Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 517.983

О ПРЕДЕЛЬНОМ СПЕКТРЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В L_2, ИНТЕГРАЛЬНЫХ НА НЕКОТОРОМ ЛИНЕЙНОМ МНОГООБРАЗИИ

В. Б. Коротков

Аннотация. Доказывается, что если $S : L_2 \to L_2$ — положительный линейный оператор, интегральный на некотором всюду плотном в L_2 линейном многообразии, то 0 принадлежит предельному спектру оператора S.

Ключевые слова: предельный спектр, положительный оператор, интегральный оператор.

Пусть (X, μ) — пространство с положительной конечной мерой μ, не являющейся чисто атомической, т. е. в X существует множество X_0, $\mu X_0 > 0$, не имеющее атомов меры μ. Мы предполагаем также, что $L_2 = L_2(X, \mu)$ — сепарабельное комплексное пространство. Далее через $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ обозначаются норма и скалярное произведение в L_2, через $\|\cdot\|_\infty$ — норма в $L_\infty = L_\infty(X, \mu)$. Пусть D — линейное многообразие в L_2. Линейный оператор $K : D \to L_2$ называется *интегральным* [1], если существует определенная на $X \times X$ $(\mu \times \mu)$-измеримая $(\mu \times \mu)$-п. в. конечная функция $K(s, t)$ такая, что для всех $f \in D$

$$Kf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t) \tag{1}$$

для μ-п. в. $s \in X$. Интеграл в (1) понимается в лебеговом смысле. Функция $K(s, t)$ называется *ядром интегрального оператора*.

Интегральный оператор называется *карлемановским*, если его ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условию Карлемана

$$\int\limits_X |K(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } s \in X.$$

Будем говорить, что 0 принадлежит *предельному спектру* плотно определенного в L_2 линейного оператора $M : D_M \to L_2$ (и писать $0 \in \sigma_c(M)$), если в D_M найдется ортонормированная последовательность $\{f_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|Mf_n\| = 0$.

В [2] Нейман доказал следующий результат: если N — плотно определенный в L_2 самосопряженный карлемановский интегральный оператор, то $0 \in \sigma_c(N)$. В [3, с. 754] (см. также теорему 1.7.11 в [4, с. 62]) показано, что если W — определенный на всем L_2 самосопряженный интегральный оператор, то $0 \in \sigma_c(W)$. Возникает вопрос: будет ли 0 принадлежать предельному спектру самосопряженного оператора $S : L_2 \to L_2$, если сужение этого оператора на какое-нибудь всюду плотное в L_2 линейное многообразие является интегральным оператором? Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный, как показывает следующий

Пример. Пусть $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с положительными мерами такая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\mu e_n}<\infty$. Пусть $h_n\in L_2$, $\|h_n\|=1$ и $h_n(s)=0$ вне e_n $(n=1,2,3,\dots)$. Обозначим через $\{h_n^{\perp}\}$ ортонормированный базис в ортогональном дополнении к замкнутой линейной оболочке ортонормированной последовательности $\{h_n\}$. Рассмотрим оператор

$$Af=\sum_{n=1}^{\infty}\big(f,h_n^{\perp}\big)h_n+\sum_{n=1}^{\infty}(f,h_n)h_n^{\perp},\quad f\in L_2.$$

Оператор $A:L_2\to L_2$ самосопряженный, и $\|Af\|=\|f\|$ для всех $f\in L_2$. Следовательно, $0\notin\sigma_c(A)$. Покажем, что сужение оператора A на L_∞ является интегральным оператором с ядром

$$A(s,t)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(s)\overline{h_n^{\perp}(t)}+\sum_{n=1}^{\infty}h_n^{\perp}(s)\overline{h_n(t)}.$$

Так как функции $|h_n(s)|$ равны 0 вне e_n, множества e_n, $n=1,2,3,\dots$, попарно не пересекаются и

$$\int\limits_X\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\mu e_n}\big|h_n^{\perp}(s)\big|\,d\mu(s)\le\sqrt{\mu X}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\mu e_n}<\infty,$$

то для любой функции $f\in L_\infty$ для μ-п. в. $s\in X$

$$\int\limits_X|A(s,t)|\,|f(t)|\,d\mu(t)\le\|f\|_\infty\left(\sqrt{\mu X}\sum_{n=1}^{\infty}|h_n(s)|+\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\mu e_n}\big|h_n^{\perp}(s)\big|\right)<\infty.$$

Следующая теорема показывает, что ответ на поставленный выше вопрос будет положительным, если S — положительный оператор, т. е. $(Sf,f)\ge0$ для всех $f\in L_2$, а линейное многообразие, на котором S — интегральный оператор, удовлетворяет некоторому дополнительному условию. Для формулировки теоремы нам понадобится

Определение. Будем говорить, что линейное многообразие $L\subset L_2$ удовлетворяет *условию* (A), если $P_eL\subset L$ для любого μ-измеримого множества e; здесь $P_ef=\chi_ef$, $f\in L_2$, χ_e — характеристическая функция множества e.

Теорема. *Пусть $S:L_2\to L_2$ — положительный линейный оператор, сужение которого на какое-нибудь всюду плотное в L_2 линейное многообразие, удовлетворяющее условию* (A), *является интегральным оператором. Тогда $0\in\sigma_c(S)$.*

В доказательстве теоремы нам потребуется

Лемма 1. *Пусть $K(s,t)$ — определенная на $X\times X$ $(\mu\times\mu)$-измеримая $(\mu\times\mu)$-п. в. конечная функция; $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная система в L_2. Если для любого $n=1,2,3,\dots$*

$$\psi_n(s)\equiv\int\limits_X|K(s,t)|\,|\varphi_n(t)|\,d\mu(t)<\infty\quad\text{для }\mu\text{-п. в. }s\in X,\tag{2}$$

то существуют не содержащее атомов меры μ множество E, $\mu E > 0$, и функция $g \in L_2$, $g(t) > 0$ для μ-п. в. $t \in X$ такие, что

1) *имеет место неравенство*

$$\psi_E(s) \equiv \int\limits_X \chi_E(s)|K(s,t)|g(t)\,d\mu(t) \leq \chi_E(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}; \tag{3}$$

2) *для всех $n = 1,2,3,\dots$ и для μ-п. в. $t \in X$*

$$|\varphi_n(t)| \leq \alpha_n g(t), \tag{4}$$

где α_n — постоянные;

3) *интегральные операторы K_E и $|K_E|$ с ядрами $\chi_E(s)K(s,t)$ и $\chi_E(s)|K(s,t)|$ действуют из $L_{\infty,1/g}$ в L_∞ и непрерывны; здесь $L_{\infty,1/g} = L_{\infty,1/g}(X,\mu)$ — функциональное пространство с нормой $\|f/g\|_\infty$.*

Доказательство. Пусть X_0, $\mu X_0 > 0$, — множество, не содержащее атомов меры μ, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\mu X_0$. В силу (2) найдутся множество $Y_1 \subset X_0$ и постоянная β_1 такие, что $\mu Y_1 < \varepsilon/2$ и $\psi_1(s) \leq \beta_1$ для всех $s \in X_1 = X_0 \setminus Y_1$. Аналогично найдутся множество $Y_2 \subset X_1$ и постоянная β_2 такие, что $\mu Y_2 < \varepsilon/4$ и $\psi_2(s) \leq \beta_2$ для всех $s \in X_2 = X_1 \setminus Y_2$. Продолжая этот процесс, получим последовательности $\{X_n\}$, $\{\beta_n\}$ такие, что $\psi_n(s) \leq \beta_n$ для всех $s \in X_n$, $n = 1,2,3,\dots$. Пусть $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Тогда $\mu E > \frac{1}{2}\mu X_0 > 0$ и $\psi_n(s) \leq \beta_n$ для всех $s \in E$ и $n = 1,2,3,\dots$. Положим $\gamma_n = (\beta_n + 1)^{-1}$ и определим функцию g равенством

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n^2}|\varphi_n(t)|.$$

Ясно, что $g \in L_2$ и выполняются (4) с $\alpha_n = n^2\gamma_n^{-1}$. Кроме того,

$$\psi_E(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_E(s)\frac{\gamma_n}{n^2}\psi_n(s) \leq \chi_E(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\beta_n\gamma_n \leq \chi_E(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Проверим, что $g(t) > 0$ для μ-п. в. $t \in X$. Предположим противное: пусть существует множество e_0, $\mu e_0 > 0$, такое, что $g(t) = 0$ для всех $t \in e_0$. Так как $|\varphi_n(t)| \leq \alpha_n g(t)$, $n = 1,2,3,\dots$, то $\varphi_n(t) = 0$ для всех $t \in e_0$ и n. Следовательно, $(\chi_{e_0},\varphi_n) = 0$ для всех n, что противоречит полноте системы $\{\varphi_n\}$. Покажем справедливость третьего утверждения леммы. Для любой функции $f \in L_{\infty,1/g}$ в силу (3) имеем

$$\|\,|K_E|f\|_\infty \leq \|\,|K_E|\,|f|\,\|_\infty \leq \|f/g\|_\infty\|\psi_E\|_\infty,$$
$$\|K_E f\|_\infty \leq \|\,|K_E|\,|f|\,\|_\infty \leq \|f/g\|_\infty\|\psi_E\|_\infty.$$

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $S : L_2 \to L_2$ — положительный линейный оператор, H — всюду плотное в L_2 линейное многообразие, удовлетворяющее условию (A), сужение оператора S на H — интегральный оператор и $K(s,t)$ — его ядро. Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная система, принадлежащая H. Тогда для любого $n = 1,2,3,\dots$ выполнено (2).

Положим $\mathscr{L}_\infty = L_{\infty,1/g}$, $\mathscr{L}_1 = L_{1,g}$, где $L_{1,g}$ — функциональное пространство с нормой

$$\|f\|_{1,g} = \int\limits_X |f(t)|g(t)\,d\mu(t). \tag{5}$$

В силу $g \in L_2$ имеем $\mathscr{L}_\infty \subset L_2 \subset \mathscr{L}_1$. При этом $\mathscr{L}_\infty$ всюду плотно в L_2, $\mathscr{L}_1$ сепарабельно и $\mathscr{L}_1^* = \mathscr{L}_\infty$. По лемме 1.3.5 из [4, с. 28] найдется множество $G \subset E$, $\mu G > 0$, такое, что $K_G = P_G K_E$ и $|K_G| = P_G|K_E|$ — вполне непрерывные операторы, действующие из $\mathscr{L}_\infty$ в L_∞, причем K_G и $|K_G|$ отображают каждую последовательность, сходящуюся в $\sigma(\mathscr{L}_\infty, \mathscr{L}_1)$-топологии, в последовательность, сходящуюся по норме L_∞. Из $\mu X < \infty$ следует, что K_G, $|K_G|$ действуют из $\mathscr{L}_\infty$ в L_2 и вполне непрерывны. Так как для всех $f \in \mathscr{L}_\infty$ и $h \in L_2$

$$\int\limits_X \int\limits_X \chi_G(s)|K(s,t)|\,|h(s)|\,d\mu(s)|f(t)|\,d\mu(t)$$
$$= \int\limits_X \int\limits_X \chi_G(s)|K(s,t)|\,|f(t)|\,d\mu(t)|h(s)|\,d\mu(s) \le \|h\|\sqrt{\mu X}\|\psi_E\|_\infty\|f/g\|_\infty,$$

то сопряженный к интегральному оператору $|K_G|$ интегральный оператор

$$|K_G|^*h(t) = \int\limits_X \chi_G(s)|K(s,t)|h(s)\,d\mu(s), \quad h \in L_2,$$

действует из L_2 в $\mathscr{L}_1$ и вполне непрерывен. Следовательно, сопряженный к интегральному оператору $K_G : \mathscr{L}_\infty \to L_2$ интегральный оператор K_G^* действует из L_2 в $\mathscr{L}_1$ и вполне непрерывен.

Пусть $H_0 = H \cap \mathscr{L}_\infty$ и z — произвольный элемент из $\mathscr{L}_\infty$. Имеем $P_e H_0 \subset H_0$ для любого μ-измеримого множества e. Так как $z \in L_2$ и $\{\varphi_n\} \subset H_0$, найдется последовательность $\{u_n\} \subset H_0$ такая, что $\|u_n - z\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $u_n \to z$ по мере. По теореме Ф. Рисса найдется последовательность $\{v_m\} = \{u_{n_m}\}$, сходящаяся μ-п. в. к z. Пользуясь теоремой Егорова, выберем возрастающую к X последовательность μ-измеримых множеств $\{e_n\}$ так, что на каждом e_n последовательность $\{v_m\}$ равномерно сходится к z и $\frac{1}{g}\chi_{e_n} \in L_\infty$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда для любой функции $\psi \in \mathscr{L}_1$ при $m \to \infty$

$$\int\limits_X \psi(\chi_{e_n}\bar{v}_m - \chi_{e_n}\bar{z})\,d\mu = \int\limits_X \frac{1}{g}(\chi_{e_n}\bar{v}_m - \chi_{e_n}\bar{z})\psi g\,d\mu \to 0.$$

Таким образом, $\{\chi_{e_n}v_m\}$ сходится при $m \to \infty$ к $\chi_{e_n}z$ в $\sigma(\mathscr{L}_\infty, \mathscr{L}_1)$-топологии. По теореме Лебега о мажорированной сходимости $\{\chi_{e_n}z\}$ сходится к z в $\sigma(\mathscr{L}_\infty, \mathscr{L}_1)$-топологии. Покажем, что $P_G S z = K_G z$. Нам потребуется

Лемма 2. *Пусть $w \in \mathscr{L}_\infty$, $\{w_j\} \subset \mathscr{L}_\infty$, $P_G S w_j = K_G w_j$ для всех j и $\{w_j\}$ сходится к w в $\sigma(\mathscr{L}_\infty, \mathscr{L}_1)$-топологии. Тогда $P_G S w = K_G w$.*

Доказательство. Так как S — линейный положительный оператор на комплексном L_2, то, как известно, S — самосопряженный непрерывный оператор. В силу того, что $\mathscr{L}_\infty \subset \mathscr{L}_2 \subset \mathscr{L}_1$, $\{w_j\}$ слабо сходится в L_2 к w. Поэтому $\{P_G S w_j\}$ слабо сходится в L_2 к $P_G S w$. Но $\{K_G w_j\}$ сходится к $K_G w$ по норме L_∞ и $K_G w_j = P_G S w_j$, $j = 1, 2, \dots$. Следовательно, $P_G S w = K_G w$.

Зафиксируем n. Так как $\chi_{e_n}v_m \in H_0 \subset H$, $m = 1, 2, 3, \dots$, то $P_G S \chi_{e_n} v_m = K_G \chi_{e_n} v_m$. Применив лемму 2 к последовательности $\{\chi_{e_n}v_m\}$ и элементу $\chi_{e_n}z$, получим $P_G S z_n = K_G z_n$, где $z_n = \chi_{e_n}z$. Снова применив лемму 2 к $\{z_n\}$ и z, получим $P_G S z = K_G z$ для любого $z \in \mathscr{L}_\infty$.

В силу того, что $K_G^* : L_2 \to \mathscr{L}_1$ — вполне непрерывный оператор, отсюда вытекает, что $SP_G : L_2 \to \mathscr{L}_1$ — вполне непрерывный оператор. Действительно, оператор $K_G : \mathscr{L}_\infty \to L_2$ плотно определен в L_2, и $K_G \subset P_G S$. Тогда $SP_G \subseteq K_G^*$, поэтому $SP_G = K_G^*$. Следовательно, SP_G отображает каждое ограниченное множество U в L_2 в множество $K_G^* U$, компактное в $\mathscr{L}_1$.

Обозначим через $F \subset G$, $\mu F > 0$, множество, на котором функция $[g(t)]^{-1}$ ограничена некоторой постоянной d. Так как $F \subset E$ и E не содержит атомов меры μ, можно построить ортонормированную последовательность $\{r_{n,F}\}$ обобщенных функций Радемахера с носителями в F (см., например, [4, с. 11, 12]). Эти функции обладают свойством

$$|r_{n,F}(t)| = \frac{1}{\sqrt{\mu F}} \chi_F(t)$$

для всех $t \in X$ и $n = 1, 2, 3, \dots$. В силу слабой сходимости $\{r_{n,F}\}$ к 0 и полной непрерывности SP_G как оператора из L_2 в $\mathscr{L}_1$ имеем

$$\|Sr_{n,F}\|_{1,g} = \|SP_G r_{n,F}\|_{1,g} \to 0$$

при $n \to \infty$; здесь $\|\cdot\|_{1,g}$ — норма в $\mathscr{L}_1$, определяемая равенством (5). Отсюда при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \|S^{1/2} r_{n,F}\|^2 &= (Sr_{n,F}, r_{n,F}) \\ &\le \frac{1}{\sqrt{\mu F}} \int\limits_F |Sr_{n,F}| \, d\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu F}} \int\limits_F \frac{1}{g} |Sr_{n,F}| \, g \, d\mu \le \frac{d}{\sqrt{\mu F}} \|Sr_{n,F}\|_{1,g} \to 0. \end{aligned}$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|Sr_{n,F}\| \le \|S^{1/2}\| \lim_{n\to\infty} \|S^{1/2} r_{n,F}\| = 0.$$

Таким образом, $0 \in \sigma_c(S)$.

Следствие 1. *Пусть $T : L_2 \to L_2$ — положительный линейный оператор и $0 \notin \sigma_c(T)$. Тогда сужение оператора T на любое всюду плотное в L_2 линейное многообразие, удовлетворяющее условию* (A), *не является интегральным оператором.*

Следствие 2. *Сужение тождественного оператора в L_2 на любое всюду плотное в L_2 линейное многообразие, удовлетворяющее условию* (A), *не является интегральным оператором.*

Следствие 2 дополняет результат Заанена [5, с. 225] о неинтегральности сужения тождественного оператора на любой порядковый идеал в L_2. Неинтегральность тождественного оператора на всем L_2 установлена Нейманом [6, с. 26]. Другие доказательства этого результата Неймана даны в [4, с. 20; 7, с. 56; 8, с. 402; 9, с. 53].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stone M. H.* Linear transformations in Hilbert space. New York: Amer. Math. Soc., 1932.
2. *Neumann J.* Charakterisierung des Spectrums eines Integraloperators // Actual. Sci. Ind. Paris. 1935. N 229.
3. *Коротков В. Б.* О некоторых свойствах частично интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 4. С. 752–754.
4. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
5. *Zaanen A.* Riesz spaces. II.. Amsterdam: North Holl. Publ. Co., 1983.
6. *Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
7. *Бухвалов А. В.* Приложения методов теории порядково ограниченных операторов в пространствах L^P // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 6. С. 37–83.

8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
9. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 3 марта 2009 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090