*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2010. Том 51, № 2*

*УДК 517.988*

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ $L_p$–ПРОСТРАНСТВАХ

**В. М. Каплицкий**

**Аннотация.** Показано, что классическая теорема Петре об интерполяции линейных операторов в весовых пространствах $L_p$ переносится на некоторые классы нелинейных операторов, содержащие, в частности, липшицевы операторы, а также близкие к ним по свойствам операторы, удовлетворяющие условиям менее ограничительным, чем липшицевость, в каждом из пространств банаховой пары.

**Ключевые слова:** нелинейный оператор, $K$-функционал, интерполяция.

## Введение

Хорошо известно, что одним из достоинств метода вещественной интерполяции, основанного на свойствах введенного Петре $K$-функционала, является возможность перенесения основных результатов этого метода, установленных в линейном случае, на некоторые классы нелинейных операторов, например, на класс липшицевых или гёльдеровых операторов. Соответствующие интерполяционные теоремы находят применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными (см. [1–7]) и в некоторых других задачах. Напомним предварительно некоторые основные понятия теории интерполяции линейных операторов. *Банаховой парой* называются два банаховых пространства $X_0$ и $X_1$, алгебраически и топологически вложенных в некоторое отделимое топологическое пространство $\mathscr{A}$. Пусть $X_0$ и $X_1$, $Y_0$ и $Y_1$ — две банаховы пары, причем $X_1 \subset X_0$, $Y_1 \subset Y_0$. Ограниченный линейный оператор $T$, действующий из пространства $X_0$ в пространство $Y_0$, называется *ограниченным оператором* из банаховой пары $(X_0, X_1)$ в банахову пару $(Y_0, Y_1)$, если сужение $T$ на пространство $X_1$ является ограниченным оператором из пространства $X_1$ в пространство $Y_1$. Пусть $X$, $Y$ — промежуточные банаховы пространства между $X_0$ и $X_1$, $Y_0$ и $Y_1$ соответственно, т. е. $X_1 \subset X \subset X_0$, $Y_1 \subset Y \subset Y_0$. Тройка $(X_0, X_1, X)$ называется *интерполяционной* относительно тройки $(Y_0, Y_1, Y)$, если всякий ограниченный линейный оператор $T$ из пары $(X_0, X_1)$ в пару $(Y_0, Y_1)$ отображает пространство $X$ в пространство $Y$. В этом случае оператор $T$ автоматически является ограниченным оператором из пространства $X$ в пространство $Y$, причем существует постоянная $c > 0$ (интерполяционная постоянная) такая, что

$$\|Tx\|_Y \leq c \max\{\|T\|_{X_0 \to Y_0}, \|T\|_{X_1 \to Y_1}\} \|x\|_X.$$

В ряде работ показано, что интерполяция свойства ограниченности возможна и для некоторых классов нелинейных операторов. При этом в основном изучался

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00329–а).

случай, когда промежуточные интерполяционные пространства $X$ и $Y$ такие, что $X_1 \subset X \subset X_0$ и $Y_1 \subset Y \subset Y_0$, совпадают с классическими пространствами $X_{\theta,q} = (X_0, X_1)_{\theta,q}$ и $Y_{\theta,q} = (Y_0, Y_1)_{\theta,q}$ вещественного $K$-метода Петре (обозначения см. в [1]), а на оператор $T$, действующий из банаховой пары $(X_0, X_1)$ в банахову пару $(Y_0, Y_1)$, накладывалось условие гёльдеровости, т. е. оператор $T$ должен быть гёльдеровым оператором из $X_0$ в $Y_0$ и из $X_1$ в $Y_1$:

$$\|Tx - Ty\|_{Y_i} \le M_i \|x - y\|_{X_i}^{\alpha_i} \quad \text{при } x, y \in X_i,$$

где $M_i > 0$, $\alpha_i > 0$ $(i = 0, 1)$.

В случае $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ получаем класс липшицевых операторов из пары $(X_0, X_1)$ в пару $(Y_0, Y_1)$. В работе Браудера [8] показано, что в этом случае $T : X \to Y$ и $\|Tx - Ty\|_{\mathscr{F}(Y_0,Y_1)} \le M \|x - y\|_{\mathscr{F}(X_0,X_1)}$ для любого функтора $\mathscr{F}$ вещественной интерполяции. Если сужение оператора $T$ на пространство $X_1$ удовлетворяет только лишь условию ограниченности:

$$\|Tx\|_{Y_1} \le M_1 \|x\|_{X_1} \quad \text{при } x \in X_1,$$

то в некоторых случаях, рассмотренных в работах [2, 3, 7, 9], удается доказать оценку $\|Tx\|_Y \le M \|x\|_X$, где пространства $X$ и $Y$ строятся одним из методов вещественной интерполяции. В [3] это доказано в случае, когда промежуточные пространства $X$ и $Y$ являются пространствами следов Лионса, введенные им в связи с некоторыми задачами теории дифференциальных уравнений [3], а в работе [2] в случае, когда пространства $X$ и $Y$ являются классическими промежуточными пространствами вещественного $K$-метода. В [2] рассматривалась также интерполяция локально гёльдеровых операторов, определенных на подмножестве $U$ в $X_0$. В этой работе получен, в частности, следующий результат. Пусть $X_1 \subset X_0$, $U$ — некоторое открытое множество в $X_0$, $T$ — некоторое нелинейное отображение из $U$ в $Y_0$, переводящее множество $U \cap X_1$ в $Y_1$ и удовлетворяющее условиям: для любой точки $x \in U$ существует такая ее окрестность $V \subset U$ в $X_0$, что для любой $y \in V \cap X_1$ справедливы оценки

$$\|Tx - Ty\|_{Y_0} \le \sigma \|x - y\|_{X_0}^{\alpha_0}, \quad \|Ty\|_{Y_1} \le \gamma\big(\|y\|_{X_1}^{\alpha_1} + 1\big),$$

где $\sigma, \gamma$ — константы, зависящие от $x$. Пусть $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, где $\theta \in (0,1)$ и $X_{\eta,r}$, $Y_{\theta,q}$ — промежуточные пространства вещественного $K$-метода с параметрами $\eta = \theta\frac{\alpha_1}{\alpha}, r = \alpha q$. Тогда $T$ переводит $U \cap X_{\eta,r}$ и $Y_{\theta,q}$. В работах [7, 9] получены результаты, близкие к результатам работ [2–4]; в некоторых случаях установлены более общие результаты с более точными оценками констант в интерполяционных неравенствах. В случае, когда $X_i$, $Y_i$, $X$ и $Y$ — весовые пространства $L_p$, т. е. $X_i = L_p(w_i)$, $Y_i = L_p(\widetilde{w}_i)$, $X = L_p(w)$, $Y = L_p(\widetilde{w})$, где $w_i$, $\widetilde{w}_i$ $(i = 0, 1)$, $w$ и $\widetilde{w}$ — весовые функции, известно необходимое и достаточное условие интерполяционности тройки $(X_0, X_1, X)$ относительно тройки $(Y_0, Y_1, Y)$, выраженное в терминах весов. Это условие на веса имеет вид

$$w = w_1 h\left(\frac{w_0}{w_1}\right), \quad \widetilde{w} = \widetilde{w}_1 h\left(\frac{\widetilde{w}_0}{\widetilde{w}_1}\right), \tag{1}$$

где $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — некоторая квазивогнутая функция. В настоящей работе этот результат Петре [6] перенесен на некоторые классы нелинейных операторов, удовлетворяющих условиям, аналогичным тем, которые вводились в работах [2, 3]. Кроме того, получаем интерполяционную теорему для оператора $T : U \to Y_0$ и в определенном смысле в симметричной ситуации, когда сужение $T$ на $U \cap X_1$

является липшицевым оператором из $U \cap X_1$ в $Y_1$, а оператор $T$ ограничен из $U$ в $Y_0$, где $U$ — некоторое подмножество в $X_0$, удовлетворяющее одному дополнительному условию (см. далее п. 1). Множество $U$, в частности, может совпадать со всем пространством $X_0$, с некоторым шаром с центром в нуле в пространстве $X_0$ или с порядковым интервалом, содержащим нуль. Отметим, что пространства $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ и $(Y_0, Y_1)_{\theta,p}$ $(0 < \theta < 1)$ совпадают с пространствами $L_p(w)$ и $L_p(\widetilde{w})$, где $w = w_0^\theta w_1^{1-\theta}$, $\widetilde{w} = \widetilde{w}_0^\theta \widetilde{w}_1^{1-\theta}$. Соответствующая квазивогнутая функция $h(t)$ из представления (1) в этом случае равна $t^\theta$, а интерполяционные теоремы, полученные в работе (в частном случае $U = X_0$), следуют из результатов работы [2]. В остальных случаях промежуточные интерполяционные между $L_p(w_0)$ и $L_p(w_1)$ весовые пространства $L_p(w)$ не совпадают с промежуточными пространствами вещественного $K$-метода и для получения интерполяционной оценки нужен более общий подход [6].

## 1. Оценки $K$-функционала пары $(L_p(w_0), L_p(w_1))$ и интерполяционные теоремы для нелинейных операторов

Пусть $(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство с мерой, $w : \Omega \to \mathbb{R}$ — измеримая функция такая, что $w(t) > 0$ п. в. Через $L_p^w(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(1 \le p < \infty)$ обозначим пространство, состоящее из всех измеримых функций $x(t)$, для которых функция $|x(t)|^p w^p(t)$ интегрируема, с нормой

$$\|x\|_{L_p^w(\Omega,\Sigma,\mu)} = \sqrt[p]{\int\limits_\Omega |x(t)|^p w^p(t)\, d\mu(t)}.$$

В случае $p = \infty$ соответствующее пространство $L_\infty^w(\Omega, \Sigma, \mu)$ состоит из измеримых функций $x(t)$ таких, что $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega} |x(t)|w(t) < +\infty$ и

$$\|x\|_{L_\infty^w(\Omega,\Sigma,\mu)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega} |x(t)|w(t).$$

Далее для краткости будем применять обозначение $L_p(w) = L_p^w(\Omega, \Sigma, \mu)$.

По теореме Петре тройка $(L_p(w_0), L_p(w_1), L_p(w))$ интерполяционна относительно тройки $(L_p(\widetilde{w}_0), L_p(\widetilde{w}_1), L_p(\widetilde{w}))$ тогда и только тогда, когда

$$w = w_1 h\left(\frac{w_0}{w_1}\right), \quad \widetilde{w} = \widetilde{w}_1 h\left(\frac{\widetilde{w}_0}{\widetilde{w}_1}\right),$$

где $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ квазивогнутая, т. е.

$$\frac{1}{c} k(t) \le h(t) \le c k(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

где $c > 0$ — некоторая постоянная, а $k$ — вогнутая функция. В этом случае говорят, что функции $h(t)$ и $k(t)$ *эквивалентны*, и пишут $h(t) \sim k(t)$. Далее нам понадобится характеризация квазивогнутых функций (см. [1]).

**Предложение 1.1.** *Положительная функция $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ квазивогнута тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

1) *существует постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\frac{h(t)}{h(s)} \le c \max\left\{1, \frac{t}{s}\right\}; \tag{1.1}$$

2) *$h(t) \sim \alpha + \beta t + \int\limits_0^{+\infty} \min(\tau, t)\, dm(\tau)$, где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $m(t)$ — возрастающая ограниченная сверху функция такая, что*

$$\lim_{t \to +0} tm(t) = 0. \tag{1.2}$$

Кроме того, известно, что если выполнено неравенство (1.1), то существует вогнутая функция $k(t)$ (наименьшая вогнутая мажоранта функции $h(t)$) такая, что

$$h(t) \leq k(t) \leq ch(t)$$

где $c$ — константа из неравенства (1.1). При этом вогнутая функция $k(t)$ допускает представление

$$k(t) = \alpha + \beta t + \int\limits_0^{+\infty} \min(\tau, t)\, dm(\tau),$$

где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, а функция $m(t)$ удовлетворяет условию (1.2).

Пусть $L_0 = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — множество всех измеримых функций $x : \Omega \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что множество $U \subset L_0$ *удовлетворяет условию* (S), если из условий $x(t) \in U$, $\theta(t) \in L_0$ и $0 \leq \theta(t) \leq 1$ следует, что $\theta(t)x(t) \in U$. Примерами множеств, удовлетворяющих этому условию, являются шар пространства $L_p(w)$ с центром в нуле, любой порядковый интервал $[x_0, x_1] = \{x \in L_0 : x_0(t) \leq x(t) \leq x_1(t)\}$ при условии, что $0 \in [x_0, x_1]$, а также конус $L_0^+$ неотрицательных функций в $L_0$.

**Теорема 1.1.** *Пусть $X_i = L_p(w_i)$, $Y_i = L_p(\widetilde{w}_i)$ $(i = 0, 1)$, $X = L_p(w)$, $Y = L_p(\widetilde{w})$, $1 \leq p < \infty$, причем $X_1 \subset X \subset X_0$, $Y_1 \subset Y \subset Y_0$. Пусть банахова тройка $(X_0, X_1, X)$ интерполяционна относительно банаховой тройки $(Y_0, Y_1, Y)$, множество $U \subset X_0$ удовлетворяет условию (S), оператор $T : U \to Y_0$ переводит множество $U \cap X_1$ в $Y_1$ и удовлетворяет условиям:*

$$\|Tx - Ty\|_{Y_0} \leq M_0 \|x - y\|_{X_0} \quad \text{при } x, y \in U,$$

$$\|Tx\|_{Y_1} \leq M_1(\|x\|_{X_1} + 1) \quad \text{при } x \in U \cap X_1,$$

*где $M_i$ $(i = 0, 1)$ — некоторые положительные постоянные.*

*Тогда $T$ действует из $U \cap X$ в $Y$ и существует постоянная $c = c(w_0, w_1, w, \widetilde{w}_0, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}) > 0$ такая, что*

$$\|Tx\|_Y \leq c \max\{M_0, M_1\}(\|x\|_X + 1) \quad \text{при } x \in U \cap X.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $X_1$ нормально вложено в $X_0$, т. е. $\|x\|_{X_0} \leq \|x\|_{X_1}$ при $x \in X_1$. Пусть $S(x) = T(x) - T(0)$, $x \in X_0$. Тогда $S(0) = 0$ и справедливы оценки:

$$\|S(x) - S(y)\|_{Y_0} \leq M_0 \|x - y\|_{X_0} \quad \text{при } x, y \in U,$$

$$\|S(x)\|_{Y_1} \leq M_1(\|x\|_{X_1} + 2) \quad \text{при } x \in U \cap X_1.$$

Рассмотрим $p$-функционал Петре пары $(X_0, X_1)$:

$$K_p(t, x; X_0, X_1) = \inf_{\substack{x = x_0 + x_1,\\ x_i \in X_i}} \left(\|x_0\|_{X_0}^p + t^p \|x_1\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $x \in U \cap X_1$ и $0 < t < 1$. Тогда

$$
\begin{aligned}
K_p(t, S(x); Y_0, Y_1) = \inf_{\substack{S(x)=y_0+y_1,\\ y_i \in Y_i}} \big(\|y_0\|^p_{Y_0} + t^p \|y_1\|^p_{Y_1}\big)^{\frac{1}{p}} \\
\le \inf_{y \in X_1 \cap U} \big(\|S(x) - S(y)\|^p_{Y_0} + t^p \|S(y)\|^p_{Y_1}\big)^{\frac{1}{p}} \\
\le \inf_{y \in X_1 \cap U} \big(M_0^p \|x - y\|^p_{X_0} + t^p M_1^p (\|y\|_{X_1} + 2)^p\big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Так как $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ при $p \ge 1$, $a \ge 0$, $b \ge 0$, то

$$
K_p(t, S(x);\, Y_0, Y_1) \le c_0 \max\{M_0, M_1\} \inf_{y \in X_1 \cap U} \big(\|x - y\|^p_{X_0} + t^p \|y\|_{X_1} + t^p\big),
$$

где $c_0$ — абсолютная постоянная. Используя неравенство $(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \le (a+b)$, где $p \ge 1$, $a \ge 0$, $b \ge 0$, получим

$$
K_p(t, S(x); Y_0, Y_1) \le c_0 \max\{M_0, M_1\} \big(K_p^U(t, x;\, X_0, X_1) + t\big),
$$

где $K_p^U(t, x; X_0, X_1) = \inf\limits_{y \in X_1 \cap U} \big(\|x - y\|^p_{X_0} + t^p \|y\|^p_{X_1}\big)^{\frac{1}{p}}$.

Пусть $t \ge 1$. Тогда

$$
K_p(t, S(x); Y_0, Y_1) \le \|S(x)\|_{Y_0},
$$

так как пара $y_0 = S(x)$, $y_1 = 0$ входит в множество, по которому берется инфимум, и $S(0) = 0$. Поэтому при $t \ge 1$ имеем $K_p(t, S(x); Y_0, Y_1) \le M_0 \|x\|_{X_0}$. При $t \ge 1$ справедлива оценка

$$
t\|x\|_{X_1} \ge \|x\|_{X_1} \ge \|x\|_{X_0},
$$

из которой следует, что

$$
\begin{aligned}
K_p^U(t, x;\, X_0, X_1) \ge \inf_{y \in X_1 \cap U} \big(\|x - y\|^p_{X_0} + \|y\|^p_{X_0}\big)^{\frac{1}{p}} \\
\ge 2^{\frac{1}{p} - 1} \inf_{y \in X_1 \cap U} (\|x - y\|_{X_0} + \|y\|_{X_0}) \ge \frac{1}{2} \|x\|_{X_0},
\end{aligned}
$$

$$
K_p(t, S(x);\, Y_0, Y_1) \le 2 M_0 K_p^U(t, x; X_0, X_1).
$$

Таким образом, для любого $t > 0$ справедлива оценка

$$
K_p(t, S(x); Y_0, Y_1) \le c_0 \max\{M_0, M_1\} \big(K_p^U(t, x; X_0, X_1) + \min(1, t)\big). \tag{1.3}
$$

Если $x \in U \cap X_1$, то функция

$$
y_0(\tau) = \theta(\tau) x(\tau), \quad \theta(\tau) = \frac{w_0(\tau)}{w_0(\tau) + t w_1(\tau)},
$$

принадлежит $U$ в силу того, что множество $U$ обладает свойством (S), а $0 \le \theta(\tau) \le 1$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
\big[K_p^U(t, x; X_0, X_1)\big]^p \le \|x - y_0\|^p_{L_p(w_0)} + t^p \|y_0\|^p_{L_p(w_1)} \\
= \int\limits_\Omega |x(\tau)|^p \big((1 - \theta(\tau))^p w_0^p(\tau) + t^p \theta^p(\tau) w_1^p(\tau)\big)\, d\mu(\tau).
\end{aligned}
$$

Так как $1-\theta(\tau)=\frac{tw_1(\tau)}{w_0(\tau)+tw_1(\tau)}$, то

$$\bigl[K_p^U(t,x;\,X_0,X_1)\bigr]^p\le\int\limits_\Omega|x(\tau)|^p\frac{t^pw_0^p(\tau)w_1^p(\tau)}{(w_0(\tau)+tw_1(\tau))^p}\,d\mu(\tau).$$

Поскольку $\frac{tw_0w_1}{w_0+tw_1}\le\min\{w_0,tw_1\}$, имеем оценку

$$K_p^U(t,x;X_0,X_1)\le\|x\|_{L_p(w_t)},$$

где $w_t(\tau)=\min\{w_0(\tau),tw_1(\tau)\}$.

Известно (см. [1, с. 150–151]), что $K_p(t,x;L_p(w_0),L_p(w_1))=\|x\|_{L_p(v_t)}$, где

$$v_t^p(w_0,w_1)=\inf_{y_0+y_1=1}\bigl(|y_0|^pw_0^p+t^p|y_1|^pw_1^p\bigr).$$

Вычисление соответствующего инфимума приводит к неравенству

$$\frac12\|x\|_{L_p(w_t)}\le K_p(t,x;L_p(w_0),L_p(w_1))\le\|x\|_{L_p(w_t)},\tag{1.4}$$

поэтому из (1.3) следует, что при $x\in U\cap X_1$ справедливо неравенство

$$K_p(t,S(x);Y_0,Y_1)\le c_1M(K_p(t,x;X_0,X_1)+\min(1,t)),\tag{1.5}$$

где $M=\max\{M_0,M_1\}$ и $c_1>0$ — абсолютная постоянная.

Пусть $g(t)$ — некоторая вогнутая функция и

$$g(t)=\alpha+\beta t+\int\limits_0^{+\infty}\min(\tau,t)\,dm(\tau),\tag{1.6}$$

где $\alpha\ge0$, $\beta\ge0$, а функция $m(t)$ удовлетворяет условиям предложения 1.1. Пусть $\mathscr M$ — множество измеримых неотрицательных функций $x:\mathbb R^+\to\mathbb R^+$ таких, что существуют пределы $\lim\limits_{\tau\to0}\frac{x(\tau)}{\tau}$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}x(\tau)$ и $\int\limits_0^{+\infty}x^p(\tau)\,dm(\tau^p)<+\infty$, где $m(t)$ — функция из представления (1.6). Определим на $\mathscr M$ функционал

$$\Phi_g(x)=\left(\alpha\lim_{\tau\to0}\left(\frac{x(\tau)}{\tau}\right)^p+\beta\lim_{\tau\to\infty}x^p(\tau)+\int\limits_0^{+\infty}x^p(\tau)\,dm(\tau^p)\right)^{\frac1p}.\tag{1.7}$$

Очевидно, что $\Phi_g(\lambda x)=\lambda\Phi_g(x)$, $\Phi_g(x+y)\le\Phi_g(x)+\Phi_g(y)$ при $x,y\in\mathscr M$, $\lambda\ge0$.

Покажем, что при $x\in L_p(w_1)$ справедливо соотношение

$$\Phi_g(K_p(\tau,x;L_p(w_0),L_p(w_1)))\sim\|x\|_{L_p(w_1g^*(\frac{w_0}{w_1}))},\tag{1.8}$$

где $g^*(t)=\sqrt[p]{g(t^p)}$. Эквивалентность в (1.8) и везде далее понимается как существование постоянных $c_1,c_2>0$, зависящих только от весов, таких, что

$$c_1\|x\|_{L_p(w_1g^*(\frac{w_0}{w_1}))}\le\Phi_g(K_p(t,x;L_p(w_0),L_p(w_1)))\le c_2\|x\|_{L_p(w_1g^*(\frac{w_0}{w_1}))}$$

при всех $t>0$. Имеем

$$\int\limits_0^{+\infty}K_p^p(\tau,x;\,L_p(w_0),L_p(w_1))\,dm(\tau^p)\sim\int\limits_0^{+\infty}dm(\tau^p)\int\limits_\Omega\min\bigl(w_0^p(s),\tau^pw_1^p(s)\bigr)\,d\mu(s)$$

$$=\int\limits_\Omega|x(s)|^pw_1^p(s)\,d\mu(s)\int\limits_0^{+\infty}\min\left(\tau^p,\left(\frac{w_0(s)}{w_1(s)}\right)^p\right)\,d\mu(\tau^p)$$

в силу теоремы Фубини. Кроме того,

$$\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{K_p(\tau,x)}{\tau}\right)^p = \lim_{\tau\to 0}\int\limits_\Omega |x(s)|^p \min\left(\frac{w_0^p(s)}{\tau^p}, w_1^p(s)\right)\,d\mu(s)$$
$$= \int\limits_\Omega |x(s)|^p w_1^p(s)\,d\mu(s),$$

$$\lim_{\tau\to\infty}(K_p(\tau,x))^p = \lim_{\tau\to\infty}\int\limits_\Omega |x(s)|^p \min\bigl(w_0^p(s), \tau^p w_1^p(s)\bigr)\,d\mu(s)$$
$$= \int\limits_\Omega |x(s)|^p w_0^p(s)\,d\mu(s),$$

поскольку

$$\lim_{\tau\to 0}\min\left(\frac{w_0^p(s)}{\tau^p}, w_1^p(s)\right) = w_1^p(s), \quad \lim_{\tau\to\infty}\min\bigl(w_0^p(s), \tau^p w_1^p(s)\bigr) = w_0^p(s) \text{ п. в.},$$

а предельный переход под знаком интегралов (при условии $x \in L_p(w_1)$) возможен в силу мажорантной теоремы Лебега.

Из этих формул следует, что

$$\Phi_g^p(K_p(\tau,x;L_p(w_0),L_p(w_1)))$$
$$\sim \int\limits_\Omega |x(s)|^p\left\{\alpha w_1^p(s) + \beta w_0^p(s) + \int\limits_0^{+\infty}\min\bigl(w_1^p(s)\tau^p, w_0^p(s)\bigr)\,d\mu(\tau^p)\,d\mu(s)\right\}$$
$$= \int\limits_\Omega |x(s)|^p w_1^p(s) g\left(\frac{w_0^p(s)}{w_1^p(s)}\right)\,d\mu(s),$$

где $g(t) = \alpha + \beta t + \int\limits_0^{+\infty}\min(\tau^p, t)\,dm(\tau^p) = \alpha + \beta t + \int\limits_0^{+\infty}\min(\tau, t)\,dm(\tau)$, т. е.

$$\Phi_g(K_p(\tau,x;L_p(w_0),L_p(w_1))) \sim \|x\|_{L_p(w_1 g^*(\frac{w_0}{w_1}))},$$

где $g^*(t) = \sqrt[p]{g(t^p)}$.

Поскольку тройка $(L_p(w_0), L_p(w_1), L_p(w))$ интерполяционна относительно тройки $(L_p(\widetilde{w}_0), L_p(\widetilde{w}_1), L_p(\widetilde{w}))$, существует квазивогнутая функция $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что $w = w_1 h\bigl(\frac{w_0}{w_1}\bigr)$, $\widetilde{w} = \widetilde{w}_1 h\bigl(\frac{\widetilde{w}_0}{\widetilde{w}_1}\bigr)$.

Положим $h_*(t) = [h(t^{\frac{1}{p}})]^p$. Так как функция $h(t)$ квазивогнута, то

$$\frac{h(t)}{h(s)} \le c\max\left\{1, \frac{t}{s}\right\},$$

где $c = c(h) > 0$ — некоторая постоянная. Поскольку

$$\frac{h_*(t)}{h_*(s)} \le c\max\left\{1, \frac{t}{s}\right\},$$

то из предложения 1.1 следует, что функция $h_*(t)$ также квазивогнута. Пусть $k_*(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта $h_*(t)$. Тогда

$$k_*(t) = \alpha_1 + \beta_1 t + \int\limits_0^{+\infty}\min(\tau, t)\,dm_1(\tau),$$

где $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $m_1(t)$ — возрастающая ограниченная сверху функция, удовлетворяющая условию (1.2). Так как

$$h_*(t) \leq k_*(t) \leq ch_*(t),$$

имеем

$$[k_*(t^p)]^{\frac{1}{p}} \leq c[h_*(t^p)]^{\frac{1}{p}} = ch(t), \quad [k_*(t^p)]^{\frac{1}{p}} \geq [h_*(t^p)]^{\frac{1}{p}} = h(t),$$

поэтому из формулы (1.8) следует, что

$$\|x\|_{L_p(w_1 h(\frac{w_0}{w_1}))} \leq \Phi_{k_*}(K_p(\tau, x; X_0, X_1)) \leq c\|x\|_{L_p(w_1 h(\frac{w_0}{w_1}))}.$$

Далее, учитывая свойства функционала $\Phi_{k_*}$, получим

$$\Phi_{k_*}(K_p(\tau, S(x); Y_0, Y_1)) \leq c_1 M(\Phi_{k_*}(K_p(\tau, x; X_0, X_1)) + \Phi_{k_*}(\min(1, \tau))). \tag{1.9}$$

Из неравенства (1.9) следует, что

$$\|S(x)\|_{L_p(\widetilde{w}_1 h(\frac{\widetilde{w}_0}{\widetilde{w}_1}))} \leq c_2 M(\|x\|_{L_p(w_1 h(\frac{w_0}{w_1}))} + d),$$

где $d = \Phi_{k_*}(\min(1,\tau)) = \left(\alpha_1 \lim\limits_{\tau\to 0}\left(\frac{f_1(\tau)}{\tau}\right)^p + \beta_1 \lim\limits_{\tau\to\infty} f_1^p(\tau) + \int\limits_0^{+\infty} f_1^p(\tau)\, dm_1(\tau)\right)^{\frac{1}{p}}$, $f_1(\tau) = \min(1,\tau)$.

Так как

$$d = \left(\alpha_1 + \beta_1 + \int\limits_0^{+\infty} \min(1,\tau^p) dm_1(\tau^p)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \max\left\{1,\ \alpha_1 + \beta_1 + \int\limits_0^{+\infty} \min(1,\tau)\, dm_1(\tau)\right\}$$

при всех $p \geq 1$, то

$$\|S(x)\|_{L_p(\widetilde{w})} \leq c_3 \max\{M_0, M_1\}(\|x\|_{L_p(w)} + 1),$$

где постоянная $c_3 > 0$ зависит только от весов $w_0, w_1, w, \widetilde{w}_0, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}$. Поскольку $S(x) = T(x) - T(0)$ и $L_p(\widetilde{w}_1) \subset L_p(\widetilde{w})$, то $\|T(0)\|_{L_p(\widetilde{w})} \leq \tilde{k}\|T(0)\|_{L_p(\widetilde{w}_1)} \leq \widetilde{k} M_1$ и соответственно

$$\|T(x)\|_{L_p(\widetilde{w})} \leq c_4 \max\{M_0, M_1\}(\|x\|_{L_p(w)} + 1) \tag{1.10}$$

при $x \in U \cap X_1$, где $c_4 > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от весов $w_0$, $w_1$, $w$, $\widetilde{w}_0$, $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}$. Осталось показать, что оценка (1.10) справедлива при всех $x \in U \cap X$.

Пусть $x \in U \cap X$. Положим $x_N(t) = \theta_N(t)x(t)$, где

$$\theta_N(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x(t)|w_1(t) \leq N, \\ 0, & \text{если } |x(t)|w_1(t) > N. \end{cases} \tag{1.11}$$

Тогда $x \in U \cap X_1$, поскольку множество $U$ удовлетворяет условию (S). Так как $x_N \longrightarrow x$ п. в. и $|x_N(t)| \leq |x(t)|$, то $x_N \overset{L_p(w_0)}{\to} x$, а значит, $T(x_N) \overset{L_p(\widetilde{w}_0)}{\to} T(x)$. Отсюда следует, что найдется подпоследовательность $T(x_{k(N)})(x)$ такая, что $T(x_{k(N)}) \longrightarrow T(x)$ п. в. Так как

$$\|T(x_{k(N)})\|_{L_p(\widetilde{w})} \leq c_4 M(\|x\|_{L_p(w)} + 1),$$

где $c_4 = c_4(w_0, w_1, w, \widetilde{w}_0, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}) > 0$, из теоремы Фату следует, что неравенство (1.10) выполняется при всех $x \in U \cap X$. Теорема доказана.

**Теорема 1.2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *и оператор* $T$ *удовлетворяет условиям:*

$$\|Tx - Ty\|_{Y_0} \le M_0\|x - y\|_{X_0} \quad \text{при } x, y \in U;$$

$$\|Tx\|_{Y_1} \le M_1\|x\|_{X_1} \quad \text{при } x \in U \cap X_1.$$

*Тогда* $T$ *действует из* $U \cap X$ *в* $Y$ *и найдется постоянная* $c = c(w_0, w_1, w, \widetilde{w}_0, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}) > 0$ *такая, что*

$$\|Tx\|_Y \le c \max\{M_0, M_1\}\|x\|_{X_1} \quad \text{при } x \in U \cap X.$$

Доказательство. Как видно из доказательства теоремы 1.1, при выполнении сформулированных условий теоремы для $K_p$-функционалов пар $(X_0, X_1)$ и $(Y_0, Y_1)$ будет справедлива следующая, более сильная, чем (1.5), оценка:

$$K_p(t, Tx; Y_0, Y_1) \le c_1 \max\{M_0, M_1\} K_p(t, Tx; X_0, X_1)$$

при $x \in U \cap X_1$. Повторив те же рассуждения, что и при выводе теоремы 1.1, из этой оценки получим

$$\|Tx\|_Y \le c \max\{M_0, M_1\}\|x\|_X \quad \text{при } x \in U \cap X.$$

Теорема доказана.

Замечание. В случае $U = X_0$, $X = (X_0, X_1)_{\theta,p}$, $Y = (Y_0, Y_1)_{\theta,p}$ этот результат следует из [2]. В частном случае, когда $T$ — липшицев оператор из $X_i$ в $Y_i$ $(i = 0, 1)$, т. е.

$$\|Tx - Ty\|_{Y_i} \le M_i\|x - y\|_{X_i} \quad \text{при } x, y \in X_i,$$

утверждение теоремы следует из более общих результатов Браудера [8].

Сформулируем симметричную версию теоремы 1.1 в случае, когда оператор $T : U \longrightarrow Y_0$ непрерывен на $U$, а его сужение на $U \cap X_1$ удовлетворяет условию Липшица, где $U$ — множество, удовлетворяющее условию (S).

**Теорема 1.3.** *Пусть пространства* $X_i$, $Y_i$ $(i = 0, 1)$, $X$ *и* $Y$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1. *Пусть множество* $U \subset X_0$ *удовлетворяет условию* (S) *и оператор* $T : U \to Y_0$ *непрерывен на* $U$. *Пусть оператор* $T$ *переводит множество* $U \cap X_1$ *в* $Y_1$ *и удовлетворяет условиям:*

$$\|Tx\|_{Y_0} \le M_0\|x\|_{X_0} \quad \text{при } x \in U,$$

$$\|Tx - Ty\|_{Y_1} \le M_1\|x - y\|_{X_1} \quad \text{при } x, y \in U \cap X_1,$$

*где* $M_i > 0$ $(i = 0, 1)$ — *некоторые постоянные.*

*Тогда* $T$ *действует из* $U \cap X$ *в* $Y$ *и существует постоянная* $c = c(w_0, w_1, w, \widetilde{w}_0, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}) > 0$ *такая, что*

$$\|Tx\|_Y \le c \max\{M_0, M_1\}\|x\|_X \quad \text{при } x \in U \cap X.$$

*Если* $U \subset X_1$, $T : U \to Y_1$ — *любой оператор, удовлетворяющий сформулированным выше условиям, то*

$$\|Tx\|_Y \le c \max\{M_0, M_1\}\|x\|_X \quad \text{при } x \in U.$$

Доказательство. Будем действовать по той же схеме, которая использована выше. Пусть $x \in U \cap X_1$. Тогда из условий теоремы следует оценка

$$K_p(t, T(x); Y_0, Y_1) = \inf_{y \in U \cap X_1} \left(\|T(y)\|_{Y_0}^p + t^p \|T(x) - T(y)\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \max\{M_0, M_1\} \inf_{y \in U \cap X_1} \left(\|y\|_{X_0}^p + t^p \|x - y\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Полагая $y = y_0 = \theta x$, где $\theta(\tau) = \frac{tw_1(\tau)}{w_0(\tau)+tw_1(\tau)}$ ($y_0 \in U$, так как множество $U$ удовлетворяет условию (S)), получим

$$K_p^p(t, T(x); Y_0, Y_1) \le \int_\Omega |x(\tau)|^p \left(\theta^p(\tau)^p w_0^p(\tau) + t^p (1 - \theta(\tau))^p w_1^p(\tau)\right) d\mu(\tau)$$
$$= \int_\Omega |x(\tau)|^p \frac{t^p w_0^p(\tau) w_1^p(\tau)}{(w_0(\tau) + tw_1(\tau))^p}\, d\mu(\tau) \le K_p^p(t, x; X_0, X_1), \qquad (1.12)$$

так как $\frac{tw_0w_1}{w_0+tw_1} \le \min(w_0, tw_1)$, а для $K_p$-функционала пары $(L_p(w_0), L_p(w_1))$ справедливы оценки (1.4). Из (1.12) обычным образом выводится оценка

$$\|Tx\|_{L_p(\widetilde{w}_1 h(\frac{\widetilde{w}_0}{\widetilde{w}_1}))} \le c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_{L_p(w_1 h(\frac{w_0}{w_1}))}$$

при $x \in U \cap X_1$, где $h$ — квазивогнутая функция. Из условий теоремы следует, что найдется квазивогнутая функция $h$ такая, что $w = w_1 h\left(\frac{w_0}{w_1}\right)$, $\widetilde{w} = \widetilde{w}_1 h\left(\frac{\widetilde{w}_0}{\widetilde{w}_1}\right)$, поэтому

$$\|Tx\|_{L_p(\widetilde{w})} \le c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_{L_p(w)} \quad \text{при } x \in U \cap X_1. \qquad (1.13)$$

Если $x \in U \cap X$, то положим $x_N(t) = \theta_N(t) x(t)$, где функция $\theta_N$ определяется формулой (1.11). Тогда $x_N \in U \cap X_1$, $x_N \longrightarrow x$ п. в. и $|x_N(t)| \le |x(t)|$, откуда следует, что $x_N \xrightarrow{L_p(w)} x$, а значит, $x_N \xrightarrow{L_p(w_0)} x$ и $T(x_N) \xrightarrow{L_p(\widetilde{w}_0)} T(x)$.

Пусть $T(x_{k(N)})$ — подпоследовательность $T(x_N)$, сходящаяся п. в. Тогда

$$\|T(x_{k(N)})\|_{L_p(\widetilde{w})} \le c \|x_{k(N)}\|_{L_p(w)} \le c \|x\|_{L_p(w)}$$

и из теоремы Фату получаем, что $T(x) \in L_p(\widetilde{w})$ и неравенство (1.15) справедливо при всех $x \in U \cap X$. Вторая часть утверждения теоремы непосредственно следует из (1.12). Теорема доказана.

Замечание. Если одно из условий теоремы 1.3 заменить более слабым условием:

$$\|Tx\|_{Y_0} \le M_0(\|x\|_{X_0} + 1) \quad \text{при } x \in U,$$

то метод доказательства, изложенный выше, не работает. В связи с некоторыми приложениями было бы интересно найти условия на множество $U$, при которых в этом случае справедлива оценка, аналогичная оценке из теоремы 1.3, т. е.

$$\|Tx\|_Y \le c \max\{M_0, M_1\}(\|x\|_X + 1) \quad \text{при } x \in U \cap X.$$

## 2. Нелинейная интерполяция в весовых пространствах числовых последовательностей

В случае дискретной меры $\mu$ при некотором дополнительном условии на веса утверждения теорем предыдушего пункта справедливы при $1 \le p \le \infty$. Поскольку случай $p = \infty$ может быть важным для приложений, дадим здесь подробное доказательство. Отметим, что и в линейном случае при рассмотрении интерполяции с изменением меры в случае общих мер приходится вводить ограничение $p < \infty$ (см. [10, гл. II, п. 8]).

**Теорема 2.1.** *Пусть* $l_p(w_1) \subset l_p(w) \subset l_p(w_0)$, $l_p(\widetilde{w}_1) \subset l_p(\widetilde{w}) \subset l_p(\widetilde{w}_0)$, $1 \le p \le \infty$, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_0(n)}{w(n)} = 0.$$

*Пусть банахова тройка* $(l_p(w_0), l_p(w_1), l_p(w))$ *интерполяционна относительно банаховой тройки* $(l_p(\widetilde{w}_0), l_p(\widetilde{w}_1), l_p(\widetilde{w}))$ *и множество* $U \subset l_p(w_0)$ *удовлетворяет условию* (S). *Пусть оператор* $T : U \to l_p(\widetilde{w}_0)$ *переводит множество* $U \cap l_p(w_1)$ *в* $l_p(\widetilde{w}_1)$ *и удовлетворяет условиям*

$$\|Tx - Ty\|_{l_p(\widetilde{w}_0)} \le M_0\|x - y\|_{l_p(w_0)} \quad \text{при } x, y \in U,$$

$$\|Tx\|_{l_p(\widetilde{w}_1)} \le M_1(\|x\|_{l_p(w_1)} + 1) \quad \text{при } x \in U \cap X_1,$$

*где* $M_i > 0$ $(i = 0, 1)$ *— некоторые постоянные.*

*Тогда* $T$ *действует из* $U \cap l_p(w)$ *в* $l_p(\widetilde{w})$ *и существует постоянная* $c = c(w_0, w_1, w, \widetilde{w}_0, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}) > 0$ *такая, что*

$$\|Tx\|_{l_p(\widetilde{w})} \le c \max\{M_0, M_1\}(\|x\|_{l_p(w)} + 1) \quad \text{при } x \in U \cap l_p(w).$$

Доказательство. В случае $1 \le p < \infty$ утверждение теоремы доказано выше. Рассмотрим случай $p = \infty$. Без ограничения общности можно принять, что $l_\infty \subset l_\infty(w_1) \subset l_\infty(w_0)$, поскольку общий случай можно привести к этому при помощи диагонального преобразования. Так как

$$\|x\|_{l_\infty(a)} = \sup_n |x(n)|a(n) \le \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p a^p(n)} = \|x\|_{l_p(a)}$$

при $x \in l_p(a)$ и всех $p \ge 1$, то

$$\|Tx - Ty\|_{l_\infty(\widetilde{w}_0)} \le M_0\|x - y\|_{l_p(w_0)} \quad \text{при } x, y \in U \cap l_\infty,$$

$$\|Tx\|_{l_\infty(\widetilde{w}_1)} \le M_1(\|x\|_{l_p(w_1)} + 1) \quad \text{при } x \in U \cap l_\infty$$

при всех $p \ge 1$. Здесь мы воспользовались тем, что $U \cap l_\infty \subset U \cap l_p(w_i)$ $(i = 0, 1)$, так как $l_\infty \subset l_\infty(w_1) \subset l_\infty(w_0)$.

Действуя так же, как и при доказательстве теоремы 1.1, получим оценку

$$K_p(t, S(x); l_\infty(\widetilde{w}_0), l_\infty(\widetilde{w}_1)) \le c_1 \max\{M_0, M_1\}(K_p(t, x; l_\infty(w_0), l_\infty(w_1)) + \min(1, t)),$$

где $S(x) = T(x) - T(0)$, $x \in U \cap l_\infty$ и $c_1 > 0$ — некоторая абсолютная постоянная.

Пусть $w = w_1 h\big(\frac{w_0}{w_1}\big)$, $\widetilde{w} = \widetilde{w}_1 h\big(\frac{\widetilde{w}_0}{\widetilde{w}_1}\big)$, где $h$ — квазивогнутая функция. Пусть $h_*(t) = [h(t^{\frac{1}{p}})]^p$ и

$$h_*(t) \sim k_*(t) = \alpha_1 + \beta_1 t + \int_0^{+\infty} \min(\tau, t)\, dm_1(\tau).$$

Здесь $k_*(t)$ — наименьшая вогнутая мажоранта функции $h_*(t)$. Далее нам понадобится оценка

$$h_*(t) \le k_*(t) \le c h_*(t),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от $p$ (см. выше).

Пусть $\Phi_{k_*}$ — соответствующий функции $k_*$ функционал, определенный формулой (1.7) при $g = k_*$. Тогда, как показано выше, существует постоянная $c_1 > 0$, не зависящая от $p$, такая, что

$$\Phi_{k_*}(K_p(\tau, S(x);\, l_\infty(\widetilde{w}_0), l_\infty(\widetilde{w}_1))) \\ \leq c_1 \max\{M_0, M_1\}(\Phi_{k_*}(K_p(\tau, x; l_\infty(w_0), l_\infty(w_1))) + 1) \quad (2.1)$$

при всех $x \in l_\infty(w_1)$, а значит, в частности, при всех $x \in l_\infty$. Так как $(a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{2}(a + b)$ при $p \geq 1$, то

$$K_p(t, x; X_0, X_1) = \inf_{\substack{X = X_0 + X_1, \\ x_i \in X_i}} \left(\|x_0\|^p_{X_0} + t^p \|x_1\|^p_{X_1}\right)^{\frac{1}{p}} \\ \geq \frac{1}{2} \inf_{\substack{X = X_0 + X_1, \\ x_i \in X_i}} (\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}) = \frac{1}{2} K(t, x; X_0, X_1).$$

Нетрудно видеть, что для $K$-функционала пары $(l_\infty(w_0), l_\infty(w_1))$ имеет место формула

$$K(t, x; l_\infty(w_0), l_\infty(w_1)) = \|x\|_{l_\infty(\min(w_0,\, tw_1))},$$

поэтому из (1.12) следует, что

$$\Phi_{k_*}(u(\tau, S(x))) \leq 2c_1 M(\|x\|_{l_\infty(w)} + 1),$$

где $u(\tau, x) = \|x\|_{l_\infty(\min(\widetilde{w}_0,\, \tau\widetilde{w}_1))}$.

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|x\|_{l_\infty(\min(\widetilde{w}_0,\, \tau\widetilde{w}_1))} \geq |x(n_0)| \min(\widetilde{w}_0(n_0),\, \tau\widetilde{w}_1(n_0)),$$

откуда вытекает оценка

$$|S(x)(n_0)| \Phi_{k_*}(\min(\widetilde{w}_0(n_0),\, \tau\widetilde{w}_1(n_0))) \leq 2c_1 M(\|x\|_{l_p(w)} + 1).$$

Несложное вычисление показывает, что

$$\Phi^p_{k_*}(\min(\widetilde{w}_0(n_0),\, \tau\widetilde{w}_1(n_0))) = \alpha_1 \widetilde{w}^p_1(n_0) + \beta_1 \widetilde{w}^p_0(n_0) \\ + \widetilde{w}^p_1(n_0) \int\limits_0^{+\infty} \min\left(\tau, \frac{\widetilde{w}^p_0(n_0)}{\widetilde{w}^p_1(n_0)}\right) dm_1(\tau) = \widetilde{w}^p_1(n_0) k_* \left(\frac{\widetilde{w}^p_0(n_0)}{\widetilde{w}^p_1(n_0)}\right).$$

Так как $k_*(t) \geq h_*(t)$ и $h_*(t) = [h(t^{\frac{1}{p}})]^p$, то

$$\Phi_{k_*}(\min(\widetilde{w}_0(n_0),\, \tau\widetilde{w}_1(n_0))) \geq \widetilde{w}_1(n_0) h \left(\frac{\widetilde{w}_0(n_0)}{\widetilde{w}_1(n_0)}\right),$$

т. е.

$$|S(x)(n_0)| \widetilde{w}(n_0) \leq 2c_1 M(\|x\|_{l_p(w)} + 1)$$

для любого $n_0 \in N$, а значит,

$$\|S(x)\|_{l_\infty(\widetilde{w})} \leq 2c_1 M(\|x\|_{l_p(w)} + 1)$$

при $x \in U \cap l_\infty$.

Поскольку $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_{l_p(w)} = \|x\|_{l_\infty(w)}$, то

$$\|S(x)\|_{l_\infty(\widetilde{w})} \leq c_2 M(\|x\|_{l_\infty(w)} + 1)$$

при $x \in U \cap l_\infty$, где $c_2 = c_2(w_0, w_1, w, \widetilde{w}_0, \widetilde{w}_1, \widetilde{w}) > 0$, $M = \max\{M_0, M_1\}$.

Если $x$ — произвольная точка из $U \cap l_\infty(w)$, то $x_N = \theta_N x \in U \cap l_\infty$, где

$$\theta_N(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \le n \le N, \\ 0, & \text{если } n > N, \end{cases}$$

так как множество $U$ удовлетворяет условию (S). Поэтому при любом $N$

$$\|S(x_N)\|_{l_\infty(\widetilde{w})} \le c_2 M(\|x\|_{l_\infty(w)} + 1). \tag{2.2}$$

Покажем, что $x_N \xrightarrow{l_p(w_0)} x$. Так как $x \in l_p(w)$ и $|x_N| \le |x|$, существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $|x_N(n)|w(n) \le \gamma$ при всех $n$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда, поскольку $\frac{w_0(n)}{w(n)} \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$, найдется номер $n_0$ такой, что $\gamma \frac{w_0(n)}{w(n)} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > n_0$. Далее,

$$\|x_N - x\|_{l_\infty(w_0)} \le \max_{1 \le n \le n_0} |x_N(n) - x(n)|w_0(n) + \sup_{n > n_0} |x_N(n) - x(n)|w_0(n),$$

$$\sup_{n > n_0} |x_N(n) - x(n)|w_0(n) = \sup_{n > n_0} |x_N(n) - x(n)|w(n)\frac{w_0(n)}{w(n)} \le \gamma \sup_{n > n_0} \frac{w_0(n)}{w(n)} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $x_N$ сходится к $x$ покоординатно, то $\max\limits_{1 \le n \le n_0} |x_N(n) - x(n)|w_0(n) < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $N > N_0$, т. е. $\|x_N - x\|_{l_\infty(w_0)} < \varepsilon$ при $n > N_0$. Из условий теоремы следует, что оператор $S(x) = T(x) - T(0)$ непрерывен на $U$, поэтому $S(x_N) \xrightarrow{l_\infty} S(x)$, а значит, $S(x_N) \longrightarrow S(x)$ покоординатно.

Поскольку пространство $l_\infty(\widetilde{w})$ обладает свойством Фату, из покоординатной сходимости и (2.2) следует, что

$$\|S(x)\|_{l_\infty(\widetilde{w})} \le c_2 M(\|x\|_{l_\infty(w)} + 1),$$

где $M = \max\{M_0, M_1\}$. Так как $S(x) = T(x) - T(0)$ и

$$\|T(0)\|_{l_\infty(\widetilde{w})} \le \tilde{k}_1 \|T(0)\|_{l_\infty(\widetilde{w}_1)} \le \tilde{k}_1 M_1$$

(здесь $\tilde{k}_1$ — константа вложения пространства $l_\infty(\widetilde{w}_1)$ в $l_\infty(\widetilde{w})$), то

$$\|T(x)\|_{l_\infty(\widetilde{w})} \le c \max\{M_0, M_1\}(\|x\|_{l_\infty(w)} + 1)$$

при $x \in U \cap l_\infty(w)$, где $c > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от $w_0$, $w_1$, $w$, $\widetilde{w}_0$, $\widetilde{w}_1$, $\widetilde{w}$. Теорема доказана.

В случае пространств с дискретной мерой при выполнении дополнительного условия

$$\lim_{n \to \infty} \frac{w_0(n)}{w(n)} = 0$$

теорема 1.3 справедлива при всех $1 \le p \le \infty$. Доказательство в этом случае совершенно аналогично доказательству предыдущей теоремы.

В заключение автор выражает признательность рецензенту за полезные замечания и указание на работы [7, 9].

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
**2.** *Tartar L.* Interpolation non linéaire et régularité // J. Funct. Anal. 1972. V. 9. P. 469–489.
**3.** *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
**4.** *Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов // Мат. анализ. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 24. С. 3–163. (Итоги науки и техники).
**5.** *Лаптев Г. Г.* Об интерполяционном методе получения априорных оценок сильных решений полулинейных параболических систем второго порядка // Тр. Мат. Ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1999. Т. 227. С. 180–191.
**6.** *Peetre J.* On interpolation functions. I, III // Acta Sci. Math. 1966, 1969. V. 27, 30, N 3, 4. P. 167–171, 235–239.
**7.** *Maligranda L.* On interpolation of nonlinear operators // Comment. Math. Prace Mat. 1989. V. 28. P. 253–275.
**8.** *Browder F. E.* Remarks on non linear interpolation in Banach spaces // J. Funct. Anal. 1969. V. 4. P. 390–403.
**9.** *Maligranda L.* Interpolation of locally Hölder operators // Studia Math. 1984. V. 78. P. 289–296.
**10.** *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

*Статья поступила 11 декабря 2008 г.*

Каплицкий Виталий Маркович
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
kaplitsky@donpac.ru