Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2010. Том 51, № 1

УДК 514.13

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОРБИФОЛДЫ СО СВОБОДНЫМ ОТ КРУЧЕНИЯ КОММУТАНТОМ

Р. А. Идальго, А. Д. Медных

Аннотация. *Геометрическим орбифолдом* размерности d называется фактор-пространство $\mathscr{O} = X/K$, где (X, G) — d-мерная геометрия, а $K < G$ — кокомпактная дискретная подгруппа. В этом случае $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O}) = K$ называется *орбифолдной фундаментальной группой* $\mathscr{O}$. В общем случае коммутаторная подгруппа K' группы K может иметь элементы, действующие с неподвижными точками, т. е. может случиться, что гомологическое накрытие $M_{\mathscr{O}} = X/K'$ орбифолда $\mathscr{O}$ не является геометрическим многообразием; оно может иметь сингулярные точки. Основная задача работы — выяснить, в каких случаях K' действует на X без неподвижных точек, т. е. когда гомологическое накрытие $M_{\mathscr{O}}$ является геометрическим многообразием. В случае $d = 2$ полный ответ дан Маклохленом. В настоящей работе рассмотрен случай $d = 3$ и даны необходимые и достаточные условия для свободного действия K' при условии, что носителем орбифолда $\mathscr{O}$ служит трехмерная сфера S^3.

Ключевые слова: многообразие, орбифолд, геометрия, изометрия.

1. Введение

Проблема распознавания групп, свободных от кручения, в классе всех конечно-представимых групп исторически хорошо известная и весьма трудная. В работе Гриндлингера [1] (см. также [2]) приведены некоторые условия на определяющие соотношения, при которых группа G свободна от кручения. Позднее значительный успех в этом направлении достигнут в работах Розенбергера и других авторов [3–5]. История вопроса и современные результаты в этом направлении могут быть найдены в книге А. Ю. Ольшанского [6]. Следует заметить, что если группа допускает геометрическое действие в пространстве неположительной кривизны, то элементы конечного порядка в группе в точности те, которые имеют неподвижные точки. Поэтому они могут быть распознаны чисто геометрическими методами.

Геометрией называется пара (X, G), где X — односвязное полное риманово многообразие с группой изометрий G, действующей транзитивно и имеющей компактные стабилизаторы на X. При этом предполагается, что в G существует по крайней мере одна собственно разрывная подгруппа K, действующая на X без неподвижных точек (т. е. *свободно*), такая, что X/K — компактное многообразие. *Размерностью геометрии* (X, G) называется размерность многообразия X.

Частично поддержано проектами Fondecyt 1070271, UTFSM 12.08.01 и РФФИ (код проекта 09–01–00255).

Геометрией постоянной кривизны называется геометрия (X, G), для которой риманово многообразие X имеет постоянную гауссову кривизну. Все такие геометрии исчерпываются гиперболическим пространством $\mathbb{H}^d$, сферическим пространством S^d и евклидовым пространством $\mathbb{E}^d$ (см., например, [7]). В частности, двумерными геометриями постоянной кривизны являются $\mathbb{H}^2$, S^2 и $\mathbb{E}^2$. Тёрстон доказал, что существует ровно 8 трехмерных геометрий: (i) $\mathbb{H}^3$, (ii) S^3, (iii) $\mathbb{E}^3$, (iv) $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}$, (v) $S^2 \times \mathbb{E}$, (vi) Nil, (vii) Sol, (viii) $\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$ [8, 9]. В работе [10] содержится полный список из 19 четырехмерных геометрий.

Геометрическим орбифолдом, моделируемым в геометрии (X, G), называется фактор-пространство $\mathscr{O} = X/K$, где K — некоторая собственно разрывная подгруппа G. В этом случае $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O}) = K$ называется *орбифолдной фундаментальной группой* $\mathscr{O}$. Если K действует свободно на X, то X/K называется *геометрическим многообразием*.

Мы будем рассматривать только группы K, состоящие из сохраняющих ориентацию изометрий. Пусть K' обозначает коммутаторную подгруппу K, тогда орбифолд $M_{\mathscr{O}} = X/K'$ называется *гомологическим накрытием* орбифолда $\mathscr{O}$. Это — наибольшее абелево регулярное накрытие $\mathscr{O}$. Гомологическое накрытие $M_{\mathscr{O}}$ является геометрическим многообразием тогда и только тогда, когда K' действует свободно на X.

Заметим, что в несферических геометриях каждая изометрия конечного порядка действует с неподвижными точками. В этом случае K' действует свободно тогда и только тогда, когда K' является группой без кручения.

В двумерном случае полное решение проблемы о том, когда коммутаторная подгруппа не имеет элементов конечного порядка, известно (см., например, [11, 12], а также разд. 2).

В этой работе мы рассмотрим трехмерные орбифолды $\mathscr{O}$, носителем которых является трехмерная сфера S^3, и получим необходимые и достаточные условия, при которых коммутаторная подгруппа орбифолда $\mathscr{O}$ свободна от кручения.

Под *графом* мы понимаем конечный набор попарно не пересекающихся связных графов, имеющих кратные ребра и петли. Граф называется *тривалентным*, если каждая вершина имеет валентность три (при этом ребро, начинающееся и кончающееся в вершине, считается дважды).

Граф (возможно, несвязный) называется 1-*связным*, если он имеет ребро L, после удаления которого (без удаления его вершин) число связных компонент графа возрастает. Заметим, что если граф тривалентный, данное определение 1-связности совпадает с обычным определением из [13].

Рассмотрим трехмерную геометрию (X, G). Пусть $K < G$ — кокомпактная дискретная подгруппа такая, что $X/K = \mathscr{O}$ гомеоморфно сфере S^3, тогда $K = \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$. Коническое сингулярное множество орбифолда $\mathscr{O}$ — это тривалентный граф $\mathscr{G} \subset S^3$, над точками которого каноническое отображение $X \to X/K$ перестает быть неразветвленным накрытием. Каждому ребру предпишем целое положительное число — *индекс ребра*, равное порядку стабилизатора группы K в любой точке прообраза этого ребра (отличного от его вершины).

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{O}$ — трехмерный орбифолд, носителем которого является S^3, а сингулярное множество образовано тривалентным графом $\mathscr{G}$ (ребра которого имеют предписанные индексы). Тогда коммутаторная подгруппа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ действует свободно на универсальном накрытии орбифолда $\mathscr{O}$ тогда и* *только тогда, когда* (i) *все локальные группы в вершинах* $\mathscr{G}$ *равны* $\mathbb{Z}_2^2$ *и* (ii) *граф* $\mathscr{G}$ *не является* 1*-связным.*

Следствие 2. *Пусть* $\mathscr{O}$ *— несферический геометрический* 3*-орбифолд, носителем которого является* S^3*, а сингулярное множество образовано тривалентным графом* $\mathscr{G}$*. Тогда* $\pi_1^{\text{orb}}(\mathscr{O})'$ *свободен от кручения тогда и только тогда, когда*

(i) *все локальные группы в вершинах* $\mathscr{G}$ *равны* $\mathbb{Z}_2^2$*,*

(ii) *граф* $\mathscr{G}$ *не является* 1*-связным.*

Следствие 3. *Пусть* (X, G) *— трехмерная геометрия. Пусть* $K < G$ *— кокомпактная дискретная подгруппа такая, что* $X/K = \mathscr{O}$ *гомеоморфно* S^3*, и каждая компонента конического сингулярного множества* $\mathscr{G}$ *имеет индекс* 2*. Тогда* $\pi_1^{\text{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\text{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_2^k$ *для некоторого* $k \geq 1$ *тогда и только тогда, когда граф* $\mathscr{G}$ *не является* 1*-связным.*

В частности, теорема 1 дает простой способ распознать свободное действие коммутаторной подгруппы в группах Кокстера в несферической геометрии. Ранее это сделано в [14] с помощью сложной комбинаторной теоретико-групповой техники. Эта проблема важна в теории фуксовых и клейновых групп, поскольку позволяет описать наибольшие абелевы накрытия геометрических орбифолдов.

Мы будем использовать следующие обозначения и понятия. Геометрический орбифолд $\mathscr{O} = X/K$ назовем *общим орбифолдом Гумберта*, если K' действует свободно на X. *Орбифолдом Гумберта* называется общий орбифолд Гумберта, носителем которого является сфера. Орбифолд Гумберта X/K, для которого $K/K' \cong \mathbb{Z}_n^k$, будет называться *орбифолдом Гумберта типа* (n, k). Причиной для таких названий является тот факт, что гомологическое накрытие двумерных орбифолдов, носителями которых является сфера с коническими точками порядка 2, впервые было изучено Гумбертом [15].

Статья организована следующим образом. В разд. 2 из соображений полноты изложения мы опишем все возможные типы (n, k) двумерных орбифолдов Гумберта и укажем, для каких n и k соответствующие орбифолды являются арифметическими. В разд. 3 приведем доказательство теоремы 1. В разд. 4 дадим конкретные примеры трехмерных геометрических орбифолдов Гумберта.

2. Двумерные орбифолды Гумберта

Описание двумерных орбифолдов Гумберта является простым следствием из результатов Маклохлина [12]. Приведем его из соображений полноты изложения. Пусть $X = \mathscr{H}^2$ — гиперболическая плоскость и $G = PSL(2, \mathbb{C})$ — группа сохраняющих ориентацию изометрий X. Рассмотрим замкнутый геометрический орбифолд $\mathscr{O} = X/K$, где группа $K < G < \mathbb{R}$ действует собственно разрывно на X. В этом случае $\mathscr{O}$ гомеоморфен замкнутой ориентируемой поверхности рода γ. Обозначим через $P : X \to \mathscr{O}$ каноническую проекцию. Тогда существует конечное число точек $p_1, \dots, p_r$, над окрестностями которых P не является (неразветвленным) накрытием (может случиться, что $r = 0$).

Если $q_i \in X$ такое, что $P(q_i) = p_i$, то стабилизатор $K(q_i)$ группы K в точке q_i является конечной циклической группой порядка k_i для некоторого $k_i \geq 2$. Орбифолд $\mathscr{O}$ (и группа K) называется *орбифолдом* (соответственно *группой*) сигнатуры $(\gamma, r; k_1, \dots, k_r)$. По теореме об униформизации K имеет следующее представление:

$$K = \left\langle a_1, \ldots, a_\gamma, b_1, \ldots, b_\gamma, x_1, \ldots, x_r : x_1^{k_1} = \cdots = x_r^{k_r} = \prod_{j=1}^{\gamma} [a_j, b_j] \prod_{l=1}^{r} x_l = 1 \right\rangle, \tag{1}$$

где $[a_j, b_j] = a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1}$. Фактор-группа K/K' конечна тогда и только тогда, когда $\gamma = 0$.

Следующий результат, принадлежащий Маклохлину [12], дает необходимые и достаточные условия, при которых коммутаторная подгруппа K' свободна от кручения.

Теорема 4 [12]. *Коммутаторная подгруппа K' группы K с представлением* (1) *свободна от кручения тогда и только тогда, когда существует m_0 такое, что*

$$\operatorname{lcm}(k_1, \ldots, k_{j-1}, k_{j+1}, \ldots, k_r) = m_0 \quad \text{для всех } j = 1, \ldots, r, \tag{2}$$

где lcm *обозначает наименьшее общее кратное.*

Следствие 5. *Двумерный геометрический орбифолд $\mathscr{O} = X/K$ является орбифолдом Гумберта тогда и только тогда, когда группа K имеет следующее представление:*

$$K = \langle x_1, \ldots, x_r : x_1^{k_1} = \cdots = x_r^{k_r} = x_1 x_2 \cdots x_r = 1 \rangle, \tag{3}$$

и удовлетворяет условию (2).

Пример 6. Если $k_r = \operatorname{lcm}(k_1, \ldots, k_{r-1})$, то условие (2) выполнено и

$$K/K' \cong \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \mathbb{Z}_{k_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_{r-1}}.$$

По следствию 5 получим, что X/K является орбифолдом Гумберта.

Если $r = 3$ и $(k_1, k_2, k_3) = (2, 10, 10)$, то $K/K' \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10}$, откуда X/K не является орбифолдом типа (k, n).

Если $r = 4$ и $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (2, 3, 6, 6)$, то $K/K' \cong \mathbb{Z}_6^2$, т. е. орбифолд Гумберта X/K имеет тип $(6, 2)$.

2.1. Двумерные орбифолды Гумберта заданного типа. Как видно из примера 6, существуют двумерные орбифолды Гумберта, не являющиеся орбифолдами типа (k, n). Для того чтобы описать двумерные орбифолды Гумберта указанного типа, нам потребуется следующий хорошо известный факт (см., например, [16, с. 344]).

Лемма 7. *Пусть группа K имеет представление* (3) *и удовлетворяет условию* (2). *Рассмотрим $(r+1) \times r$-матрицу*

$$A_K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_r \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

и обозначим через D_j, где $j = 1, \ldots, r$, наибольший общий делитель всех $j \times j$-миноров матрицы A. Тогда

$$K/K' \cong \mathbb{Z}_{D_2} \oplus \mathbb{Z}_{D_3/D_2} \oplus \mathbb{Z}_{D_4/D_3} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{D_r/D_{r-1}}.$$

В качестве следствия из леммы 7 получим необходимые и достаточные условия, при которых X/K является орбифолдом Гумберта типа (n, k).

Следствие 8. *Пусть группа K имеет представление* (3) *и удовлетворяет условию* (2). *Пусть D_j те же, что и выше, для всех $j = 1, \dots, r$. Для каждого $j = 2, \dots, r$, при котором $D_j/D_{j-1} > 1$, запишем*

$$D_j/D_{j-1} = m_{j1}m_{j2}\cdots m_{js_j},$$

где каждое m_{ji} есть степень простого числа и при $i_1 \neq i_2$ простые, соответствующие числам m_{ji_1} и m_{ji_2} различны. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы X/K был орбифолдом Гумберта типа (n, k), является возможность представления множества

$$\{\underbrace{m_{21}, \dots, m_{2s_2}}, \dots, \underbrace{m_{r1}, \dots, m_{rs_r}}\}$$

в виде

$$\{\underbrace{u_{11}, \dots, u_{1t_1}}, \underbrace{u_{21}, \dots, u_{2t_2}}, \dots, \underbrace{u_{k1}, \dots, u_{kt_k}}\}$$

таком, что $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_{u_{j1}} \oplus \mathbb{Z}_{u_{j2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{u_{jt_j}}$ для всех $j = 1, \dots, k$.

Полученный критерий позволяет использовать компьютерные программы такие, как, например, GAP [17], для описания двумерных орбифолдов Гумберта заданного типа.

2.2. Сферические и евклидовы орбифолды Гумберта. Единственной дискретной группой без кручения, действующей на двумерной сфере, является тривиальная группа. Как следствие, для того, чтобы коммутант K' группы K, действующей на сфере, был без кручения, необходимо, чтобы группа K была абелевой. В частности, возможны следующие случаи: (i) $K \cong \mathbb{Z}_k$ или (ii) $K \cong \mathbb{Z}_2^2$. В случае (i) орбифолд S^2/K имеет тип $(k, 1)$, а в случае (ii) — тип $(2, 2)$.

В евклидовом случае если орбифолд $O = \mathbb{E}^2/K$ компактен, а K' свободна от кручения, то многообразие $M = \mathbb{E}^2/K'$ является тором. В этом случае для группы $H = K/K'$ имеются лишь следующие возможности:

(i) $H \cong \mathbb{Z}_6$ для группы K с сигнатурой $(0, 3; 2, 3, 6)$,

(ii) $H \cong \mathbb{Z}_3^2$ для группы K с сигнатурой $(0, 3; 3, 3, 3)$,

(iii) $H \cong \mathbb{Z}_2^3$ для группы K с сигнатурой $(0, 4; 2, 2, 2, 2)$.

В случае (i) орбифолд Гумберта $\mathbb{E}^2/K$ имеет тип $(6, 1)$, а в случаях (ii) и (iii) — типы $(3, 2)$ и $(2, 3)$ соответственно.

2.3. Некоторые примеры гиперболических орбифолдов Гумберта. Пусть гиперболическая группа K имеет представление (3) и удовлетворяет условию (2). В этом случае $r \geq 3$, $k_j \geq 2$ и $\sum\limits_{j=1}^{r} k_j^{-1} < r - 2$.

Для того чтобы построить несколько примеров, положим $p = \gcd(k_1, \dots, k_r)$, $\hat{k}_j = k_j/p$ и $q_j = \gcd(\hat{k}_1, \hat{k}_2, \dots, \hat{k}_{j-1}, \hat{k}_{j+1}, \dots, \hat{k}_r)$ для $j = 1, \dots, r$ и предположим, что выполнены равенства

$$k_j = pq_1q_2\cdots q_{j-1}q_{j+1}\cdots q_r, \quad j = 1, \dots, r. \tag{4}$$

Заметим, что условия (4) тривиальны при $r = 3$ и не тривиальны при $r \geq 4$.

В рассматриваемом случае $D_1 = 1$, $D_2 = p$, $D_k = p^{k-1}q_1^{k-2}q_2^{k-2}\cdots q_r^{k-2}$ для $k = 3, \dots, r$. В качестве следствия из леммы 7 получим

$$K/K' \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_{pq_1q_2\cdots q_r} \oplus \mathbb{Z}_{pq_1q_2\cdots q_r} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{pq_1q_2\cdots q_r}.$$

Следовательно, двумерный орбифолд $\mathscr{O} = \mathbb{H}^2/K$ будет орбифолдом Гумберта только при выполнении следующих условий:

(i) $p \geq 2$, $q_1 = \cdots = q_r = 1$ и $K/K' \cong \mathbb{Z}_p^{r-1}$

или

(ii) $p = 1$ и $K/K' \cong \mathbb{Z}^{r-2}_{q_1 \cdots q_r}$.

Таблица 1.

Арифметические орбифолды Гумберта.

Signature of K	field	K/K'	g
$(0, 3 : 4, 4, 4)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$\mathbb{Z}_4^2$	3
$(0, 3 : 5, 5, 5)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$\mathbb{Z}_5^2$	6
$(0, 3 : 6, 6, 6)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	$\mathbb{Z}_6^2$	10
$(0, 3 : 7, 7, 7)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/7)$	$\mathbb{Z}_7^2$	15
$(0, 3 : 8, 8, 8)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/8)$	$\mathbb{Z}_8^2$	21
$(0, 3 : 9, 9, 9)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/9)$	$\mathbb{Z}_9^2$	28
$(0, 3 : 12, 12, 12)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/12)$	$\mathbb{Z}_{12}^2$	55
$(0, 3 : 15, 15, 15)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/15)$	$\mathbb{Z}_{15}^2$	91
$(0, 3 : 3, 4, 12)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$	$\mathbb{Z}_{12}$	3
$(0, 3 : 2, 5, 10)$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$\mathbb{Z}_{10}$	2
$(0, 3 : 2, 7, 14)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/7)$	$\mathbb{Z}_{14}$	3
$(0, 3 : 2, 9, 18)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/9)$	$\mathbb{Z}_{18}$	4
$(0, 3 : 3, 8, 24)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/12)$	$\mathbb{Z}_{24}$	7
$(0, 3 : 2, 15, 30)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/15)$	$\mathbb{Z}_{30}$	7
$(0, 3 : 3, 10, 30)$	$\mathbb{Q}(\cos\pi/15)$	$\mathbb{Z}_{30}$	9

2.3.1. Арифметические орбифолды Гумберта. Условие (4) на группу K при $r = 3$ тривиально следует из условия (2). Список всех арифметических треугольных групп приведен в [18]. Он позволяет описать все треугольные арифметические орбифолды Гумберта $\mathscr{O} = \mathbb{H}^2/K$ типа (n, k), т. е. такие, для которых $K/K' \cong \mathbb{Z}_n^k$. Результаты приведены в табл. 1, где K униформизирует орбифолд, g обозначает род гомологического накрытия, а field означает соответствующее поле следов.

2.3.2. Обобщенные кривые Ферма [19, 20]. Пусть $\mathscr{O}_{n,k}$ — орбифолд сигнатуры $(0, k+1; n, \ldots, n)$, где $n \geq 2$ и $k \geq 1$. Из предыдущих результатов следует, что $\mathscr{O}_{n,k}$ является двумерным орбифолдом Гумберта типа (n, k).

Обозначим через $S_{n,k}$ гомологическое накрытие орбифолда $\mathscr{O}_{n,k}$, т. е. замкнутую риманову поверхность рода $g_{n,k}$, допускающую группу конформных автоморфизмов $H \cong \mathbb{Z}_n^k$ такую, что $\mathscr{O}_{n,k} = S_{n,k}/H$. Равенство $g_{n,k} = 0$ достигается лишь в случае, когда $(n, k) \in \{(n, 1), (2, 2)\}$ для $n \geq 2$, а $g_{n,k} = 1$ ровно тогда, когда $(n, k) \in \{(2, 3), (3, 2)\}$ (заметим, что существуют другие двумерные орбифолды Гумберта типов $(3, 1)$, $(6, 1)$ и $(4, 1)$, которые не получаются указанным способом).

Условие $g_{n,k} \geq 2$ эквивалентно неравенству $n^{k-1}(n(k-1) - (k+1)) \geq 2$. В этом случае возможны три следующие ситуации: (i) (n, k) с $n \geq 2$, $k \geq 4$, (ii) $(n, 3)$ с $n \geq 3$ и (iii) $(n, 2)$ с $n \geq 4$.

Пусть (n, k) — любая пара, удовлетворяющая (i), (ii) или (iii). Рассмотрим набор из $k - 2$ попарно различных точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-2} \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ и подмножество $C(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-2})$ в проективном пространстве, образованное общими нулями однородных полиномов:

$$\begin{aligned} x_1^n + x_2^n + x_3^n &= 0 \\ \lambda_1 x_1^n + x_2^n + x_4^n &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots& \\ \lambda_{k-2} x_1^n + x_2^n + x_{k+1}^n &= 0. \end{aligned}$$

Из теоремы о неявной функции следует, что $C(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-2})$ является замкнутой римановой поверхностью рода $g_{n,k} \geq 2$. Более того, если мы обозначим через a_j линейные проективные автоморфизмы $\mathbb{P}^k$, меняющие координату

x_j на ρx_j, где $\rho = e^{2\pi i/n}$, то группа $H_0 = \langle a_1, \dots, a_k \rangle \cong \mathbb{Z}_n^k$ сохраняет риманову поверхность $C(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2})$ инвариантной и действует на ней как группа конформных автоморфизмов.

Фактор-пространство $\mathscr{O}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-2})} = C(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2})/H_0$ является орбифолдом сигнатуры $(0, k+1; n, \dots, n)$. Соответствующее фактор-отображение имеет вид $\pi(x_1 : \dots : x_{k+1}) = -(x_1/x_2)^n$ и разветвлено над точками ∞, 0, 1, $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}$. В частности, $\mathscr{O}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-2})}$ является гиперболическим орбифолдом Гумберта вида $\mathscr{O}_{n,k}$.

Обратно, всякий гиперболический орбифолд Гумберта $\mathscr{O}_{n,k}$ может быть представлен в виде $\mathscr{O}_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-2})}$ для подходящего набора попарно различных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2} \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

Действительно, если мы предположим (с точностью до преобразования Мёбиуса), что коническими точками орбифолда $\mathscr{O}_{n,k}$ являются точки ∞, 0, 1, $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2}$, то гомологическое накрытие $S_{n,k}$ биголоморфно эквивалентно $C(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-2})$ и соответствующий биголоморфный автоморфизм сопрягает группы H и H_0.

3. Доказательство теоремы 1

В этом разделе зафиксируем трехмерную геометрию (X, G) и кокомпактную дискретную группу $K < G$ такую, что $X/K = \mathscr{O}$ гомеоморфно S^3. Отождествим группу K с фундаментальной орбифолдной группой $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$. Пусть $\mathscr{G}$ — граф, образованный сингулярным множеством орбифолда $\mathscr{O}$.

Рассмотрим проекцию графа $\mathscr{G}$ на плоскость и обозначим ее через $\widetilde{\mathscr{G}}$. Пусть $A_1, \dots, A_r$ — ребра графа $\widetilde{\mathscr{G}}$ с удаленными вершинами. Пусть d_j — конический индекс орбифолда $\mathscr{O}$, предписанный ребру A_j.

Приведем несколько простых фактов, которые потребуются нам в дальнейшем.

Лемма 9. *Коммутаторная подгруппа K' действует на X без неподвижных точек тогда и только тогда, когда каждая замкнутая петля вокруг ребра графа $\mathscr{G}$ представляет класс петель, не принадлежащий K'.*

Доказательство. Действительно, элемент $k \in K' - \{I\}$ действует на пространстве X с неподвижными точками тогда и только тогда, когда он оставляет неподвижной геодезическую в X. Проекция этой геодезической на орбифолд является ребром графа $\widehat{\mathscr{G}}$, и все ребра графа могут быть получены таким способом.

3.1. Представление Хефлигера — Квача — Виртингера. Представление Хефлигера — Квача — Виртингера для группы $K = \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ дано в [21] в терминах порождающих и определяющих соотношений фундаментальной группы многообразия $\mathscr{O} - \mathscr{G}$ и информации, полученной из локальных индексов сингулярного множества орбифолда $\mathscr{O}$. Более точно, для каждого $j \in \{1, \dots, r\}$ обозначим через x_j петлю вокруг ребра A_j. Тогда порождающие $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ задаются петлями (точнее, классами петель) $x_1, \dots, x_r$, а определяющие соотношения имеют вид

$$x_1^{d_1} = \dots = x_r^{d_r} = 1 \quad \text{и} \quad R_1 = \dots = R_s = 1,$$

где соотношения $R_j = 1$ записываются в виде $x_a x_b x_a^{-1} = x_c$, соответствующем двойным точкам проекции $\widetilde{\mathscr{G}}$, или в виде $x_a x_b^{\pm 1} = x_c$, соответствующем вершинам $\widehat{\mathscr{G}}$.

Представление Хефлигера — Квача — Виртингера показывает, что группа $K = \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ конечно порождается элементами конечного порядка. В частности, отсюда следует, что K/K' — конечная группа. При этом имеет место канонический сюръективный гомоморфизм $\Psi : \pi_1(S^3 - \mathscr{G}) \to K = \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$.

3.2. Случай узлов и зацеплений.

Лемма 10. *Пусть $\mathscr{O}$ — трехмерный орбифолд, носитель которого гомеоморфен S^3, а сингулярное множество $\mathscr{G}$ представляет собой узел или зацепление с r компонентами. Обозначим их через $L_1, \dots, L_r$ и будем считать, что сингулярный индекс L_j равен $d_j \geq 2$. Тогда $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$.*

Доказательство. В нашем случае сингулярное множество орбифолда $\mathscr{O}$ является узлом или зацеплением, т. е. оно не содержит вершин. Отсюда представление Хефлигера — Квача — Виртингера $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ задается порождающими $x_1, \dots, x_r$ и соотношениями вида $x_1^{d_1} = \dots = x_r^{d_r} = 1$ и $x_k = x_i x_j x_i^{-1}$. В последнем случае x_k и x_i сопряжены и имеют одинаковые порядки. Заметим, что в абелевой группе соотношения последнего типа всегда выполнены. Поэтому абелизатор орбифолдной фундаментальной группы $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ имеет требуемый вид. $\square$

Теорема 11. *Пусть $\mathscr{O}$ — трехмерный орбифолд, носитель которого гомеоморфен S^3, а сингулярное множество $\mathscr{G}$ представляет собой узел или зацепление. Тогда $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ действует свободно. Кроме того, если зацепление $\mathscr{G}$ имеет r компонент $L_1, \dots, L_r$ с сингулярными индексами $d_j \geq 2$, $j = 1, \dots, r$, то $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_n^k$ тогда и только тогда, когда имеет место разложение*

$$\{\underbrace{d_{1,1}, \dots, d_{1,s_1}}, \underbrace{d_{2,1}, \dots, d_{2,s_2}}, \dots, \underbrace{d_{k,1}, \dots, d_{k,s_k}}\} = \{d_1, \dots, d_r\} \tag{5}$$

такое, что $s_1 + s_2 + \dots + s_k = r$, и

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{d_{j,1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_{j,s_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Пусть зацепление $\mathscr{G}$ имеет r компонент $L_1, \dots, L_r$ с сингулярными индексами $d_j \geq 2$, $j = 1, \dots, r$. Рассмотрим петлю x_j вокруг компоненты L_j. По лемме 10 имеем $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$, где каждая группа $\mathbb{Z}_{d_j}$ порождена петлей x_j. Далее, если $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ не действует свободно, то по лемме 9 некоторая нетривиальная степень x_j принадлежит группе $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$; противоречие. Последнее утверждение теоремы представляет собой элементарный факт из классификации конечно порожденных абелевых групп. $\square$

Следствие 12. *Пусть (X, G) — трехмерная геометрия. Пусть $K < G$ — кокомпактная дискретная группа такая, что $\mathscr{O} = X/K$ гомеоморфно S^3, а сингулярное множество $\mathscr{G}$ орбифолда $\mathscr{O}$ представляет собой узел или зацепление с k компонентами с одним и тем же сингулярным индексом $n \geq 2$. Тогда коммутаторная подгруппа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ действует свободно на X и $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_n^k$.*

Доказательство. В рассматриваемом случае все компоненты и зацепления $\mathscr{G}$ имеют один и тот же индекс $d_j = n$. Тогда теорема 11 утверждает, что $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_k} = \mathbb{Z}_n^k$. $\square$

Следствие 13. *Пусть $\mathscr{O}$ — трехмерный несферический геометрический орбифолд, носитель которого гомеоморфен S^3. Тогда если сингулярное множество орбифолда $\mathscr{O}$ — узел или зацепление, то коммутаторная подгруппа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ свободна от кручения.*

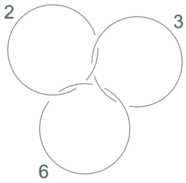

Рис. 1.

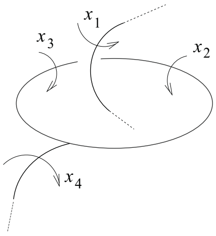

Рис. 2. Каждое ребро индекса 2.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 12 и того факта, что в несферической геометрии каждая изометрия конечного порядка действует с неподвижными точками. □

Пример 14. Рассмотрим трехмерный орбифолд $\mathscr{O}$, носитель которого гомеоморфен S^3, а его сингулярное множество, изображенное на рис. 1, состоит из трех компонент. Первая компонента имеет индекс 2, вторая — индекс 3, а третья — индекс 6.

В этом случае орбифолд имеет гиперболическую структуру (SnapPea [22]) и $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})/\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})' \cong \mathbb{Z}_6^2$. По следствию 13 фундаментальная группа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ свободна от кручения.

Это легко вывести из того факта, что группа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})$ порождена x, y, z, которые связаны соотношениями $x^2 = y^3 = z^6 = 1$ и тремя другими соотношениями вида $w_1^{-1}xw_1x = 1$, $w_2^{-1}y^{-1}w_2y = 1$ и $w_3^{-1}z^{-1}w_3z = 1$, где $w_1 = zxy$, $w_2 = xy^{-1}z$ и $w_3 = yz^{-1}x$.

Записывая $\mathbb{Z}_6^2 = \langle a, b : a^6 = b^6 = aba^{-1}b^{-1} = 1\rangle$, легко видеть, что орбифолдная фундаментальная группа $\pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O})'$ является ядром сюръективного гомоморфизма $\phi : \pi_1^{\mathrm{orb}}(\mathscr{O}) \to \mathbb{Z}_6^2$, удовлетворяющего условиям $\phi(x) = a^3$, $\phi(y) = a^2$ и $\phi(z) = b$.

3.3. Случай графа $\mathscr{G}$ с вершинами. Так как мы рассматриваем только геометрические орбифолды, граф $\mathscr{G}$ всегда трехвалентен [8]. Следующий пример показывает, что в этом случае мы не обязательно получаем орбифолды Гумберта.

Пример 15 (K' имеет неподвижные точки). Рассмотрим трехмерный гиперболический орбифолд $\mathscr{O}$, носитель которого гомеоморфен S^3, а часть его сингулярного множества (индекса 2) содержит подграф, как показано на рис. 2. Если группа $K < \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^3)$ такая, что $\mathscr{O} = \mathbb{H}^3/K$, то порождающие x_1, x_2, x_3, $x_4, \ldots$ группы K (каждая из которых индекса 2) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = x_4^2 = \cdots = 1, \quad x_1x_2x_1 = x_3, \quad x_2x_3 = x_4.$$

Отсюда следует, что $x_4 = x_2x_1x_2x_1 \in K'$, т. е. K' имеет кручение и, в частности, действует с неподвижными точками на $\mathbb{H}^3$.

Чтобы применить лемму 9, необходимо проверить принадлежность петли вокруг ребра графа $\mathscr{G}$ группе K', что мы и сделаем. Рассмотрим связную компоненту графа и обозначим ее через $\mathscr{G}_1$ (все эти компоненты графа зацеплены).

Рассмотрим цилиндрическую окрестность V графа $\mathscr{G}_1$, гомеоморфную телу с ручками некоторого рода g. Граница S указанной окрестности является замкнутой ориентируемой поверхностью рода g. Каждое ребро графа $\mathscr{G}_1$ определяет гомотопически нетривиальную простую петлю на S. При этом каждая гомотопически нетривиальная простая петля на S либо разбивающая, либо нет. Пусть $\gamma \subset S$ — одна из таких петель.

3.3.1. Первый случай. Если γ разбивает S, то она определяет нетривиальный элемент группы K' с неподвижными точками. Действительно, такая петля определяет элемент коммутаторной подгруппы $\pi_1(S^3 - \mathscr{G})$ так, что его Ψ-образ определяет элемент в коммутаторной подгруппе группы $K = \Psi(\pi_1(S^3 - \mathscr{G}))$ под действием Ψ. Отсюда следует, что в этом случае K' имеет элемент, который действует с неподвижными точками.

3.3.2. Второй случай. Предположим, γ не разбивает S. Обозначим вершину начала соответствующего ребра через v_1 и вершину конца — через v_2 (не обязательно различны).

Если вершины совпадают $v_1 = v_2 = v$, то с учетом того, что наш граф тривалентен, необходимо, чтобы $\mathscr{G}$ был односвязным. Поэтому, как и в предыдущем случае, K' имеет элемент, который действует с неподвижными точками.

Если $v_1 \neq v_2$, то с учетом того, что $\mathscr{O}$ замкнут, возможные локальные группы из K в вершинах v_j являются конечными группами преобразований Мёбиуса, т. е. (i) $\mathbb{Z}_2^2$, (ii) $\mathscr{D}_r$, где $r \geq 3$, (iii) $\mathscr{A}_4$, (iv) $\mathscr{S}_4$ и (v) $\mathscr{A}_5$ [8]. В любом из случаев (ii)–(v) мы имеем нетривиальную коммутаторную подгруппу, действующую с неподвижными точками (представленную петлями вокруг ребер в соответствующих вершинах).

3.4. Теперь, подводя итог сказанному, мы готовы закончить доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что сингулярное множество $\mathscr{G}$ состоит из r компонент, скажем $\mathscr{G}_1, \ldots, \mathscr{G}_r$. Тогда если мы обозначим через K_j орбифолдную фундаментальную группу орбифолда с носителем S^3 и сингулярным множеством $\mathscr{G}_j$, то по теореме 10 имеем

$$K/K' \cong K_1/K_1' \oplus K_2/K_2' \oplus \cdots \oplus K_r/K_r'.$$

Лемма 9 дает, что K' действует без неподвижных точек тогда и только тогда, когда граф $\mathscr{G}$ не является 1-связным, и локальные группы в его вершинах равны $\mathbb{Z}_2^2$.

4. Примеры

4.1. Гиперэллиптические многообразия. *Гиперэллиптическим многообразием* M называется геометрическое 3-многообразие, допускающее изометрию второго порядка $\tau : M \to M$ такую, что $M/\langle\tau\rangle$ гомеоморфно S^3. При этом τ называется *гиперэллиптической инволюцией* многообразия M. Гиперэллиптические многообразия изучались многими авторами (см., например, [23, 24]). В частности, в [23] показано, что гиперэллиптические многообразия существуют в каждой из восьми трехмерных геометрий Тёрстона.

Пусть M — гиперэллиптическое многообразие с геометрией (X, G) и $H \cong \mathbb{Z}_2$ — группа, порожденная гиперэллиптической инволюцией τ. Тогда $M/H = \mathscr{O}$ является геометрическим орбифолдом с геометрией (X, G), носитель которого гомеоморфен S^3, а сингулярное множество представляет собой узел или зацепление, каждая компонента которого имеет индекс 2.

Гомологическое накрытие трехмерного орбифолда Гумберта типа $(2, 1)$ является гиперэллиптическим многообразием. Однако не все гиперэллиптические многообразия могут быть представлены таким образом. Действительно, пусть $K < G$ таково, что $\mathscr{O} = X/K$. Мы знаем, что $\mathscr{O}$ является орбифолдом Гумберта

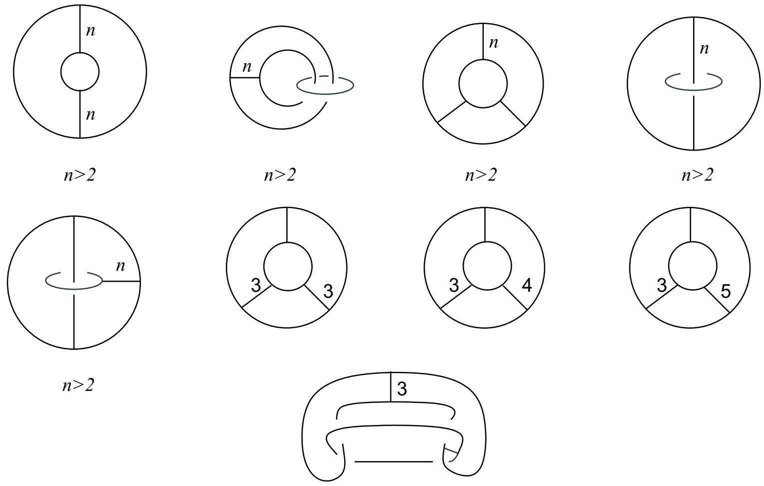

Рис. 3.

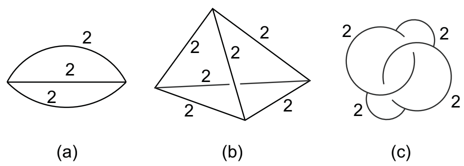

Рис. 4.

типа $(2,1)$ тогда и только тогда, когда K' действует свободно, $M = X/K'$ и $[K : K'] = 2$. Как вытекает из следствия 3, сингулярное множество M/H не может иметь подграфов, изображенных на рис. 2. Это позволяет установить

Следствие 16. *Пусть (X, G) — трехмерная геометрия. Пусть $K < G$ такова, что орбифолд $X/K = \mathscr{O}$ является трехмерной сферой S^3 с сингулярным множеством $\mathscr{G}$, каждая компонента которого имеет индекс* 2. *Для того чтобы $\mathscr{O}$ был орбифолдом Гумберта типа* $(2,1)$, *необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{G}$ был узлом или зацеплением с индексом* 2.

4.2. Негиперболические орбифолды. В статье [25] Данбар приводит список геометрических, но негиперболических орбифолдов, носитель которых гомеоморфен S^3. Теорема 1 может быть использована для того, чтобы определить, какие из них имеют в качестве гомологического накрытия геометрическое многообразие. Если сингулярным множеством орбифолда является узел или зацепление, то теорема 11 утверждает, что его гомологическим накрытием будет многообразие. В случае, когда сингулярное множество имеет вершины, гомологическое накрытие будет многообразием лишь при условии, что все ребра при каждой вершине имеют индекс 2 (в статье [25] это описывается отсутствием меток на ребре), а сингулярное множество не будет 1-связным. Все ссылки в этом пункте относятся к [25].

1. Из табл. 2 следует, что каждый нильорбифолд вида 2a гомотопически накрывается геометрическим многообразием.

2. Из табл. 3 заключаем, что орбифолд из [25, с. 84] — единственный нильорбифолд типа 2b, гомологическое накрытие которого не является геометри-

ческим многообразием. Он расслаивается над двумерным орбифолдом $D^2(3;3)$ с особыми слоями индекса 3 и эйлеровым числом $k \neq 0$.

3. Все евклидовы орбифолды типа 2b, гомологическое накрытие которых не является геометрическим, даны в следующем списке: [$P321$], [$P422$], [$I422$], [$P312$], [$R32$], [$P622$] и [$P6_322$].

4. В табл. 4 содержится ровно три евклидовых орбифолда типа 4 с геометрическим гомологическим накрытием: [$P2,3$], [$I2,3$] и [$P4_132$].

5. В табл. 6 приведены все сферические орбифолды типа 2a с геометрическим гомологическим накрытием.

6. Табл. 7 содержит аналогичный список сферических орбифолдов типа 2b. Полный набор орбифолдов, обладающих геометрией $S^2 \times \mathbb{E}^1$, которые не имеют геометрического гомологического накрытия, приведен на рис. 3.

7. Ни один из сферических орбифолдов типа 4 из табл. 8 не имеет геометрического гомологического накрытия.

8. Все солворбифолды из табл. 9 обладают гомологическими накрытиями с геометрической структурой.

Замечание 17. Приведем несколько сферических трехмерных орбифолдов Гумберта, которые не содержатся в списке Дамбара:

(i) $\left(S^3, \mathbb{Z}_2^2\right)$ с сингулярным множеством, приведенным на рис. 4(a);

(ii) $\left(S^3, \mathbb{Z}_2^3\right)$ с сингулярным множеством, приведенным на рис. 4(b);

(iii) $\left(\mathbb{RP}_3, \mathbb{Z}_2^3\right)$ с сингулярным множеством, приведенным на рис. 4(c).

4.3. Гиперболические орбифолды. Наконец, приведем примеры трехмерных гиперболических орбифолдов Гуммберта типа (n, k) для всех возможных пар $n, k \geq 2$. Все примеры могут быть проверены с помощью компьютерных программ SnapPea [22] и Orb [26]. Ниже мы приведем все необходимые ссылки на работы, в которых эти примеры были рассмотрены.

4.3.1. Случай $n, k \geq 3$. Рассмотрим набор, состоящий из $k \geq 3$ простых петель, показанных на рис. 5. Пусть $\mathscr{O}$ — орбифолд с носителем S^3 и сингулярным множеством, образованным указанными петлями с индексами n. Указанный орбифолд обладает гиперболической структурой [27, 28]. Выберем дискретную подгруппу $K < \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^3)$ такую, что $\mathscr{O} = \mathbb{H}^3/K$. Тогда K имеет следующие порождающие $x_1, \dots, x_k$ (рис. 6) и соотношения

$$x_1^n = \dots = x_k^n = 1, \quad x_j x_{j+1}^{-1} x_{j+2} x_{j+1} = x_{j+1} x_j x_{j+1}^{-1} x_{j+2} \ (j \bmod k).$$

В этом случае $K/K' \cong \mathbb{Z}_n^k$ и K' не имеет кручения.

4.3.2. Случай $n = 2, k = 1$. Нам необходимо рассмотреть узел S^3 с индексом 2 такой, что соответствующий ему орбифолд будет гиперболическим. В качестве примера возьмем узел 9_{49} с индексом два. В [29, 30] показано, что указанный орбифолд имеет в качестве двулистного накрытия замкнутое гиперболическое многообразие Фоменко — Матвеева — Викса. Оно, как известно, является наименьшим по объему в классе всех арифметических многообразий [31]. Другой пример представляет собой наипростейший π-узел 8_{18} (см., например, [29]).

4.3.3. Случай $n = 2$, $k = 2$. Рассмотрим зацепление 10^2_{138} с индексом 2 на каждой компоненте и носителем S^3, описанное в работе [30]. В результате получим орбифолд Гумберта типа $(2, 2)$.

4.3.4. Случай $n = 2, k = 3$. Соответствующие примеры могут быть найдены в [24].

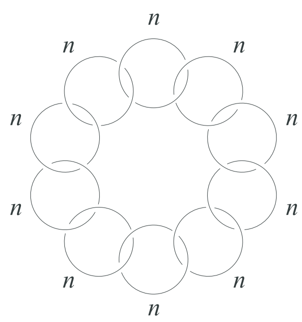

Рис. 5.

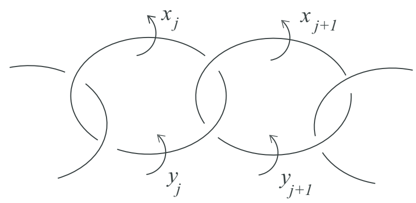

Рис. 6.

4.3.5. Случай $n = 2, k \geq 4$. Примеры даны в работе А. Ю. Веснина [32].

4.3.6. Случай $n = 3, k = 1$. Рассмотрим узел 5_2 с индексом 3 в сфере S^3. В результате получим орбифолд Гумберта типа $(3, 1)$. Этот орбифолд получается факторизацией гиперболического многообразия Фоменко — Матвеева — Викса по действию циклической группы автоморфизмов порядка три [30].

4.3.7. Случай $n = 3, k = 2$. Рассмотрим зацепление Уайтхеда с индексом 3 на каждой компоненте и сферой S^3 в качестве носителя. В результате получим орбифолд Гумберта типа $(3, 2)$. Следует отметить, что гиперболичность этого орбифолда впервые установлена в работе [28].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Greendlinger M.* On Dehn's algorithms for the conjugacy and word problems, with applications // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 641–677.

2. *Schupp P. E.* On Greendlinger's lemma // Comm. Pure Appl. Math. 1970. V. 23. P. 233–240.

3. *Fine B., Röhl F, Rosenberger G.* Two-generator subgroups of certain HNN groups // Combinatorial group theory (College Park, MD, 1988). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. P. 19–23. (Contemp. Math.; 109).

4. *Fine B., Röhl F, Rosenberger G.* On HNN-groups whose three-generator subgroups are free // Infinite groups and group rings (Tuscaloosa, AL, 1992). Ser. Algebra, 1. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1993. P. 13–36.

5. *Rosenberger G.* On free subgroups of generalized triangle groups // Алгебра и логика. 1989. V. 28, N 2. P. 152–161.

6. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

7. *Geometry* II. Encyclopaedia of mathematical sciences / E. B. Vinberg (Ed.). Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1993. V. 29.

8. *Thurston W. P.* Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 357–381.

9. *Scott G. P.* The geometry of 3-manifolds // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15. P. 401–487.

10. *Filipkiewicz R. P.* Four-dimensional geometries: Ph. D. Thesis. University of Warwick, 1984.

11. *Jones G., Singerman D.* Complex functions. An algebraic and geometric viewpoint. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.

12. *Maclachlan C.* Abelian groups of automorphisms of compact Riemann surfaces // Proc. London Math. Soc. 1965. V. 15, N 3. P. 699–712.

13. *Berge C.* Graphs and Hypergraphs. New York: Amer. Elsevier Publ. Comp., INC, 1976. (North-Holland Math. Library; V. 6).

14. *Hidalgo R. A., Rosenberger G.* Torsion free commutator subgroups of generalized Coxeter groups // Results Math. 2005. V. 48, N 1/2. P. 50–64.

15. *Humbert G.* Sur un complexe remarquable de coniques // J. Ecole Polyth. 1894. V. 64. P. 123–149.

16. *Hungerford T. W.* Algebra. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.

17. *The GAP Group.* GAP-Groups. Algorithms and programming. Version 4.4; 2006. (www.gap-system.org)

18. *Maclachlan C., Reid A. W.* The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 2002. (Graduate Texts in Math.; V. 219).

19. *Carocca A., González V., Hidalgo R. A., Rodríguez R.* On generalized Humbert curves // Israel J. Math. 2008. V. 64, N 2. P. 165–192.

20. *González-Diez G., Hidalgo R. A., Leyton M.* Generalized Fermat curves // J. Algebra. 2009. V. 321, N 6. P. 1643–1660.

21. *Haefliger A., Quach N. D.* Une presentation de groupe fundamental d'une orbifold // Asterisque. 1984. V. 116. P. 98–107.

22. *Weeks J.* SnapPea: a computer program for creating and studying hyperbolic 3-manifolds. Freely available from http://geometrygames.org/SnapPea/

23. *Mednykh A.* Three-dimensional hyperelliptic manifolds // Ann. Global Anal. Geom. 1990. V. 8, N 1. P. 13–19.

24. *Веснин А. Ю., Медных А. Д.* Трехмерные гиперэллиптические многообразия и гамильтоновы графы // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 745–763.

25. *Dunbar W.* Geometric orbifolds // Revista Matemática Complutense. 1988. V. 1, N 1–3. P. 67–99.

26. *Hodgson C.* Orb. A computer program for finding hyperbolic structures on 3-orbifolds and 3-manifolds. Freely available from http://www.ms.unimelb.edu.au/ cdh/comp.html

27. *Boileau M., Maillot S., Porti J.* Three-dimensional orbifolds and their geometric structures. Panoramas et Synthèses 15. Paris: Société Mathématique de France, 2003.

28. *Helling H., Kim A. C., Mennicke J. L.* Some honey-combs in hyperbolic 3-space // Comm. Algebra. 1995. V. 23, N 14?. P. 5169–5206.

29. *Mednykh A., Vesnin A. Yu.* Covering properties of small volume hyperbolic 3-manifolds // J. Knot Theory Ramifications. 1998. V. 7, N 3. P. 381–392.

30. *Mednykh A., Vesnin A. Yu.* Visualization of the isometry group action on the Fomenko–Matveev–Weeks manifold // J. Lie Theory. 1998. V. 8, N 1. P. 51–66.

31. *Chinburg T., Friedman E., Jones K., Reid A. W.* The arithmetic hyperbolic 3-manifold of smallest volume // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 2001. V. 30, N 1. P. 1–40.

32. *Vesnin A. Yu.* On hyperbolic π-orbifolds with arbitrary many singular components // Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universit'a di Trieste. 2007. V. 39. P. 375–386.

Статья поступила 5 июня 2008 г.

Идальго Рубен Антонио (Ruben Antonio Hydalgo)
Departamento de Matemáticas,
Universidad Técnica Federico Santa Maria, Valparaiso, Chile
ruben.hidalgo@usm.cl

Медных Александр Дмитриевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mednykh@math.nsc.ru