известными. Опишем вкратце содержание работы.

В § 1 доказывается, что многообразие супералгебр определяется полилинейными тождествами тогда и только тогда, когда оно рационально эквивалентно [2, 3] многообразию супералгебр $\mathrm{SAlg}(R)$ для некоторой линейной симметрической операды R. Этот результат аналогичен основному результату работы [4].

В § 2 вводится понятие грассмановой оболочки для супералгебр над произвольной линейной операдой и показывается, что «традиционный» [5] способ определения принадлежности супералгебры тому или иному многообразию в случае «традиционных» супералгебр с одной бинарной операцией умножения равносилен тому способу определения многообразий супералгебр, который был введен в [1]. В общем случае использование грассмановой оболочки позволяет установить связь между многообразием супералгебр над операдой R и многообразием алгебр над этой же операдой.

В § 3 аналогичным образом исследуются представления супералгебр, а точнее те объекты, которые служат заменой представлений в случае произвольных супералгебр над произвольными операдами. Известно соответствующее понятие для алгебр над операдами: модули над алгебрами над операдами. Определяются модули над супералгебрами над операдами и устанавливаются некоторые их свойства. В частности, показано, что в случае супералгебр Ли, рассматриваемых как супералгебры над соответствующей операдой $\mathscr{L}ie$, хорошо известное понятие представления супералгебры Ли равносильно понятию модуля над супералгеброй над операдой $\mathscr{L}ie$.

В данной работе используются сведения об операдах, которые можно найти в работах автора [1, 4, 6] (см. также библиографию к ним). Предварительные результаты о супералгебрах над операдами опубликованы в [7–10].

§ 1. Многообразия супералгебр, определяемые полилинейными тождествами

Результаты данного параграфа являются аналогами основных результатов работы [4].

Теорема 1.1. *Пусть X, Y — счетные множества, $\mathrm{Fr}(X,Y) = \mathrm{Fr}_{\Omega\Sigma}(X,Y)$ — свободная $\Omega\Sigma$-супералгебра с базисом (X,Y), $FO = FO_\Omega$ — свободная операда с базисом Ω. Имеет место изоморфизм между решеткой идеалов операды FO и решеткой вполне инвариантных идеалов $\mathrm{Fr}(X,Y)$, порожденных полилинейными элементами. Взаимно однозначное соответствие (в одну сторону) строится следующим образом. Если I — идеал FO, то соответствующий вполне инвариантный идеал $I(X,Y)$ алгебры $\mathrm{Fr}(X,Y)$ — это образ отображения*

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} I(n) \otimes_{K\Sigma_n} T^n(X,Y) \to \bigoplus_{n=0}^{\infty} FO(n) \otimes_{K\Sigma_n} T^n(X,Y).$$

Это отображение индуцировано вложениями $I(n) \subseteq FO(n)$. Положим $R = FO/I$. Естественная проекция на фактор-операду $FO \to R$ индуцирует вложение $\mathrm{SAlg}(R)$ в качестве подмногообразия в $\mathrm{SAlg}(FO)$. Отождествляя рационально эквивалентные многообразия и, в частности, отождествляя $\mathrm{SAlg}(FO)$ с $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$, будем иметь изоморфизм

$$\mathrm{Fr}_R(X,Y) \cong \mathrm{Fr}_{\Omega\Sigma}(X,Y)/I(X,Y).$$

Доказательство. Соответствие $I \mapsto I(X,Y)$ уже исследовалось в [1, теорема 2.6]. Построим обратное соответствие. Пусть дан вполне инвариантный идеал $J \subseteq \mathrm{Fr}(X,Y)$, где X и Y счетны. Далее будут использоваться сведения о строении $\mathrm{Fr}(X,Y)$, установленные в [1, § 2], и, в частности, то, что можно заменить $\mathrm{Fr}(X,Y)$ свободной супералгеброй $\mathrm{Fr}_{FO}(X,Y)$. Для каждого натурального числа n положим $\widehat{J}(n)$ равным множеству тех $\xi \in FO_\Omega(n)$, для которых существует полилинейный элемент вида $\xi\bar{z} \in J$, $\bar{z}$ — слово в алфавите $X \cup Y$, $\bar{z} = z_{i_1} \dots z_{i_n}$, причем все $z_{i_1}, \dots, z_{i_n}$ различны. Согласно определению вполне инвариантного идеала, если $\xi\bar{z} \in J$, то $\xi\bar{u} \in J$ для любого $\bar{u} = u_{j_1} \dots u_{j_n}$, где $u_{j_1}, \dots, u_{j_n} \in X \cup Y$. Отсюда легко следует, что $\widehat{J}(n)$ является $K\Sigma_n$-подмодулем в $FO(n)$. Покажем, что $\widehat{J} = \{\widehat{J}(n) \mid n = 0, 1, \dots\}$ есть идеал операды FO. Пусть $\xi_0 \in FO(m)$, $\xi_1 \in FO(n_1)$, $\dots$, $\xi_m \in FO(n_m)$. Необходимо убедиться, что если хотя бы один из элементов ξ_i $(i = 0, 1, \dots, m)$ принадлежит $\widehat{J}$, то операдная композиция $\xi_0\xi_1 \dots \xi_m$ принадлежит $\widehat{J}(n_1 + \dots + n_m)$. Пусть, например, $\xi_1 \in \widehat{J}(n_1)$. Выберем строки $\bar{z}_i = z_{i,1} \dots z_{i,n_i}$, $z_{i,j} \in X \cup Y$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_i$, таким образом, чтобы среди элементов $z_{i,j}$ не было одинаковых. Теперь, пользуясь введенными в [1, § 2] соглашениями о записи элементов $\mathrm{Fr}(X,Y)$, можно определить элементы этой супералгебры $\xi_1\bar{z}_1$, $\xi_2\bar{z}_2$, $\dots$, $\xi_m\bar{z}_m$, причем $\xi_1\bar{z}_1 \in J$. Тогда так как J — идеал, элемент $\xi_0(\xi_1\bar{z}_1) \dots (\xi_1\bar{z}_1)$ также должен содержаться в J. Но $\xi_0(\xi_1\bar{z}_1) \dots (\xi_1\bar{z}_1) = (\xi_0\xi_1 \dots \xi_m)\bar{z}_1 \dots \bar{z}_1$, т. е. это полилинейный элемент J. Отсюда получаем $\xi_0\xi_1 \dots \xi_m \in \widehat{J}(n_1 + \dots + n_m)$. Пусть $\xi_0 \in \widehat{J}(m)$. Выбираем элементы $\bar{z}_i$ при $1 \le i \le m$ такими же, как выше, и $\bar{z}_0 = z_{0,1} \dots z_{0,m}$ так, чтобы все $z_{0,k} \in X \cup Y$ были различны и чтобы для каждого k степень $\tilde{z}_{0,k}$ элемента $z_{0,k}$ была равна степени элемента $\xi_k\bar{z}_k$, т. е. $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \tilde{z}_{k,j} \pmod 2$. Теперь можно определить эндоморфизм h супералгебры $\mathrm{Fr}(X,Y)$ такой, что $h(z_{0,k}) = \xi_k\bar{z}_k$ для всех

k. По определению J как вполне инвариантного идеала будем иметь $h(J) \subseteq J$, т. е. $h(\xi_0 \bar{z}_0) \in J$. Но

$$h(\xi_0 \bar{z}_0) = \xi_0 h(z_{0,1}) \dots h(z_{0,m}) = \xi_0(\xi_1 \bar{z}_1) \dots (\xi_m \bar{z}_m) = (\xi_0 \xi_1 \dots \xi_m) \bar{z}_1 \dots \bar{z}_m,$$

откуда, как и выше, следует, что $\xi_0 \xi_1 \dots \xi_m \in \widehat{J}(n_1 + \dots + n_m)$.

Покажем, наконец, что построенные соответствия задают изоморфизм решеток идеалов требуемых типов. Пусть I — идеал операды FO, и пусть $J = I(X, Y)$. По самому определению элементы J суть линейные комбинации слов вида $\xi z_1 \dots z_n$, где $\xi \in I(n)$ для некоторого n, $z_1, \dots, z_n \in X \cup Y$, и эти элементы не обязательно различны. Применяя к такому идеалу J описанную выше процедуру построения $\widehat{J}$, видим, что для каждого n множество $\widehat{J}(n)$ состоит только из элементов $I(n)$. Обратное включение очевидно, так что $\widehat{J} = I$.

С другой стороны, пусть дан вполне инвариантный идеал J супералгебры $\mathrm{Fr}(X, Y)$, порожденный (именно как идеал вполне инвариантный) полилинейными элементами. Это означает, что если Θ — множество всех полилинейных элементов J, то весь J можно описать следующим образом. Положим Θ' состоящим из всех элементов вида $\xi w'_1 \dots w'_k$, где $\xi \in FO(k)$, $\xi z_1 \dots z_k \in \Theta$, и $w'_1, \dots, w'_k$ — произвольные однородные элементы такие, что $\widetilde{w}'_i = \tilde{z}'_i$ для всех i. Очевидно, что $\Theta \subset \Theta' \subset J$, и если $w'_i = \xi'_i \bar{z}'_i$, то $\xi w'_1 \dots w'_k = (\xi \xi'_1 \dots \xi'_k) \bar{z}'_1 \dots \bar{z}'_k$, причем $(\xi \xi'_1 \dots \xi'_k) \in \widehat{J}$. Далее, пусть Θ'' состоит из всех элементов вида $\xi_0 w_1 \dots w_m$, где $\xi_0 \in FO(m)$, $w_1, \dots, w_m$ — однородные элементы и по крайней мере один из них принадлежит Θ'. Идеал J есть K-модуль, порожденный множеством Θ''. Заменяя произвольные однородные элементы линейными комбинациями элементов вида $\xi_i \bar{z}_i$, легко убедиться, что J есть K-модуль, порожденный всевозможными элементами вида $(\xi_0 \xi_1 \dots \xi_m) \bar{z}_1 \dots \bar{z}_m$, где по крайней мере один из ξ_i принадлежит $\widehat{J}$. Полагая $I = \widehat{J}$, заключаем из всего вышеизложенного, что $J = I(X, Y)$.

Ясно, что построенные соответствия сохраняют включения и произвольные пересечения. Таким образом, имеет место изоморфизм решеток.

Последнее утверждение теоремы 1.1 следует из [1, теорема 2.6]. $\square$

Теорема 1.2. *Многообразия супералгебр над операдами определяются полилинейными тождествами. Любое многообразие K-линейных мультиоператорных супералгебр, определяемое полилинейными тождествами, рационально эквивалентно многообразию вида* $\mathrm{SAlg}(R)$ *для некоторой K-линейной операды R.*

Доказательство. Первое утверждение уже было фактически доказано в [1, теорема 2.6]. Пусть дано многообразие K-линейных Ω-алгебр M, определяемое полилинейными тождествами. Согласно [1, следствие 2.2] его можно считать подмногообразием $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$. В свою очередь, $\mathrm{SAlg}(\Omega\Sigma)$ можно заменить рационально эквивалентным ему многообразием $\mathrm{SAlg}(FO_\Omega)$. Многообразие M определяется вполне инвариантным идеалом свободной супералгебры $\mathrm{Fr}_\Omega(X, Y)$ (где X и Y счетны), порожденным полилинейными элементами. После замены $\mathrm{Fr}_\Omega(X, Y)$ на $\mathrm{Fr}_{FO_\Omega}(X, Y)$ можно применить теорему 1.1, из которой следует, что рассматриваемый идеал имеет вид $I(X, Y)$, где I — некоторый идеал операды FO_Ω. Рассмотрим операду $R = FO_\Omega / I$. Из [1, теорема 2.6] теперь следует, что $\mathrm{SAlg}(R)$ определяется теми же тождествами, что и M, т. е. как подмногообразия $\mathrm{SAlg}(\Omega)$ многообразия M и $\mathrm{SAlg}(R)$ совпадают, что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, класс многообразий мультиоператорных супералгебр, определяемых полилинейными тождествами, с точностью до рациональной эквивалентности совпадает с классом многообразий супералгебр над линейными операдами.

§ 2. Функтор оболочки

Пусть K, как и прежде, коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Определим операду с тем же именем K следующим образом. Положим $K(n) = K$ для всех $n \geq 1$, компонента $K(0)$ может отсутствовать, а в случае ее наличия предполагается, что $K(0)$ — одноэлементное множество. По определению Σ_n действует на $K(n)$ тривиальным образом: $a\sigma = a$ для всех $a \in K(n)$, $\sigma \in \Sigma_n$. Определим композицию

$$K(m) \times K(n_1) \times \cdots \times K(n_m) \longrightarrow K(n_1 + \cdots + n_m), (a, a_1, \ldots, a_m) \mapsto aa_1 \ldots a_m.$$

Здесь $aa_1 \ldots a_m$ означает произведение элементов $a, a_1, \ldots, a_m \in K$ в том экземпляре кольца K, который равен компоненте операды $K(n_1 + \cdots + n_m)$. Если какой-то n_i равен 0, то соответствующий элемент a_i в этом произведении надо положить равным единице кольца. Легко проверяется, что K с определенной таким образом композицией становится операдой. В частности, ассоциативность операдной композиции обеспечивается не только ассоциативностью кольца K, но и его коммутативностью (поэтому соответствующая конструкция для некоммутативных колец не является операдой). Можно показать, что алгебры над операдой K — это коммутативные ассоциативные K-алгебры (без единицы, если $K(0)$ отсутствует, и с единицей, если $K(0)$ входит в операду). Бинарная операция умножения соответствует единице того экземпляра K, который рассматривается в качестве компоненты $K(2)$.

Лемма 2.1. *Категория* $\mathrm{SAlg}(K)$ *рационально эквивалентна многообразию всех ассоциативных суперкоммутативных супералгебр с единицей над* K. *Если исключить из определения* K *компоненту* $K(0)$, *то категория* $\mathrm{SAlg}(K)$ *рационально эквивалентна многообразию ассоциативных суперкоммутативных супералгебр без единицы.*

Доказательство. Рассмотрим супералгебру $A \in \mathrm{SAlg}(K)$ и элемент $\omega \in K(2)$, равный единице того экземпляра K, который совпадает с $K(2)$. Отображение композиции $K(2) \otimes A^{\otimes 2} \to A$ индуцирует билинейное однородное отображение $A^{\otimes 2} \to A$, переводящее элементы $a_1 \otimes a_2$ в $\omega a_1 a_2$. Обозначим элемент $\omega a_1 a_2$ через $a_1 \cdot a_2 = a_1 a_2$ и проверим для этой операции свойства ассоциативной коммутативной супералгебры. Ассоциативность следует из равенства $\omega\omega\varepsilon = \omega\varepsilon\omega$, левая и правая части которого фактически являются произведениями трех единиц в кольце K. Проверим суперкоммутативность. Для этого рассмотрим транспозицию $\sigma = (1, 2) \in \Sigma_2$. Тогда $\omega\sigma = \omega$ по определению операды K, а по определению K-супералгебры

$$a_1 \cdot a_2 = \omega a_1 a_2 = (\omega\sigma) a_1 a_2 = \mathrm{sgn}(\sigma, a_1 a_2)\omega a_2 a_1 = (-1)^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2} a_2 \cdot a_1.$$

Таким образом, существует функтор из категории $\mathrm{SAlg}(K)$ в категорию коммутативных ассоциативных супералгебр, сопоставляющий K-супералгебре A построенную только что коммутативную ассоциативную супералгебру, совпадающую с A как модуль над K.

Обратно, пусть B — коммутативная ассоциативная супералгебра. Определим для каждого $n \geq 0$ отображение $K(n) \otimes B^{\otimes n} \to B$ такое, что для однородных $b_1, \dots, b_n \in B$ и $\lambda \in K(n) = K$ элементу $\lambda \otimes b_1 \otimes \dots \otimes b_n$ сопоставляется $\lambda b_1 \dots b_n$, т. е. произведение в B. Проверка свойств K-супералгебры, не связанных со знаком, не представляет трудностей. Пусть $\sigma \in \Sigma_n$. Очевидно, что тождество $(\lambda\sigma) b_1 \dots b_n = \operatorname{sgn}(\sigma, b_1 \dots b_n) \lambda b_{\sigma^{-1}(1)} \dots b_{\sigma^{-1}(n)}$, где $b_1, \dots, b_n$ однородны и $\lambda \in K(n)$, достаточно проверить для $\sigma = (i, i+1)$. Но в этом случае оно следует из определений коммутативной супералгебры и функции sgn [1, теорема 1.1]. Таким образом определяется функтор, обратный к построенному выше. Из построения легко следует, что эти функторы реализуют требуемую эквивалентность [3]. $\square$

Теорема 2.1. *Пусть O и R — произвольные K-линейные операды. Существует функтор*

$$\operatorname{SAlg}(O) \times \operatorname{SAlg}(R) \longrightarrow \operatorname{Alg}(O \otimes R),$$

действующий следующим образом: паре алгебр (G, A) сопоставляется алгебра $GA = (G_0 \otimes A_0) \oplus (G_1 \otimes A_1)$. Соответственно определяется действие на гомоморфизмах.

Доказательство. Определим на K-модуле $GA = (G_0 \otimes A_0) \oplus (G_1 \otimes A_1)$ структуру $O \otimes R$-алгебры следующим образом. Пусть $g_1 \in G_{i_1}, \dots, g_n \in G_{i_n}$, $a_1 \in A_{i_1}, \dots, a_n \in A_{i_n}$, $\omega \in O(n)$, $\rho \in R(n)$. Тогда

$$(\omega \otimes \rho)(g_1 \otimes a_1) \dots (g_n \otimes a_n) = (\omega g_1 \dots g_n) \otimes (\rho a_1 \dots a_n).$$

Несложная проверка показывает, что таким образом действительно определяется структура алгебры над операдой $O \otimes R$. В частности, если $\sigma \in \Sigma_n$, то, так как $\tilde{g}_1 = \tilde{a}_1, \dots, \tilde{g}_n = \tilde{a}_n$, имеем $\operatorname{sgn}(\sigma, g_1 \dots g_n) = \operatorname{sgn}(\sigma, a_1 \dots a_n)$ и

$$\begin{aligned}
((\omega \otimes \rho)\sigma)((g_1 \otimes a_1) \dots (g_n \otimes a_n)) &= ((\omega\sigma) g_1 \dots g_n) \otimes ((\rho\sigma) a_1 \dots a_n) \\
&= (\operatorname{sgn}(\sigma, \bar{g})(\omega g_{\sigma^{-1}(1)} \dots g_{\sigma^{-1}(n)})) \otimes (\operatorname{sgn}(\sigma, \bar{a})(\rho a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(n)})) \\
&= (\omega g_{\sigma^{-1}(1)} \dots g_{\sigma^{-1}(n)}) \otimes (\rho a_{\sigma^{-1}(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= (\omega \otimes \rho)(g_{\sigma^{-1}(1)} \otimes a_{\sigma^{-1}(1)}) \dots (g_{\sigma^{-1}(n)} \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}).
\end{aligned}$$

Проверка свойств функтора по аргументам G и A также не вызывает затруднений. $\square$

В частности, если $O = K$ (операда, описанная выше перед леммой 2.1), то, поскольку $K \otimes R \cong R$, для любой коммутативной ассоциативной супералгебры G существует функтор, который будет называться в дальнейшем *функтором G-оболочки* для R-супералгебры A:

$$G : \operatorname{SAlg}(R) \longrightarrow \operatorname{Alg}(R), \quad G(A) = GA = (G_0 \otimes A_0) \oplus (G_1 \otimes A_1).$$

Теорема 2.2. *Пусть операда R представлена как фактор-операда свободной операды $FO = FO_\Omega$. Этому представлению соответствуют функторы вложения $\operatorname{Alg}(R)$ в $\operatorname{Alg}(FO)$ и $\operatorname{SAlg}(R)$ в $\operatorname{SAlg}(FO)$. Для любой коммутативной ассоциативной супералгебры G имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{SAlg}(FO) & \xrightarrow{G} & \operatorname{Alg}(FO) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\operatorname{SAlg}(R) & \xrightarrow{G} & \operatorname{Alg}(R)\ .
\end{array}$$

Здесь вертикальные стрелки — уже упоминавшиеся функторы вложения. При этом для того чтобы полный прообраз класса объектов $\mathrm{Alg}(R)$ *относительно верхнего функтора* G *совпадал с классом объектов подкатегории* $\mathrm{SAlg}(R)$, *достаточно, чтобы супералгебра* G *удовлетворяла следующим свойствам:*

1) $G = G_0 \oplus G_1$ *является плоским* K*-модулем;*

2) *для всех* $m \geq 1$ *и любого набора* $n_1, \ldots, n_m$, *где* $n_i \in \{0, 1\}$, *найдутся* $g_1 \in G_{n_1}, \ldots, g_m \in G_{n_m}$ *такие, что* $g_1 \ldots g_m \neq 0$.

Доказательство. Допустим, что $R = FO/I$, $I = \{I(n) \mid n \geq 0\}$ — идеал в свободной операде FO. Пусть $A \in \mathrm{SAlg}(FO)$. Структура FO-алгебры на GA определяется следующим образом:

$$w(g_1 \otimes a_1) \ldots (g_m \otimes a_m) = (g_1 \ldots g_m) \otimes (wa_1 \ldots a_m). \tag{1}$$

Здесь $w \in FO(m)$, $g_i \in G_{n_i}$, $a_i \in A_{n_i}$, $\tilde{g}_i = \tilde{a}_i$, $1 \leq i \leq m$. При этом $GA \in \mathrm{Alg}(R)$ тогда и только тогда, когда обе части (1) обращаются в нуль при $w \in I(n)$. Выбирая $g_1, \ldots, g_m$ такими, что $g_1 \ldots g_m \neq 0$, из свойства плоскости G отсюда получим, что $wa_1 \ldots a_m = 0$ при любых однородных $a_1, \ldots, a_m$, как только $w \in I(m)$. Но этим свойством характеризуются супералгебры из $\mathrm{SAlg}(R) \subseteq \mathrm{SAlg}(FO)$. $\square$

Свойствам 1 и 2 удовлетворяют счетно-порожденные алгебры Грассмана и Клиффорда. Под алгеброй Клиффорда понимается тот же объект, что и, например, в [11]: базисом над K является счетное множество элементов $1, e_1, e_2, \ldots$ таких, что $e_i e_j = -e_j e_i$ при $i \neq j$ и $e_i^2 = 1$.

Следствие 2.1. *Определение многообразий супералгебр, данное в* [5] (*использующее грассманову оболочку*), *эквивалентно* (*для рассматриваемых в* [5] *случаев*) *определению, данному в* [1, § 2]. *В частности, любое многообразие супералгебр, определяемое полилинейными тождествами, имеет вид* $\mathrm{SAlg}(R)$.

§ 3. Представления

Результат, аналогичный теореме 2.2, имеет место и для представлений. Поясним, что понимается здесь под термином «представление». В работах [12–14] определяется понятие модуля над алгеброй над операдой, которое эквивалентно понятию представления в тех известных случаях, когда представления алгебр определены, и поэтому может считаться эквивалентом понятия представления для произвольных алгебр над произвольными операдами. Определим и исследуем аналогичное понятие для супералгебр, призванное служить заменой понятия представления для произвольных супералгебр над произвольными операдами, но равносильное ему в тех случаях, когда традиционные представления также определены.

Определение 3.1. Пусть R — линейная операда над кольцом K и $A \in \mathrm{SAlg}(R)$. *Модулем* над супералгеброй A будем называть $\mathbb{Z}_2$-градуированный K-модуль M вместе с семейством однородных K-линейных отображений композиции, заданных для всех $n = 1, 2, \ldots$:

$$R(n) \otimes A^{\otimes(n-1)} \otimes M \longrightarrow M, \quad \omega \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \otimes x \mapsto \omega a_1 \ldots a_{n-1} x.$$

Здесь $R(n)$ также рассматривается как $\mathbb{Z}_2$-градуированный K-модуль, причем его нулевая компонента совпадает с $R(n)$, а первая компонента тривиальна. Операции композиции помимо линейности по всем аргументам должны обладать следующими свойствами.

1. В случае $n = 1$ отображение $R(1) \otimes M_i \to M_i$ $(i = 0, 1)$ задает на M_i структуру унитарного левого $R(1)$-модуля. В частности, $\varepsilon x = x$ для всех $x \in M_i$.

2. Пусть x — однородный элемент из M, последовательности (строки) $\bar{a}_i \in A^{n_i}$ при $2 \leq i \leq m-1$, $\bar{a}_m \in A^{n_m - 1}$, состоят из однородных элементов, $\omega_i \in R_{n_i}$ при $1 \leq i \leq m$, $\omega \in R(m)$. Тогда

$$(\omega\omega_1 \ldots \omega_m)\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_m x = \omega(\omega_1\bar{a}_1) \ldots (\omega_{m-1}\bar{a}_{m-1})(\omega_m\bar{a}_m x).$$

3. Если $\sigma \in \Sigma_n$, $\sigma(n) = n$, то для однородных $x \in M$, $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$ имеет место равенство

$$(\omega\sigma)a_1 \ldots a_{n-1}x = \operatorname{sgn}(\sigma, \bar{a})\omega a_{\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{\sigma^{-1}(n-1)}x.$$

Здесь $\bar{a} = a_1 a_2 \ldots a_n$, причем $a_n \in A$ — любой элемент такой, что $\tilde{a}_n = \tilde{x}$.

Гомоморфизм модулей над супералгеброй $A \in \mathrm{SAlg}(R)$ — это K-линейное однородное отображение $h : M' \to M''$ такое, что $h(\omega\bar{a}x) = \omega\bar{a}h(x)$. Обозначим через $\mathrm{SMod}_R(A)$ категорию модулей над A и их гомоморфизмов.

Теорема 3.1. *Пусть O и R — произвольные K-линейные операды. Для каждой пары супералгебр $G \in \mathrm{SAlg}(O)$, $A \in \mathrm{SAlg}(R)$ существует функтор*

$$\mathrm{SMod}_O(G) \times \mathrm{SMod}_R(A) \longrightarrow \mathrm{Mod}_{O\otimes R}(GA),$$

действующий следующим образом: паре модулей (L, M) сопоставляется модуль $LM = (L_0 \otimes M_0) \oplus (L_1 \otimes M_1)$ над алгеброй $GA = (G_0 \otimes A_0) \oplus (G_1 \otimes A_1)$. Соответственным образом определяется действие на гомоморфизмах.

Доказательство. Определим однородные отображения $\mathbb{Z}_2$-градуированных модулей (полагая $(O \otimes R)(n)_0 = (O \otimes R)(n)$, $(O \otimes R)(n)_1 = \{0\}$)

$$(O \otimes R)(n) \otimes (GA)^{\otimes(n-1)} \otimes (LM) \longrightarrow LM$$

такие, что для $\omega \in O(n)$, $\rho \in R(n)$ и однородных $g_1, \ldots, g_{n-1} \in G$, $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A$, $x \in L$, $y \in L$, таких, что $\tilde{g}_i = \tilde{a}_i$ для всех i и $\tilde{x} = \tilde{y}$, элемент $(\omega\otimes\rho)\otimes(g_1\otimes a_1)\otimes \cdots\otimes(g_{n-1}\otimes a_{n-1})\otimes(x\otimes y)$ отображается в $(\omega\otimes\rho)(g_1\otimes a_1)\ldots(g_{n-1}\otimes a_{n-1})(x\otimes y) = (\omega g_1 \ldots g_{n-1}x) \otimes (\rho a_1 \ldots a_{n-1}y)$. Непосредственные проверки показывают, что построенное таким образом семейство отображений задает на LM структуру GA-модуля над $O \otimes R$. Очевидно также, что соответствие $(L, A) \mapsto LA$ функториально. $\square$

В частности, если $O = K$ (операда, описанная выше перед леммой 2.1), то для любой коммутативной ассоциативной супералгебры G и для любого модуля L над этой супералгеброй существует функтор L_G-оболочки

$$L_G : \mathrm{SMod}_R(A) \longrightarrow \mathrm{Mod}_R(GA), \quad L_G(M) = (L_0 \otimes M_0) \oplus (L_1 \otimes M_1).$$

Чтобы компактно сформулировать аналог теоремы 2.2 для модулей (представлений), нам будут необходимы следующие конструкции. Рассмотрим категорию $\mathrm{Mod}(R)$, объекты которой — пары (A, M), где A — R-алгебра, а M — A-модуль. Морфизм этой категории из (A', M') в (A'', M'') состоит из пары (h, f), где $h : A' \to A''$ — гомоморфизм R-алгебр , а $f : M' \to M''$ — гомоморфизм R-модулей такой, что для любого натурального n и всевозможных $x \in M'$, $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A'$, $\omega \in R(n)$ имеет место равенство $f(\omega a_1 \ldots a_{n-1}x) = \omega h(a_1) \ldots h(a_{n-1}) f(x)$. Функтор $S = S_R : \mathrm{Mod}(R) \to \mathrm{Alg}(R)$, отображающий объект (A, M) в A, а морфизм (h, f) в h, будем называть *естественной проекцией категории модулей на категорию алгебр.* Ясно, что $\mathrm{Mod}_R(A)$ изоморфна подкатегории $\mathrm{Mod}(R)$, состоящей из всех объектов вида (A, M) при данном фиксированном A и всех морфизмов вида $(1_A, h)$.

Аналогичным образом определим категорию $\mathrm{SMod}(R)$, объекты которой — пары (A, M), где A — R-супералгебра, а M — модуль над супералгеброй A. Морфизм этой категории из (A', M') в (A'', M'') состоит из пары (h, f), где $h : A' \to A''$ есть гомоморфизм R-супералгебр, а $f : M' \to M''$ есть однородный гомоморфизм $\mathbb{Z}_2$-грудуированных K-модулей такой, что для любого натурального n, произвольного однородного $x \in M'$ и всевозможных однородных $a_1, \dots, a_{n-1} \in A_1$, $\omega \in R(n)$ имеет место равенство $f(\omega a_1 \dots a_{n-1} x) = \omega h(a_1) \dots h(a_{n-1}) f(x)$. Функтор $\mathrm{SMod}(R) \to \mathrm{SAlg}(R)$, отображающий объект (A, M) в A, а морфизм (h, f) в h, также будем называть *естественной проекцией.* Категория $\mathrm{SMod}_R(A)$ изоморфна подкатегории $\mathrm{SMod}(R)$, состоящей из всех объектов вида (A, M) при данном фиксированном A и всех морфизмов вида $(1_A, h)$.

Пусть K — операда (определенная в начале § 2), соответствующая коммутативному ассоциативному кольцу с тем же именем K, и пусть $G \in \mathrm{SAlg}(K)$ — коммутативная супералгебра. Определен функтор G-оболочки:

$$\mathrm{SMod}(R) \longrightarrow \mathrm{Mod}(R),$$

сопоставляющий паре (A, M) пару $G(A, M) = (GA, GM)$. Будем обозначать этот функтор также символом G.

Теорема 3.2. *Рассмотрим коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{SMod}(FO) \arrow[r, "G"] & \mathrm{Mod}(FO) \\
\mathrm{SMod}(R) \arrow[u] \arrow[r, "G"] & \mathrm{Mod}(R) \arrow[u]
\end{tikzcd} .$$

Здесь вертикальные стрелки — это функторы вложения, соответствующие представлению R в виде фактор-операды свободной операды FO, а горизонтальные стрелки — функторы оболочки, соответствующие некоторой супералгебре $G \in \mathrm{SAlg}(K)$.

Для того чтобы полный прообраз класса объектов категории $\mathrm{Mod}(R)$ относительно самой верхней горизонтальной стрелки (функтора G) совпадал с классом объектов подкатегории $\mathrm{SMod}(R)$, необходимо и достаточно, чтобы супералгебра G удовлетворяла следующим свойствам:

1) *$G = G_0 \oplus G_1$ является плоским K-модулем;*

2) *для всех $m \geq 1$ и любого набора $n_1, \dots, n_m$, где $n_i \in \{0, 1\}$, найдутся $g_1 \in G_{n_1}, \dots, g_m \in G_{n_m}$ такие, что $g_1 \dots g_m \neq 0$.*

В частности, этим свойствам удовлетворяют счетно-порожденные алгебры Грассмана и Клиффорда.

Доказательство. Достаточно заметить, что в парах (A, M) и (GA, GM) компоненты M и GM играют пассивную роль. Принадлежность объекта $G(A, M)$ классу $\mathrm{Ob}(\mathrm{Mod}(R))$ полностью определяется включением $GA \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Alg}(R))$, и аналогично $(A, M) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{SMod}(R))$ тогда и только тогда, если $A \in \mathrm{SAlg}(R)$. Поэтому доказываемое утверждение следует из теоремы 2.2. $\square$

Известно, что для каждой алгебры A над линейной симметрической операдой R можно определить универсальную обертывающую алгебру $U_R(A)$ (см., например, [12]), которая является ассоциативной K-алгеброй с единицей. Известно также [12, пример 1.6.7(a)], что если $R = \mathscr{L}ie$, т. е. операда, соответствующая многообразию алгебр Ли, и $A \in \mathrm{Alg}(\mathscr{L}ie)$, т. е. алгебра Ли, то $U_{\mathscr{L}ie}(A)$ — универсальная обертывающая алгебра для алгебры Ли A в обычном смысле. Это оправдывает название в общем случае.

Рассмотрим произвольную линейную симметрическую операду R и построим универсальную обертывающую супералгебру для $A \in \mathrm{SAlg}(R)$. Предварительно заметим, что если L — произвольный $\mathbb{Z}_2$-градуированный K-модуль, группа Σ_n действует на $L^{\otimes n}$ так, как описано в [1, теорема 1.1], подстановка $\sigma \in \Sigma_n$ такова, что $\sigma(n) = n$, и $x_1, \dots, x_n$ — однородные элементы L, то число $\mathrm{sgn}(\sigma, x_1 \dots x_{n-1}x_n)$ не зависит от выбора x_n. Это легко следует из явного вида sgn для транспозиций в формулировке [1, теорема 1.1]. Ввиду этого для σ с указанным свойством можно определить $\mathrm{sgn}(\sigma, x_1 \dots x_{n-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma, x_1 \dots x_{n-1}x_n)$, где однородный x_n можно выбирать произвольным образом.

Определение 3.2. Пусть R — операда с единицей ε, $A \in \mathrm{SAlg}(R)$. *Универсальная обертывающая супералгебра* $U_R(A)$ супералгебры A есть $\mathbb{Z}_2$-градуированная ассоциативная алгебра, которая порождается как K-модуль элементами $X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})$, где $a_i \in A$ — однородные элементы, $\omega \in R(n)$, $n = 1, 2, \dots$. При этом степень $X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})$ по определению равна $\tilde{a}_1 + \dots + \tilde{a}_{n-1} \pmod 2$. Требуется выполнение следующих соотношений:

1) выражение $X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})$ является K-линейным по каждому из n аргументов;

2) если $\sigma \in \Sigma_n$, причем $\sigma(n) = n$, то

$$X(\omega\sigma; a_1, \dots, a_{n-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma, a_1 \dots a_{n-1}) X(\omega; a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)});$$

3) пусть $\omega \in R(m)$, $\omega_i \in R(n_i)$, $\bar{a}_i = (a_{i,1}, \dots, a_{i,n_i})$, $a_{i,j} \in A$, тогда

$$X(\omega; \omega_1\bar{a}_1, \dots, \omega_{m-1}\bar{a}_{m-1}) = X(\omega\omega_1 \dots \omega_{m-1}\varepsilon; \bar{a}_1 \dots \bar{a}_{m-1});$$

4) пусть $\omega \in R(n)$, $\xi \in R(m)$, $a_i, b_j \in A$, тогда

$$X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1}) X(\xi; b_1, \dots, b_{m-1}) = X(\omega(\overbrace{\varepsilon \dots \varepsilon}^{n-1} \xi); a_1, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{m-1}).$$

Из определения видно, что в обертывающих супералгебрах имеется единица $X(\varepsilon;\ )$.

Очевидно, что $U_R(A)$ можно также охарактеризовать следующим универсальным свойством. Для каждого $n \geq 1$ и любого набора нулей и единиц $i_1, \dots, i_{n-1}$ определены полилинейные отображения вида

$$R(n) \times A_{i_1} \times \dots \times A_{i_{n-1}} \longrightarrow U_R(A)_{i_1 + \dots + i_{n-1} \pmod 2}$$

такие, что $(\omega, a_1, \dots, a_{n-1}) \mapsto X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})$. Элементы $X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})$ должны удовлетворять соотношениям 1–4 из определения 3.2. Наконец, если имеются $\mathbb{Z}_2$-градуированная ассоциативная K-алгебра с единицей V и семейство полилинейных отображений

$$R(n) \times A_{i_1} \times \dots \times A_{i_{n-1}} \to V_{i_1 + \dots + i_{n-1} \pmod 2} \tag{1}$$

таких, что $(\omega, a_1, \dots, a_{n-1}) \mapsto Y(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})$, при этом выполняются свойства, аналогичные 1–4 из определения 3.2 (с заменой X на Y), то должен существовать, притом однозначно определенный, однородный гомоморфизм ассоциативных K-алгебр с единицей $h : U_R(A) \to V$ такой, что $h(X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})) = Y(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})$ для любых n, ω и $a_1, \dots, a_{n-1}$.

Теорема 3.3. *Пусть $R = \mathscr{L}ie$. Тогда для любой супералгебры Ли $A \in \mathrm{SAlg}(R)$ алгебра $U_{\mathscr{L}ie}(A)$ есть универсальная обертывающая алгебра супералгебры Ли A в традиционном смысле.*

Доказательство. «В традиционном смысле» здесь означает, что если A — супералгебра Ли с операцией $[x_1, x_2]$, то существуют $\mathbb{Z}_2$-градуированная ассоциативная K-алгебра с единицей U и однородный гомоморфизм градуированных K-модулей $\vartheta : A \to U$ такие, что для любых однородных $x_1, x_2 \in A$ имеет место равенство

$$\vartheta([x_1, x_2]) = \vartheta(x_1)\vartheta(x_2) - (-1)^{\tilde{x}_1 \tilde{x}_2}\vartheta(x_2)\vartheta(x_1).$$

При этом если даны другая $\mathbb{Z}_2$-градуированная ассоциативная K-алгебра с единицей U' и однородный гомоморфизм градуированных K-модулей $\vartheta' : A \to U'$ с аналогичным сформулированному выше свойством, то существует единственный однородный гомоморфизм ассоциативных K-алгебр с единицей $h : U \to U'$ такой, что $h\vartheta = \vartheta'$. Утверждается, что $U_R(A)$ изоморфна именно такой алгебре U.

Обозначим через $\omega \in \mathscr{L}ie(2)$ операцию умножения в супералгебре Ли A, так что $[x_1, x_2] = \omega x_1 x_2$. Определим отображение $\theta : A \to U_R(A)$, полагая $\theta(a) = X(\omega; a)$ для однородных $a \in A$. Из определения $X(\omega; a)$ следует, что построенное таким образом отображение есть однородный гомоморфизм $\mathbb{Z}_2$-градуированных K-модулей. Рассмотрим тождества, определяющее операду $\mathscr{L}ie$. Это тождество $\omega = -\omega(1, 2)$, соответствующее антикоммутативности (здесь $(1, 2) \in \Sigma_2$ — транспозиция), и тождество

$$\omega\varepsilon\omega = \omega\omega\varepsilon + (\omega\varepsilon\omega)(1, 2). \tag{2}$$

Здесь $\sigma = (1, 2) \in \Sigma_3$, так что $\sigma(3) = 3$. Операдное тождество (2) соответствует тождеству Якоби, записанному в виде $[x_1, [x_2, x_3]] = [[x_1, x_2], x_3] + [x_2, [x_1, x_3]]$.

Используя (2), вычислим выражение $X(\omega\omega\varepsilon; a_1, a_2)$ для однородных a_1 и a_2. С одной стороны, $X(\omega\omega\varepsilon; a_1, a_2) = X(\omega; \omega a_1 a_2)$ (свойство 3 определения 3.2), что равно $\theta([a_1, a_2])$. С другой стороны, согласно (2) это выражение равно $X(\omega\varepsilon\omega; a_1, a_2) - X((\omega\varepsilon\omega)(1, 2); a_1, a_2)$. Согласно свойству 4 из определения 3.2 получим $X(\omega\varepsilon\omega; a_1, a_2) = X(\omega; a_1)X(\omega; a_2)$. Во втором слагаемом сначала используем свойство 2, а потом снова свойство 4:

$$X((\omega\varepsilon\omega)(1, 2); a_1, a_2) = (-1)^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2} X(\omega\varepsilon\omega; a_2, a_1) = (-1)^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2} X(\omega; a_2)X(\omega; a_1).$$

Все это дает равенство

$$\theta([a_1, a_2]) = \theta(a_1)\theta(a_2) - (-1)^{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2}\theta(a_2)\theta(a_1). \tag{3}$$

Теперь согласно определению универсальной обертывающей супералгебры Ли существует однозначно определенный гомоморфизм $h : U \to U_R(A)$ такой, что $h\vartheta = \theta$.

Операда $\mathscr{L}ie$ есть фактор-операда свободной симметрической операды с базисом из единственного элемента ω по идеалу, порожденному элементами, соответствующими приведенным выше соотношениям антикоммутативности и (2), т. е. $\omega(1 + (1, 2))$ и $\omega\varepsilon\omega(1 - (1, 2)) - \omega\omega\varepsilon$. Отсюда ввиду определения 3.2 следует, что все $X(\xi; a_1, \dots, a_{n-1})$ можно выразить как линейные комбинации произведений элементов вида $X(\omega; a)$. Зафиксируем для каждого набора $(\xi; a_1, \dots, a_{n-1})$ одно из таких выражений (единственность не требуется) и заменим все $X(\omega; a)$ на $\theta(a)$. Индуктивными рассуждениями непосредственно показывается, что свойства $X(\xi; a_1, \dots, a_{n-1})$ из определения 3.2 являются следствиями соотношений (3). Это значит, что если в выбранных выражениях, представляющих $X(\xi; a_1, \dots, a_{n-1})$ в виде линейных комбинаций произведений элементов $\theta(a)$, заменить все θ на ϑ и обозначить результат через $Y(\xi; a_1, \dots, a_{n-1})$, то получится семейство отображений вида (1) (где роль V играет U), обладающее набором свойств, аналогичных свойствам 1–4 из определения 3.2. Отсюда следует, что существует гомоморфизм, обратный к гомоморфизму h, что и требовалось доказать. $\square$

Следующее утверждение является аналогом [12, предложение 1.6.6].

Теорема 3.4. *Категория модулей над супералгеброй $A \in \mathrm{SAlg}(R)$ эквивалентна (и даже рационально эквивалентна) категории $\mathbb{Z}_2$-градуированных левых модулей над ассоциативной $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй $U_R(A)$.*

Доказательство. Пусть M есть A-модуль. Тогда структура левого $U_R(A)$-модуля определяется по правилу

$$X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})v = \omega a_1 \dots a_{n-1} v.$$

Здесь $\omega \in R(n)$, $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$, $v \in M$ — однородные элементы. Сопоставление A-модулю M модуля над $U_R(A)$, совпадающего с M как K-модуль, есть функтор из категории A-модулей в категорию левых $\mathbb{Z}_2$-градуированных $U_R(A)$-модулей.

Обратный к нему функтор строится еще легче. Если M есть $\mathbb{Z}_2$-градуированный $U_R(A)$-модуль, то это значит, что определены все выражения вида $X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})v \in M$, где $\omega \in R(n)$, $a_1, \dots, a_{n-1} \in A$, $v \in M$ — однородные элементы. Но тогда можно определить однородные отображения:

$$R(n) \otimes A^{\otimes (n-1)} \otimes M \longrightarrow M,$$

сопоставляющие элементам $\omega \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \otimes v$ элементы $\omega a_1 \cdots a_{n-1} v = X(\omega; a_1, \dots, a_{n-1})v$. Из свойств 1–4 определения 3.2 легко выводятся все свойства модуля над супералгеброй над операдой. Ясно также, что таким образом получается функтор, обратный к построенному выше, и что эти взаимно обратные функторы реализуют рациональную эквивалентность рассматриваемых категорий. $\square$

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению текста работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тронин С. Н.* Супералгебры и операды. I // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 631–646.
2. *Мальцев А. И.* Структурная характеристика некоторых классов алгебр // Докл. АН СССР. 1958. Т. 120, № 1. С. 29–32.
3. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
4. *Тронин С. Н.* Операды и многообразия, определяемые полилинейными тождествами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 670–694.
5. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.: Изд-во МГУ, 1983.
6. *Тронин С. Н.* Абстрактные клоны и операды // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 924–936.
7. *Тронин С. Н.* О строении свободных супералгебр Ли // IV Всесоюз. школа «Алгебры Ли и их применения в математике и физике», посвященная 80-летию со дня рождения

профессора В. В. Морозова. Казань, 30 мая–5 июня 1990 г.: Тез. сообщений. Казань, 1990. С. 45.

8. *Тронин С. Н.* Супералгебры и линейные операды // Міжнародна алгебраїчна конференція, присв. пам'яти проф. Л. М. Глускина (1922–1985). Слов'янськ, Донецька обл., Украïна (25–29 серпня 1997). Киïв, 1997. С. 93–94

9. *Тронин С. Н.* Многообразия супералгебр и линейные операды // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Матер. / Школа-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д. Ф. Егорова, Казань, 13–18 сент. 1999 г. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 1999. С. 224–227.

10. *Тронин С. Н.* Теория операд и универсальная алгебра // Алгебра и анализ-2004: Материалы / Междунар. конф., посвящ. 200-летию Казанского гос. ун-та (Казань, 2–9 июля 2004 г.). Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2004. Т. 23. С. 20–21.

11. *Зельманов Е. И., Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 4. С. 676–693.

12. *Ginzburg V., Kapranov M.* Koszul duality for operads // Duke Math. J. 1994. V. 76, N 1. P. 203–272.

13. *Kriz I., May J. P.* Operads, algebras, modules, and motives // Asterisque. 1995. V. 233. P. 1–137.

14. *May J. P. Operads, algebras and modules* // Contemp. Math. 1997. V. 202. P. 15–31.

Статья поступила 23 января 2008 г.

Тронин Сергей Николаевич
Казанский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Serge.Tronin@ksu.ru