Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2010. Том 51, № 2

УДК 517.926

КАНОНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ТЕОРИЯ ПУАНКАРЕ — ДАНЖУА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ТОРЕ

А. И. Перов

Аннотация. После перехода в канонической системе с периодическими коэффициентами от декартовых координат к полярным получается нелинейное дифференциальное уравнение, правая часть которого периодична как по времени, так и по полярному углу, что позволяет трактовать это уравнение как дифференциальное уравнение на торе. Согласно теории Пуанкаре — Данжуа поведение в целом решений дифференциального уравнения на торе полностью характеризуется числом вращения и некоторым гомеоморфным отображением окружности на себя. Изучается связь между сильной устойчивостью (неустойчивостью) канонической системы, включая принадлежность к n-й области устойчивости (неустойчивости), с числом вращения и неподвижными точками упомянутого гомеоморфизма.

Ключевые слова: канонические системы, мультипликаторы Флоке, области сильной устойчивости и неустойчивости, теория Пуанкаре — Данжуа, число вращения.

В теории канонических систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами важную роль играют сильно устойчивые и сильно неустойчивые гамильтонианы. Как те, так и другие образуют в функциональном пространстве гамильтонианов открытые множества, распадающиеся в рассматриваемом случае на счетное число компонент связности, нумеруемых по определенному правилу числами n и называемых соответственно n-й *областью устойчивости* и n-й *областью неустойчивости.*

При изучении канонических систем двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами удобно перейти от декартовых координат к полярным, причем для полярного угла получается нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка, не содержащее полярного радиуса и периодическое по обеим переменным. Последнее позволяет трактовать полученное уравнение как дифференциальное уравнение на торе. Согласно теории Пуанкаре — Данжуа поведение в целом решений дифференциального уравнения на торе полностью характеризуется числом вращения и некоторым сохраняющим ориентацию гомеоморфным отображением окружности на себя.

В статье впервые прослеживается связь сильной устойчивости и сильной неустойчивости с числом вращения и упомянутым выше гомеоморфизмом. Проведенное исследование показывает, что дифференциальное уравнение на торе адекватно описывает многие важные свойства изучаемой канонической системы, включая возможность по одному только числу вращения сказать, сильно

© 2010 Перов А. И.

устойчива каноническая система или нет и, если она устойчива, какой именно области устойчивости она принадлежит.

В конце статьи изучается свойство устойчивости числа вращения, впервые открытое В. А. Плиссом. Показывается, что число вращения устойчиво, если соответствующая каноническая система сильно неустойчива.

Статья разбита на шесть пунктов. Начало и конец доказательства лемм и теорем обозначаются значками □ и ■ соответственно.

1. Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= h_{21}(t)x + h_{22}(t)y, \\ \frac{dy}{dt} &= -h_{11}(t)x - h_{12}(t)y, \end{aligned} \tag{1}$$

в которой коэффициенты $h_{ij}(t)$ — вещественные измеримые периодические с периодом $\omega > 0$ функции,

$$h_{ij}(t+\omega) = h_{ij}(t), \quad i,j = 1,2, \tag{2}$$

суммируемые на отрезке $[0,\omega]$, т. е. $h_{ij}(t) \in L_1[0,\omega]$. Кроме того, предполагается, что выполнено условие симметричности

$$h_{12}(t) = h_{21}(t). \tag{3}$$

При выполнении последнего условия след матрицы коэффициентов системы (1) тождественно равен нулю. Как известно, система (1) в этом случае называется *канонической* системой [1, с. 522]. При сделанных нами предположениях решения канонической системы понимаются *в смысле Каратеодори*, т. е. функции $x(t)$ и $y(t)$ должны быть абсолютно непрерывными [2, с. 120–124; 3, с. 53–60].

Напомним, что число μ (вещественное или невещественное) называется *мультипликатором Флоке* канонической системы (1), если можно указать такое нетривиальное решение этой системы с компонентами $x(t)$ и $y(t)$ (вещественными или невещественными), что

$$x(t+\omega) = \mu x(t), \quad y(t+\omega) = \mu y(t). \tag{4}$$

Мультипликаторы являются корнями квадратного уравнения

$$\mu^2 - 2A\mu + 1 = 0, \tag{5}$$

где вещественная постоянная A есть так называемая *характеристическая постоянная Ляпунова* [1, с. 525]. Если $|A| > 1$, то мультипликаторы вещественные и различные, причем они одного знака и один из них по модулю больше единицы, а другой по модулю меньше единицы — все это вытекает из формулы

$$\mu_\pm = A \pm \sqrt{A^2 - 1}.$$

Если $|A| = 1$, то мультипликаторы вещественные и совпадающие, т. е.

$$\mu_\pm = +1 \quad \text{или} \quad \mu_\pm = -1.$$

Если $|A| < 1$, то мультипликаторы невещественные и различные, причем они комплексно сопряженные и лежат на единичной окружности. Действительно,

$$\mu_\pm = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi} \quad (A = \cos\varphi,\ 0 < \varphi < \pi).$$

Иногда систему (1) удобно записывать в виде одного векторно-матричного уравнения
$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{H}(t)\mathbf{z}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$
где $\mathbf{z}$ — вектор-столбец с компонентами x и y, а $\mathbf{H}(t) = (h_{ij}(t))$ — матричная функция, ω-периодическая согласно (2),
$$\mathbf{H}(t+\omega) = \mathbf{H}(t). \tag{7}$$
В силу условия симметричности (3) имеем
$$\mathbf{H}^*(t) = \mathbf{H}(t). \tag{8}$$
При выполнении последнего условия уравнение (6) называется *каноническим*, а матричная функция $\mathbf{H}(t)$ — *гамильтонианом.*

В совокупности всех гамильтонианов можно ввести норму, превращающую ее в вещественное банахово пространство $\mathfrak{B}$,
$$\|\mathbf{H}\| = \int\limits_0^\omega |\mathbf{H}(t)|\, dt. \tag{9}$$
Здесь $|\mathbf{A}|$ есть норма матрицы $\mathbf{A}$, определенная как операторная, т. е. $|\mathbf{A}| = \max\{|\mathbf{A}z|/|\mathbf{z}| : \mathbf{z} \neq 0\}$, и норма вектора $\mathbf{z}$ определяется обычным образом через стандартное скалярное произведение (ср. с [1, с. 539]). Так как матрица $\mathbf{H}(t)$ является симметрической, нетрудно найти ее собственные значения:
$$\lambda_\pm(t) = \frac{h_{11}(t) + h_{22}(t)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{h_{11}(t) - h_{22}(t)}{2}\right]^2 + h_{12}^2(t)}. \tag{10}$$
Поэтому
$$|\mathbf{H}(t)| = \max|\lambda_\pm(t)|. \tag{11}$$

Напомним, что гамильтониан называется *устойчивым* или *неустойчивым* в зависимости от того, устойчивым или неустойчивым соответственно является нулевое решение уравнения (6), причем устойчивость, если она есть, всегда имеет двусторонний характер. Напомним, что гамильтониан $\mathbf{H}_0(t)$ называется *сильно устойчивым*, если он устойчив и можно указать такое $\varepsilon > 0$, что устойчивы все гамильтонианы $\mathbf{H}(t)$ из его ε-окрестности:
$$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_0\| < \varepsilon.$$
Аналогично дается определение *сильно неустойчивого* гамильтониана. Пусть гамильтониану $\mathbf{H}_0(t)$ отвечает ляпуновская характеристическая постоянная A_0. Нетрудно показать, что гамильтониан $\mathbf{H}_0(t)$ сильно устойчив (сильно неустойчив) тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $|A_0| < 1$ (соответственно $|A_0| > 1$). Как сильно устойчивые, так и сильно неустойчивые гамильтонианы образуют в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ открытые множества, распадающиеся на счетное число компонент связности, нумеруемых по определенному правилу всевозможными целыми числами n и называемых соответственно n-й *областью устойчивости* и n-й *областью неустойчивости.*

Пусть $\mathbf{Z}(t)$ — *матрицант*, соответствующий векторному уравнению (6), т. е. решение матричного дифференциального уравнения
$$\mathbf{J}\frac{d\mathbf{Z}}{dt} = \mathbf{H}(t)\mathbf{Z}, \tag{12}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}, \tag{13}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная 2×2-матрица. Тогда в силу формулы Лиувилля

$$\det \mathbf{Z}(t) \equiv 1, \tag{14}$$

т. е. матрица $\mathbf{Z}(t)$ при всех t является *симплектической*. Особую роль играет матрица $\mathbf{Z}(\omega)$, называемая *матрицей монодромии*. Напомним, что мультипликаторы Флоке — это собственные значения матрицы монодромии, поэтому квадратное уравнение (5) — это характеристическое уравнение указанной матрицы. Введенная выше ляпуновская постоянная есть *полуслед* матрицы монодромии,

$$A = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{Z}(\omega). \tag{15}$$

Нужно отметить, что наше изложение теории канонических систем несколько отличается от [1, гл. VIII]; для полного совпадения переменные x и y нужно поменять местами.

2. Перейдем в канонической системе (1) от декартовых координат x и y к полярным координатам r и θ по формулам

$$x = r \sin\theta, \quad y = r\cos\theta, \tag{16}$$

которые несколько отличаются от обычных. Для полярного угла получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot\theta = h_{11}(t)\sin^2\theta + 2h_{12}(t)\sin\theta\cos\theta + h_{22}(t)\cos^2\theta \equiv f(t,\theta), \tag{17}$$

примечательное тем, что не содержит полярного радиуса r, дифференциальное уравнение для которого, содержащее, кстати сказать, полярный угол θ, будет выписано позднее (см. формулу (32)). Дифференциальное уравнение (17) — это нелинейное дифференциальное уравнение, правая часть которого периодична по обеим переменным, а именно

$$f(t+\omega,\theta) = f(t,\theta), \quad f(t,\theta+\pi) = f(t,\theta), \tag{18}$$

что позволяет рассматривать это уравнение как дифференциальное уравнение на торе $\mathfrak{T}$.

Тор $\mathfrak{T}$ запишем как произведение двух ориентированных окружностей: $\mathfrak{T} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{U}$ — ориентированная окружность длины ω, а $\mathfrak{C}$ — ориентированная окружность длины π. С помощью первой из них определяются *параллели* на торе, а с помощью второй — *меридианы*. Согласно теории Пуанкаре — Данжуа поведение в целом решений дифференциального уравнения на торе полностью характеризуется *числом вращения* ρ и некоторым сохраняющим ориентацию *гомеоморфным отображением* C окружности $\mathfrak{C}$ на себя. Основные положения теории Пуанкаре — Данжуа, а также дальнейшее ее развитие и обобщение можно найти, например, в [3, с. 442–456; 4, с. 173–175; 5, с. 147–186; 6, с. 238–244; 7, 8].

Рассмотрим дифференциальное уравнение на торе общего вида

$$\dot\theta = f(t,\theta), \tag{19}$$

где правая часть удовлетворяет условиям периодичности (18). Обычно предполагается, что $f(t,\theta)$ непрерывна по совокупности переменных и обеспечивает единственность решений, что влечет за собой непрерывную зависимость решения от начальных условий. Мы же фактически рассматриваем уравнение (19) в *условиях Каратеодори* [2, с. 44–46; 3, с. 53–60]. Это означает, что $f(t,\theta)$ измерима по t при каждом фиксированном θ и непрерывна по θ при каждом фиксированном t. Кроме того, предполагается, что имеет место оценка

$$|f(t,\theta)| \le m(t), \tag{20}$$

где $m(t)$ — некоторая неотрицательная измеримая ω-периодическая функция, суммируемая на отрезке $[0,\omega]$. Предполагается, далее, что выполнено условие Липшица

$$|f(t,\theta) - f(t,\vartheta)| \le l(t)|\theta - \vartheta|, \tag{21}$$

где $l(t)$ — некоторая неотрицательная измеримая ω-периодическая функция, суммируемая на отрезке $[0,\omega]$. Оценка (20) гарантирует существование при всех t решения уравнения (19), удовлетворяющего любому начальному условию, а условие Липшица (21) обеспечивает единственность этого решения и его непрерывную зависимость от начальных условий. Заметим, что, конечно же, из условия Липшица вытекает непрерывность $f(t,\theta)$ по θ.

Пусть $\theta(t)$ — некоторое решение уравнения (19), определенное при всех t. Из условия периодичности (18) следует, что при любых целых m и n решениями этого уравнения являются также функции $\theta(t+m\omega)$ и $\theta(t)+n\pi$. Обозначим через $\theta(t,\vartheta)$ решение уравнения (19), удовлетворяющее начальному условию $\theta(0)=\vartheta$. В силу сказанного выше функция $\theta(t,\vartheta)$ определена при всех t и θ и непрерывна по совокупности переменных. Кроме того,

$$\theta(t,\vartheta+n\pi) = \theta(t,\vartheta) + n\pi, \tag{22}$$

где n — любое целое число. Поэтому бо́льшая часть классической теории Пуанкаре — Данжуа дифференциальных уравнений на торе переносится и на рассматриваемый нами случай условий Каратеодори.

Число вращения ρ дифференциального уравнения (19) определяется следующим образом:

$$\rho = \frac{\omega}{\pi} \lim_{0<|t-s|\to+\infty} \frac{\theta(t,\vartheta)-\theta(s,\vartheta)}{t-s}, \tag{23}$$

причем написанный предел существует равномерно по ϑ. Появление стоящего впереди множителя вызвано наличием у функции $f(t,\theta)$ разных периодов по разным переменным и призвано придать излагаемым ниже теоремам бо́льшую четкость и простоту.

Отметим, как это вытекает из [5, с. 154, теоремы 10.2 и 10.3], что

$$\rho = \frac{n}{m} \Leftrightarrow \theta(m\omega,\vartheta) = \vartheta + n\pi \quad \text{при некотором } \vartheta; \tag{24}$$

здесь m и n — целые числа и $m \ne 0$.

Гомеоморфизм C описывается функцией $c(\vartheta) \equiv \theta(\omega,\vartheta)$. Она непрерывна, возрастает и $c(\vartheta+k\pi) = c(\vartheta)+k\pi$ при любом целом k (см. (22)). Гомеоморфизм C^k описывается функцией $c^k(\vartheta)$, где при $k>0$ функция $c^k(\vartheta)$ есть k-я итерация функции $c(\vartheta)$; при $k=0$ имеем $c^0(\vartheta)\equiv\vartheta$ и при $k<0$ она есть k-я итерация функции $c^{-1}(\vartheta)$, где $c^{-1}(\vartheta)$ — функция, обратная $c(\vartheta)$.

Положим

$$\Delta(\vartheta) \equiv c(\vartheta) - \vartheta. \tag{25}$$

Это непрерывная функция, периодическая с периодом π. В [1, с. 557] она названа *функцией углов поворота* решений канонической системы (1). (Вспомним, что θ — это полярный угол решения системы (1).) В дальнейшем важную роль играют следующие простые замечания. Нетрудно видеть, что гомеоморфизм C имеет неподвижные точки на $\mathfrak{C}$ в том и только в том случае, если

$$\Delta(\vartheta) \equiv 0 \pmod \pi \quad \text{при некотором } \vartheta, \tag{26}$$

т. е. $\Delta(\vartheta) = n\pi$ при некотором ϑ, где n — некоторое целое число. Поэтому гомеоморфизм C не имеет неподвижных точек на $\mathfrak{C}$ в том и только в том случае, если

$$\Delta(\vartheta) \not\equiv 0 \pmod \pi, \quad -\infty < \vartheta < +\infty. \tag{27}$$

В этом случае существует такое целое n, что

$$n\pi < \Delta(\vartheta) < (n+1)\pi, \quad -\infty < \vartheta < +\infty. \tag{28}$$

Вернемся к уравнению (17). В этом случае имеют место оценки (20) и (21), в которых

$$m(t) = \max\left|\frac{h_{11}(t) + h_{22}(t)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{h_{11}(t) - h_{22}(t)}{2}\right]^2 + h_{12}^2(t)}\right|, \tag{29}$$

$$l(t) = \sqrt{(h_{11}(t) - h_{22}(t))^2 + 4h_{12}^2(t)}. \tag{30}$$

Это вытекает из формул (10) и (11), а также из формулы

$$\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial\theta} = [h_{11}(t) - h_{22}(t)]\sin 2\theta + 2h_{12}(t)\cos 2\theta. \tag{31}$$

В заключение этого пункта выпишем дифференциальное уравнение для полярного радиуса r:

$$\frac{\dot r}{r} = \frac{[h_{22}(t) - h_{11}(t)]}{2}\sin 2\theta - h_{12}(t)\cos 2\theta \equiv g(t,\theta). \tag{32}$$

При известной функции $\theta(t)$, являющейся, как мы знаем, решением уравнения (17), это есть линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Сравнение формул (31) и (32) показывает, что

$$\frac{\partial f(t,\theta)}{\partial\theta} = -2g(t,\theta). \tag{33}$$

3. При доказательстве основных теорем нам будут полезны приводимые ниже леммы, к изложению которых мы и переходим.

Рассмотрим решение $\theta(t)$ дифференциального уравнения (17), обладающее свойством

$$\theta(t + m\omega) = \theta(t) + n\pi \tag{34}$$

при некоторых целых n и m, причем без ограничения общности можно предполагать, что $m > 0$. Согласно (24) решение такого типа существует тогда и только тогда, когда число вращения дифференциального уравнения (17) является рациональным и имеет вид $\rho = n/m$. Функцию $\theta(t)$, для которой справедливо (34), назовем *периодической в обобщенном смысле*. На торе ей соответствует замкнутая кривая, которая замыкается, сделав m оборотов вдоль параллели $\mathfrak{U}$ и n оборотов вдоль меридиана $\mathfrak{C}$. В описанной ситуации говорят, что для дифференциального уравнения (17) имеет место *периодический случай*. Как известно, *фундаментальная группа* тора есть свободная коммутативная группа с двумя образующими $\{\mathfrak{U}\}$ и $\{\mathfrak{C}\}$ [9, с. 140]; нетрудно видеть, что гомотопический класс той замкнутой кривой, о которой шла речь, есть $m\{\mathfrak{U}\} \times n\{\mathfrak{C}\}$.

Следующее утверждение приводится без доказательства.

Лемма 1. *Пусть $\theta(t)$ — некоторое решение дифференциального уравнения* (17)*, обладающее свойством* (34)*. Тогда функция $a(t) \equiv g(t, \theta(t))$, где $g(t, \theta(t))$ определяется формулой* (32)*, является $m\omega$-периодической, т. е.*

$$a(t + m\omega) = a(t). \tag{35}$$

Решая уравнение (32) при известной функции $\theta(t)$, получаем

$$r(m\omega) = e^{\int\limits_0^{m\omega} a(t)\,dt} r(0). \tag{36}$$

Пусть теперь $\mathbf{z}(t)$ — произвольное вещественное решение канонической системы, для которого при некотором целом m справедливо соотношение

$$\mathbf{z}(t + m\omega) = \nu \mathbf{z}(t), \tag{37}$$

где ν — некоторое вещественное число. Запишем вещественные компоненты $x(t)$ и $y(t)$ этого решения в полярной форме по формулам (16)

$$x(t) = r(t)\sin\theta(t), \quad y(t) = r(t)\cos\theta(t). \tag{38}$$

Здесь $r(t) = |\mathbf{z}(t)|$, а $\theta(t)$ — некоторое решение дифференциально уравнения (17).

Лемма 2. *Пусть $\mathbf{z}(t)$ — вещественное решение канонической системы, для которого справедливо соотношение* (37)*, а $\theta(t)$ — соответствующая угловая функция. Тогда $\theta(t)$ является решением уравнения* (17)*, обладающим свойством* (34)*. Пусть, наоборот, $\theta(t)$ — решение уравнения* (17)*, обладающее свойством* (34)*. Тогда существует вещественное решение $\mathbf{z}(t)$ канонической системы, для которого $\theta(t)$ является угловой функцией и справедливо соотношение* (37).

□ Так как из (37) при $t = 0$ получаем, что $\mathbf{z}(m\omega) = \nu\mathbf{z}(0)$, то векторы $\mathbf{z}(m\omega)$ и $\mathbf{z}(0)$ коллинеарны, поэтому при некотором целом n справедливо равенство $\theta(m\omega) = \theta(0) + n\pi$. Отметим, что число n является четным, если $\nu > 0$ и, значит, векторы $\mathbf{z}(m\omega)$ и $\mathbf{z}(0)$ направлены в одну и ту же сторону, и нечетным, если $\nu < 0$ и, значит, векторы $\mathbf{z}(m\omega)$ и $\mathbf{z}(0)$ направлены в противоположные стороны. Функции $\theta(t + m\omega)$ и $\theta(t) + n\pi$ являются решениями дифференциального уравнения (17); поэтому из их совпадения при $t = 0$ (см. выше) в силу теоремы единственности вытекает, что $\theta(t + m\omega) = \theta(t) + n\pi$ при всех t. Мы показали, что решение $\theta(t)$ дифференциального уравнения (17) обладает свойством (34).

Докажем обратное утверждение. По функции $\theta(t)$ построим решение $r(t)$ дифференциального уравнения (32), а вместе с ним и вещественное решение $\mathbf{z}(t)$ канонической системы с компонентами $x(t) = r(t)\sin\theta(t)$ и $y(t) = r(t)\cos\theta(t)$. Ясно, что $\theta(t)$ является угловой функцией решения $\mathbf{z}(t)$. Далее, из (34) при $t = 0$ получаем $\theta(m\omega) = \theta(0) + n\pi$, откуда вытекает, что векторы $\mathbf{z}(m\omega)$ и $\mathbf{z}(0)$ коллинеарны. Поэтому $\mathbf{z}(m\omega) = \nu\mathbf{z}(0)$ при некотором вещественном ν. Так как $\mathbf{z}(t + m\omega)$ и $\nu\mathbf{z}(t)$ являются, очевидно, решениями канонической системы, и, кроме того, совпадают при $t = 0$, по теореме единственности они совпадают при всех t, т. е. справедливо соотношение (37). ■

Из формулы (37) получаем

$$r(t + m\omega) = |\nu| r(t). \tag{39}$$

Поэтому

$$r(m\omega) = |\nu| r(0). \tag{40}$$

Заметим, что согласно лемме 1 функция $a(t)$ в рассматриваемом случае является $m\omega$-периодической. Сравнивая формулы (36) и (40), находим

$$\int\limits_0^{m\omega} a(t)\,dt = \ln|\nu|. \tag{41}$$

Лемма 3. *Пусть* $\mathbf{z}(t)$ *— вещественное решение канонической системы, для которого справедливо соотношение* (37), *а* $\theta(t)$ *— соответствующая угловая функция. Тогда справедлива следующая формула:*

$$\int\limits_0^{m\omega} \frac{\partial f(t,\theta(t))}{\partial\theta}\,dt = -2\ln|\nu|. \tag{42}$$

□ В силу леммы 2 функция $\theta(t)$ обладает свойством (34). Поэтому, как мы отметили выше, функция $a(t)$ является $m\omega$-периодической. Из (33) в силу (41) вытекает формула (42). ■

Подготовительная работа завершена. Перейдем к изложению и доказательству основных теорем, в которых прослеживается связь числа вращения ρ и гомеоморфизма C с мультипликаторами канонической системы и, следовательно, с ее устойчивостью и неустойчивостью.

Отметим, что, в то время как число вращения ρ может принимать любое вещественное значение, гомеоморфизм C в изучаемой нами ситуации, как показывает приводимый ниже материал, может иметь две различные неподвижные точки (если мультипликаторы вещественные и различные), единственную неподвижную точку либо все точки неподвижные, т. е. гомеоморфизм C совпадает с тождественным отображением (если мультипликаторы вещественные и совпадающие), наконец, может не иметь ни одной неподвижной точки (если мультипликаторы невещественные).

4. Этот пункт посвящен вещественным мультипликаторам.

Теорема 1. *Гомеоморфизм* C *имеет неподвижные точки, т. е.*

$$Cz = z \quad \text{при некотором } z \in \mathfrak{C}, \tag{43}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы канонической системы вещественные.

□ Пусть μ — вещественный мультипликатор. Тогда согласно (4) для некоторого вещественного решения $\mathbf{z}(t)$ канонической системы имеем

$$\mathbf{z}(t+\omega) = \mu\mathbf{z}(t),$$

т. е. выполнено условие (37) при $m = 1$ и $\nu = \mu$. По лемме 2 угловая функция $\theta(t)$ решения $\mathbf{z}(t)$ обладает свойством (34), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\theta(t+\omega) = \theta(t) + n\pi$$

при некотором целом n. Мы видим, что $\theta(\omega) = \theta(0) + n\pi$, т. е. $c(\vartheta) = \vartheta + n\pi$, откуда вытекает, что

$$\Delta(\vartheta) \equiv 0 \pmod{\pi} \quad \text{при } \vartheta = \theta(0).$$

Согласно (26) из последнего соотношения следует, что гомеоморфизм C имеет неподвижные точки, т. е. имеет место (43).

Проводя рассуждения в обратном порядке, нетрудно доказать обратное утверждение. ■

Теорема 2. *Число вращения ρ является целым числом, т. е.*

$$\rho = n, \tag{44}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы канонической системы вещественные. Если мультипликаторы не только вещественные, но и различные, то каноническая система, будучи сильно неустойчивой, принадлежит n-й области неустойчивости.

$\square$ Если мультипликаторы канонической системы вещественные, то по теореме 1 гомеоморфизм C имеет неподвижные точки. Поэтому имеет место соотношение (26), откуда вытекает, что $\Delta(\vartheta) = n\pi$ при некотором ϑ и некотором целом n. Согласно (24) это означает, что $\rho = n$, так как в рассматриваемом случае $m = 1$, и равенство (44) установлено.

Если мультипликаторы не только вещественные, но и различные, то каноническая система сильно неустойчивая и согласно таблице [1, с. 557] получаем, что система принадлежит n-й области неустойчивости, где число n взято из формулы (44). Напомним, что функция $\Delta(\vartheta)$ совпадает с функцией углов поворота решений канонической системы. $\blacksquare$

Теорема 1 может быть существенно дополнена следующим образом. Пусть $|A| > 1$. Тогда мультипликаторы канонической системы вещественные и различные. Обозначим их μ_+ и μ_-, $\mu_+ \neq \mu_-$ и распорядимся их знаком так, чтобы

$$|\mu_+| > 1 > |\mu_-|. \tag{45}$$

Теорема 3. *Если мультипликаторы μ_+ и μ_- канонической системы вещественные и различные, $\mu_+ \neq \mu_-$, то гомеоморфизм C имеет точно две различные неподвижные точки z_+ и z_-, $z_+ \neq z_-$, причем они устойчивы, каждая в своем направлении в следующем смысле:*

$$\begin{aligned} &\text{если } z \neq z_-, \text{ то } z_k \to z_+ \text{ при } k \to +\infty, \\ &\text{если } z \neq z_+, \text{ то } z_k \to z_- \text{ при } k \to -\infty, \end{aligned} \tag{46}$$

где $z = z_0 \in \mathfrak{C}$ и $z_k = C^k z$ при $k = 0, \pm 1, \ldots$.

Для уравнения (17) это означает, что существует точно два различных ω-периодических в обобщенном смысле решения $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$, для которых

$$\theta_\pm(t+\omega) = \theta_\pm(t) + n\pi \tag{47}$$

при некотором целом n, причем решение $\theta_+(t)$ асимптотически устойчиво вправо, т. е. при $t \to +\infty$, и решение $\theta_-(t)$ асимптотически устойчиво влево, т. е. при $t \to -\infty$.

$\square$ Рассмотрим решения $\mathbf{z}_+(t)$ и $\mathbf{z}_-(t)$ канонической системы, для которых

$$\mathbf{z}_\pm(t+\omega) = \mu_\pm \mathbf{z}_\pm(t).$$

Мы видим, что для них справедливы соотношения (37) при $m = 1$ и $\nu = \mu_\pm$. По лемме 2 угловые функции $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$ этих решений соответственно обладают свойством (34) при $m = 1$ и некотором n, т. е. имеет место (17) (можно показать, что на самом деле число n не зависит от знака угловой функции.) Обозначим через z_+ и z_- точки на окружности $\mathfrak{C}$, отвечающие ν_+ и ν_-, где $\nu_\pm = \theta_\pm(0)$. Согласно (47) при $t = 0$ имеем $\theta_\pm = \theta_\pm(0) + n\pi$, откуда вытекает, что $c(\nu_\pm) = \nu_\pm + n\pi$ и, наконец, $\Delta(\vartheta_\pm) = 0 \,(\operatorname{mod} \pi)$. Тогда согласно (26) $Cz_\pm = z_\pm$. Так как углы ν_+ и ν_- различные по модулю π, ибо они отвечают линейно независимым собственным векторам a_+ и a_- матрицы монодромии, то неподвижные точки z_+ и z_- различные, $z_+ \neq z_-$. Других неподвижных точек у отображения C нет, так как у матрицы монодромии нет других собственных направлений.

Осталось объяснить устойчивость неподвижных точек z_+ и z_- в указанном выше смысле или, что то же самое, устойчивость обобщенных периодических решений $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$ в указанных направлениях. Последнее немедленно вытекает из формул

$$-2\ln|\mu_+| = \int\limits_0^\omega \frac{\partial f(t,\theta_+(t))}{\partial\theta}\,dt < 0, \quad -2\ln|\mu_-| = \int\limits_0^\omega \frac{\partial f(t,\theta_-(t))}{\partial\theta}\,dt > 0,$$

получающихся из (42) с учетом неравенств (45). Локальная устойчивость точек z_+ и z_- в указанном выше смысле следует из очевидных формул

$$c'(\vartheta_+) = \exp\int\limits_0^\omega \frac{\partial f(t,\theta_+(t))}{\partial\theta}\,dt < 1, \quad c'(\vartheta_-) = \exp\int\limits_0^\omega \frac{\partial f(t,\theta_-(t))}{\partial\theta}\,dt > 1.$$

Докажем первое утверждение в (46). Проще всего оно устанавливается на языке обобщенных периодических решений $\theta_+(t)$ и $\theta_-(t)$. Пусть $\vartheta_+ = \theta_+(0)$ и $\vartheta_- = \theta_-(0)$. Без ограничения общности можно считать, что $0 \le \vartheta_+ < \vartheta_- < \pi$. Проверим, что

$$0 < c(\vartheta_+) - c(\vartheta_-) < \vartheta - \vartheta_+ \quad \text{при } 0 < \vartheta - \vartheta_+ < \vartheta_- - \vartheta_+$$

(аналогичные рассуждения применимы и при $\vartheta_- - \vartheta_+ - \pi < \vartheta - \vartheta_+ < 0$), откуда и вытекает справедливость обсуждаемого утверждения.

Действительно, написанное выше неравенство имеет место в силу асимптотической устойчивости решения $\vartheta_+(t)$ при $0 < \vartheta - \vartheta_+ < \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Если допустить, что оно не верно, то найдется такое ϑ_*, для которого

$$0 < c(\vartheta_*) - c(\vartheta_+) = \vartheta_* - \vartheta_+ \quad \text{и} \quad 0 < \vartheta_* - \vartheta_+ < \vartheta_- - \vartheta_+.$$

Тогда так как $c(\vartheta_+) = \vartheta_+ + n\pi$, то и $c(\vartheta_*) = \vartheta_* + n\pi$. Это означает, что $Cz_* = z_*$, в то время как у гомеоморфизма C нет неподвижных точек, кроме z_+ и z_-; здесь z_* — точка окружности $\mathfrak{C}$, соответствующая ϑ_*. Полученное противоречие доказывает справедливость написанного выше неравенства.

Аналогично доказывается и второе утверждение в (46). ■

Теорема 3 говорит о том, что сильная неустойчивость канонической системы имеет место тогда и только тогда, когда гомеоморфизм C имеет точно две различные неподвижные точки.

5. Этот пункт посвящен невещественным мультипликаторам.

Теорема 4. *Гомеоморфизм C не имеет неподвижных точек, т. е.*

$$Cz \neq z \quad \text{при } z \in C, \tag{48}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы невещественные.

Теорема 4 немедленно вытекает из теоремы 1. В ней утверждается, что сильная устойчивость канонической системы имеет место тогда и только тогда, когда гомеоморфизм C не имеет неподвижных точек.

Теорема 5. *Число вращения ρ нецелое, т. е.*

$$\rho \neq n, \tag{49}$$

тогда и только тогда, когда мультипликаторы канонической системы невещественные. При выполнении последнего условия каноническая система, будучи сильно устойчивой, принадлежит n-й области устойчивости, где n — целая часть числа вращения ρ:

$$n = [\rho]. \tag{50}$$

Далее, могут представиться две возможности: либо

$$\rho \text{ — рациональное число,} \quad \rho = \frac{n}{m}, \tag{51}$$

где n и m — целые взаимно простые числа (и $m \neq \pm 1$); в этом случае m-я степень гомеоморфизма C имеет неподвижные точки, т. е.

$$C^m z = z \quad \text{при некотором } z \in \mathfrak{C}, \tag{52}$$

и имеет место периодический случай; либо

$$\rho \text{ — иррациональное число;} \tag{53}$$

в этом случае никакая степень гомеоморфизма C (кроме нулевой) не имеет неподвижных точек:

$$C^m z \neq z \quad \text{при } z \in \mathfrak{C}, \quad m \neq 0, \tag{54}$$

и всегда имеет место эргодический случай.

□ Справедливость первого утверждения теоремы — формула (49) — непосредственно вытекает из теоремы 2. Пусть мультипликаторы канонической системы невещественные. Тогда по теореме 4 гомеоморфизм C не имеет неподвижных точек. Поэтому существует такое целое число n, для которого справедливы двусторонние оценки (28). Из этих оценок вытекает, что

$$n < \rho < n + 1.$$

С другой стороны, согласно таблице [1, с. 567] двусторонние оценки (28) означают, что каноническая система сильно устойчива и принадлежит n-й области устойчивости. Формула (50) доказана.

Далее, пусть число вращения ρ есть рациональное число, т. е. имеет место формула (51). Тогда согласно (24) m-я степень гомеоморфизма C имеет неподвижные точки, т. е. имеет место соотношение (52). Более того, из (24) вытекает, что дифференциальное уравнение (17) имеет такое решение $\theta(t)$, для которого справедливо равенство (34), где числа m и n такие же, как в формуле (51). Мы видим, что $\theta(t)$ является периодическим в обобщенном смысле. Это и означает по определению, что имеет место периодический случай.

Однако этот периодический случай разительным образом отличается от периодического случая, рассмотренного в теореме 3. Действительно, так как угловая функция $\theta(t)$ обладает свойством (34), по лемме 2 ей отвечает вещественное решение $\mathbf{z}(t)$ канонической системы, для которого имеет место (37) с некоторым вещественным ν. Покажем, что $\nu = \pm 1$. Полагая в (37) $t = 0$, получаем $\mathbf{z}(m\omega) = \nu \mathbf{z}(0)$, откуда вытекает, что $\mathbf{Z}(\omega)^m \mathbf{a} = \nu \mathbf{a}$, где $\mathbf{a} = \mathbf{z}(0)$. Итак, мы видим, что ν является собственным значением m-й степени матрицы монодромии $\mathbf{Z}(\omega)$. Так как в рассматриваемом случае мультипликаторы, т. е. собственные значения матрицы монодромии, различны и по модулю равны единице, то $|\nu| = 1$, и наше утверждение доказано. Поэтому по лемме 3 получаем (см. формулу (42))

$$\int_0^{m\omega} \frac{\partial f(t,\theta(t))}{\partial\theta}\,dt = -2\ln|\nu| = 0.$$

Это означает, что

$$(c^m)'(\vartheta) = \exp\int_0^{m\omega} \frac{\partial f(t,\theta(t))}{\partial\theta}\,dt = 1,$$

где $\vartheta = \theta(0)$.

Пусть теперь число вращения ρ есть иррациональное число, т. е. имеет место формула (53). В этом случае никакая степень гомеоморфизма C (кроме нулевой) не имеет неподвижных точке и справедливо соотношение (54).

Эргодичность в случае иррационального числа вращения устанавливается следующим образом. Во-первых,

$$\begin{aligned}\sigma'(\vartheta) &= \exp\int_0^{\omega} \frac{\partial f(t,\theta(t,\vartheta))}{\partial\theta}\,dt\\ &= \exp\int_0^{\omega}\{[h_{11}(t)-h_{22}(t)]\sin 2\theta(t,\vartheta) + 2h_{12}(t)\cos 2\theta(t,\vartheta)\}\,dt,\end{aligned}$$

и так как $\theta(t,\vartheta)$ непрерывна, а функции $h_{ij}(t)$ суммируемы, то производная $\sigma'(\vartheta)$ непрерывна. Во-вторых,

$$\begin{aligned}\sigma''(\vartheta) &= \left(\exp\int_0^{\omega}\frac{\partial f(t,\theta(t,\vartheta))}{\partial\theta}\,dt\right)\int_0^{\omega}\frac{\partial^2 f(t,\theta(t,\vartheta))}{\partial^2\theta}\frac{\partial\theta(t,\vartheta)}{\partial\vartheta}\,dt\\ &= \exp\left(\int_0^{\omega}\{[h_{11}(t)-h_{22}(t)]\sin 2\theta(t,\vartheta) + 2h_{12}(t)\cos 2\theta(t,\vartheta)\}\,dt\right)\\ &\quad\times 2\int_0^{\omega}\{[h_{11}(t)-h_{22}(t)]\cos 2\theta(t,\vartheta) - h_{12}(t)\sin 2\theta(t,\vartheta)\}\\ &\quad\times\exp\left(\int_0^{t}\{[h_{11}(s)-h_{22}(s)]\sin 2\theta(s,\vartheta) + 2h_{12}(s)\cos 2\theta(s,\vartheta)\}\,ds\right)dt,\end{aligned}$$

и $c''(\vartheta)$ также непрерывна. Так как тем самым первая производная $c'(\vartheta)$ имеет на отрезке $[0,\omega]$ ограниченную вариацию, имеет место эргодический случай [3, с. 448]. ■

Отметим характер решений канонической системы в случае невещественных мультипликаторов. В этом случае каноническая система, как известно, сильно устойчива, а все ее решения оказываются почти-периодическими [1, с. 526]. Уточним последнее утверждение. Если число вращения рациональное и $\rho = m/n$, то все решения канонической системы периодические с периодом $m\omega$

или $2m\omega$. Если число вращения иррациональное, то все решения канонической системы квазипериодические с двумерным частотным базисом [10, с. 66].

Посмотрим, как в последнем случае это отражается на характере решений дифференциального уравнения (17). По теореме Боля [3, с. 454] существует такая функция $h(t, \theta)$, непрерывная по совокупности переменных и удовлетворяющая условиям периодичности (18), что любое решение уравнения (17) может быть записано в виде

$$\theta(t) = t\rho^* + c + h(t, t\rho^* + c), \tag{55}$$

где c — произвольная постоянная и $\rho^* = (\pi/\omega)\rho$. Из этого представления нетрудно вывести справедливость следующей теоремы.

Теорема 6. *Если число вращения ρ иррациональное, то любое решение $\theta(t)$ дифференциального уравнения* (17) *есть сумма линейной функции с угловым коэффициентом ρ^* и некоторой квазипериодической функции с двумерным частотным базисом.*

Легко заметить, что теорему 6 (не представление (55)!) можно также получить из теоремы Бора об аргументе почти-периодической функции [10, с. 128-135]; в силу некоторых приложений к механике, восходящих еще к Лагранжу, число ρ^* называется *средним движением*.

6. Изучая дифференциальные уравнения на торе, В. А. Плисс открыл устойчивые числа вращения [5, с. 179]. Можно показать, что число вращения ρ дифференциального уравнения (17) непрерывно зависит от гамильтониана $\mathbf{H}(t)$ в метрике банахова пространства $\mathfrak{B}$. Однако иногда оно не только непрерывно зависит от гамильтониана, но и сохраняет постоянное значение в некоторой окрестности этого гамильтониана (пример тому — теорема 2, согласно которой $\rho = n$ на всей области неустойчивости, содержащей гамильтониан $\mathbf{H}(t)$, являющейся открытым множеством).

Так как мы изучаем дифференциальные уравнения на торе в условиях Каратеодори, приведем определение устойчивого числа вращения в новой ситуации.

Наряду с уравнением (19), в котором правая часть удовлетворяет условиям периодичности (18), а также подчинена ограничениям (20) и (21), рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{\theta} = f(t, \theta) + \Delta f(t, \theta), \tag{56}$$

где $\Delta f(t, \theta)$ удовлетворяет ограничениям такого же типа, как и $f(t, \theta)$, причем

$$|\Delta f(t, \theta)| \le \Delta m(t), \tag{57}$$

где $\Delta m(t)$ — некоторая неотрицательная измеримая ω-периодическая функция, суммируемая на отрезке $[0, \omega]$.

Число вращения ρ дифференциального уравнения (19) называется *устойчивым*, если можно указать такие $\varepsilon > 0$, что число вращения $\tilde{\rho}$ возмущенного уравнения (56) не меняется:

$$\tilde{\rho} = \rho$$

при условии, что

$$\int\limits_0^\omega \Delta m(t)\, dt < \varepsilon \tag{58}$$

(ср. с [5, с. 176]).

Имеет место следующая

Теорема 7. *Число вращения дифференциального уравнения* (17) *является устойчивым тогда и только тогда, когда оно является целым, а неподвижные точки гомеоморфизма C — различными.*

Согласно теореме 3 в теореме 7 утверждается, что число вращения дифференциального уравнения (17) устойчиво тогда и только тогда, когда каноническая система сильно неустойчива. Таким образом, складывается внешне парадоксальная ситуация, когда число вращения устойчиво, если каноническая система сильно неустойчива, и число вращения неустойчиво, если каноническая система сильно устойчива.

□ Мы ограничимся доказательством только достаточности. Пусть число вращения ρ дифференциального уравнения (17) является целым, $\rho = n$, причем гомеоморфизм C имеет различные неподвижные точки. Согласно теоремам 2 и 3 в этом случае каноническая система сильно неустойчива и принадлежит n-й области неустойчивости; поэтому в соответствии с таблицей [1, с. 557] имеют место двусторонние оценки

$$\min_{0\le\vartheta\le\pi}\Delta(\vartheta) < n\pi < \max_{0\le\vartheta\le\pi}\Delta(\vartheta).$$

С помощью леммы об интегральных неравенствах нетрудно показать, что

$$|\tilde{\Delta}(\vartheta) - \Delta(\vartheta)| \le e^{\int_0^\omega l(t)\,dt}\int_0^\omega \Delta m(t)\,dt, \tag{59}$$

где функция углов поворота решений $\widetilde{\Delta}(\vartheta)$ построена для возмущенного уравнения (56). Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то и функция $\widetilde{\Delta}(\vartheta)$ мало отличается от функции $\Delta(\vartheta)$. Поэтому функция $\widetilde{\Delta}(\vartheta)$ также удовлетворяет двусторонним оценкам

$$\min_{0\le\vartheta\le\pi}\widetilde{\Delta}(\vartheta) < n\pi < \max_{0\le\vartheta\le\pi}\widetilde{\Delta}(\vartheta),$$

из которых вытекает согласно той же самой таблице [1, с. 557], что возмущенная каноническая система сильно неустойчива и принадлежит n-й области неустойчивости, откуда в силу теоремы 2 вытекает, что $\tilde{\rho} = n$.

В приведенном выше доказательстве молчаливо предполагалось, что возмущенное уравнение (56) также соответствует некоторому гамильтониану, скажем $\mathbf{H}(t) + \Delta\mathbf{H}(t)$. Однако возмущенное уравнение (56), точнее возмущение $\Delta f(t,\theta)$, может быть самого общего вида, о чем говорилось при определении устойчивого числа вращения. Для доказательства теоремы в этом случае нужно слегка изменить рассуждения.

Пусть число вращения ρ дифференциального уравнения (17) является целым, $\rho = n$, причем гомеоморфизм C имеет различные неподвижные точки. Построим функцию последования [5, с. 178]

$$d(\vartheta) = c(\vartheta) - \vartheta - n\pi. \tag{60}$$

Согласно теореме 2 в этом случае существует точка ϑ_0 такая, что

$$d(\vartheta_0) = 0, \quad d'(\vartheta_0) \ne 0. \tag{61}$$

В качестве ϑ_0 можно взять как ϑ_+, так и ϑ_-. Мы видим, что функция последования меняет знак. Поэтому число вращения ρ устойчиво [5, с. 179, теорема 11.2]. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.

2. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. Т. 2.

3. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.

4. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.

5. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.; Л.: Наука, 1964.

6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

7. *Перов А. И., Эгле И. Ю.* К теории Пуанкаре — Данжуа многомерных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 5. С. 801–810.

8. *Жужома Е. В.* Топологическая классификация слоений, задаваемых одномерными формами Пфаффа на n-мерном торе // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 8. С. 1385–1393.

9. *Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н.* Введение в топологию. М.: Высш. шк., 1980.

10. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.

Статья поступила 27 марта 2008 г.

Перов Анатолий Иванович
Воронежский гос. университет,
факультет прикладной математики, информатики и механики,
кафедра нелинейных колебаний,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
anperov@mail.ru