Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 517.535

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

А. В. Олесов

Аннотация. Усилены и дополнены результаты В. И. Смирнова, А. Азиза и К. М. Давуда для алгебраических полиномов, обобщающие классические неравенства Бернштейна и Эрдеша — Лэкса.

Ключевые слова: полином, дифференциальное неравенство, ограничения на нули.

1. Введение. Имеет место следующая теорема С. Н. Бернштейна [1; 2, с. 168].

Теорема А. *Пусть $H(z)$ — алгебраический полином степени $n \geq 1$, все нули которого лежат в круге $|z| \leq 1$; $P(z)$ — алгебраический полином степени $\leq n$ такой, что $|P(z)| \leq |H(z)|$ при $|z| = 1$. Тогда*

$$|P'(z)| \leq |H'(z)| \quad \text{при } |z| = 1.$$

Отвечая на вопрос С. Н. Бернштейна [3, с. 497–499], В. И. Смирнов [4, с. 356] доказал, что в условиях теоремы А справедливо неравенство

$$|zP'(z) - \alpha P(z)| \leq |zH'(z) - \alpha H(z)| \tag{1}$$

при любом z, $|z| \geq 1$, и любом α из образа круга $|\zeta| \leq |z|$ при отображении функцией $\zeta n/(\zeta + 1)$. В случае $H(z) = z^n \max\limits_{|z|=1} |P(z)|$ отсюда вытекает оценка

$$|P'(z)| \leq \frac{n}{2}\{\max_{|z|=1} |P(z)| + |P(z)|\} \quad \text{при } |z| = 1, \tag{2}$$

уточняющая классическое неравенство Бернштейна [5]

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \leq n \max_{|z|=1} |P(z)|.$$

Основной результат настоящей работы (теорема 1) расширяет область изменения α в неравенстве Смирнова (1) в зависимости от старших коэффициентов и свободных членов полиномов $H(z)$ и $P(z)$. Получен ряд следствий. Следствие 4 усиливает неравенство (2) в зависимости от старшего коэффициента и

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00028), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2810.2008.1) и ДВО РАН (грант 09–I–П4–02).

свободного члена полинома. Следствия 3 и 5 содержат следующие утверждения: если $P(z)$ — алгебраический полином степени n, то при любом z, $|z|=1$, $P(z)\neq 0$,

$$zP'(z)/P(z) \in \{w : |w| + |w-n| \le \max_{|z|=1} |P(z)|n/|P(z)|\};$$

если дополнительно $P(z)\neq 0$ при $|z|<1$, то

$$zP'(z)/P(z) \in \{w : |w-n| - |w| \ge \min_{|z|=1} |P(z)|n/|P(z)|\}.$$

Отсюда, очевидно, вытекает результат из [6]

$$\max_{|z|=1} |P'(z)| \le \frac{n}{2}\{\max_{|z|=1} |P(z)| - \min_{|z|=1} |P(z)|\}$$

для алгебраического полинома степени n, отличного от нуля в единичном круге.

2. Вспомогательные утверждения. Следующая лемма принадлежит В. Н. Дубинину [7, теорема 6].

Лемма 1. *Для полинома $G(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ степени $n \ge 1$, все нули которого лежат в круге $|z|\le 1$, при $|z|=1$, $G(z)\neq 0$, имеет место неравенство*

$$\operatorname{Re}\frac{zG'(z)}{G(z)} \ge \frac{n+\Lambda}{2}, \quad \text{где } \Lambda = \frac{|c_n| - |c_0|}{|c_n| + |c_0|} \quad (\Lambda \ge 0).$$

Лемма 2. *В условиях леммы 1 при $|z|\ge 1$ и $\lambda \le \Lambda$ справедливо неравенство*

$$|z||zG'(z) - nG(z)| \le |zG'(z) - \lambda G(z)|.$$

Доказательство. Случай $\Lambda = n = 1$, т. е. случай $G(z) = c_1 z$, очевиден. Пусть $\Lambda < n$. В силу леммы 1 при $|z|=1$, $G(z)\neq 0$, и $\lambda\le\Lambda$ имеем $|\operatorname{Re}\{zG'(z)/G(z)\} - n| \le \operatorname{Re}\{zG'(z)/G(z)\} - \lambda$, т. е.

$$|zG'(z)/G(z) - n| \le |zG'(z)/G(z) - \lambda|. \tag{3}$$

Ввиду принципа максимума и леммы 1 $\operatorname{Re}\{zG'(z)/G(z)\} \ge \frac{n+\Lambda}{2} > \lambda$ при $|z|>1$. Следовательно, правая часть (3) не обращается в нуль при $|z|>1$. Предел правой части (3) при $z\to\infty$ равен $n-\lambda\neq 0$, а левой — нулю. Следовательно, функция $z[G'(z) - nG(z)]/[zG'(z) - \lambda G(z)]$ регулярна в области $|z|\ge 1$ расширенной плоскости и по модулю не превосходит единицы на окружности $|z|=1$. Остается воспользоваться принципом максимума модуля.

3. Основные результаты. Для $n\in\mathbb{N}$, $r\ge 1$ и $0\le\lambda\le 1$ положим $D_{n,1,\lambda} = \left\{w : \operatorname{Re} w < \frac{n+\lambda}{2}\right\}$,

$$D_{n,r,\lambda} = \left\{w\in\mathbb{C} : \left|w - \frac{r^2 n - \lambda}{r^2-1}\right| > \frac{r(n-\lambda)}{r^2-1}\right\}, \quad \text{если } r>1.$$

Если $\lambda < n$, то $D_{n,r,\lambda}$ является образом множества $\{\zeta : |\zeta| < r,\ \zeta\neq -1\}$ при отображении функцией $w = \frac{\zeta n + \lambda}{\zeta + 1}$. Через $\overline{D}_{n,r,\lambda}$ обозначим замыкание множества $D_{n,r,\lambda}$ в $\mathbb{C}$.

Теорема 1. *Пусть* $H(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} b_j z^j$ *— полином степени* $n \geq 1$, *все нули которого лежат в круге* $|z| \leq 1$; $P(z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j z^j$ *— полином степени* $\leq n$ *такой, что* $|P(z)| \not\equiv |H(z)|$ *и*

$$|P(z)| \leq |H(z)| \quad \text{при } |z| = 1. \tag{4}$$

Обозначим $\Lambda = \frac{1-d}{1+d}$, *где* $d = \max\limits_{|w|=1} \left|\frac{a_0 + wb_0}{a_n + wb_n}\right|$. *Тогда* $d \leq 1$ *и при любых* z, $|z| \geq 1$, *и* $\alpha \in \overline{D}_{n,|z|,\Lambda}$ *имеет место неравенство*

$$|zP'(z) - \alpha P(z)| \leq |zH'(z) - \alpha H(z)|. \tag{5}$$

Доказательство. Случай $\Lambda = n = 1$, т. е. случай $H(z) = b_1 z$ и $P(z) = a_1 z$, очевиден. Пусть $\Lambda < n$. В силу (4) и принципа максимума модуля

$$|P(z)| < |H(z)| \quad \text{при } |z| > 1 \text{ и } |a_n| < |b_n|.$$

При любом γ, $|\gamma| \geq 1$, $P(z) - \gamma H(z)$ — полином степени n, не имеющий нулей в области $|z| > 1$. Следовательно, $\left|\frac{a_0 - \gamma b_0}{a_n - \gamma b_n}\right| \leq 1$, и по принципу максимума модуля

$$\left|\frac{a_0 - \gamma b_0}{a_n - \gamma b_n}\right| \leq \max_{|\gamma|=1} \left|\frac{a_0 - \gamma b_0}{a_n - \gamma b_n}\right| \leq 1. \tag{6}$$

Зафиксируем z, $|z| \geq 1$, такое, что $|P(z)| < |H(z)|$, и произвольное β, $|\beta| > 1$. Для полинома $G(z) = P(z) - \gamma H(z)$, где γ, $|\gamma| \geq 1$, имеем

$$|z||zG'(z) - nG(z)| \leq |zG'(z) - \Lambda G(z)| \neq 0,$$

что вытекает из леммы 2 ввиду (6) и неравенства $\Lambda < n$. В этом случае, очевидно,

$$|z||zG'(z) - nG(z)| < |\beta||zG'(z) - \Lambda G(z)|,$$

поэтому $z[zG'(z) - nG(z)] \neq -\beta[zG'(z) - \Lambda G(z)]$, т. е.

$$\beta[zP'(z) - \Lambda P(z)] + z[zP'(z) - nP(z)] \neq \gamma\{\beta[zH'(z) - \Lambda H(z)] + z[zH'(z) - nH(z)]\}.$$

Ввиду произвольности γ, $|\gamma| \geq 1$,

$$|\beta[zP'(z) - \Lambda P(z)] + z[zP'(z) - nP(z)]| \neq |\gamma||\beta[zH'(z) - \Lambda H(z)] + z[zH'(z) - nH(z)]|. \tag{7}$$

В силу (6) $|b_0/b_n| \leq d$, откуда $\Lambda \leq \frac{|b_n| - |b_0|}{|b_n| + |b_0|}$. Ввиду этого из лемм 1 и 2 следует, что правая часть (7) не равна нулю. Так как при достаточно большом $|\gamma|$ имеет место неравенство

$$|\beta[zP'(z) - \Lambda P(z)] + z[zP'(z) - nP(z)]| < |\gamma||\beta[zH'(z) - \Lambda H(z)] + z[zH'(z) - nH(z)]|,$$

в силу (7) оно имеет место при любом $|\gamma| \geq 1$. Отсюда приходим к (5), где $\alpha = \frac{zn + \beta\Lambda}{z + \beta}$. Теорема доказана.

Не составляет труда убедиться в справедливости формулы

$$\max_{|w|=1} \left|\frac{a + w}{b + w}\right| = \frac{|\bar{a}b - 1| + |a - b|}{|1 - |b|^2|} \quad \text{при } a, b \in \mathbb{C},\ |b| \neq 1, \tag{8}$$

на основании которой в обозначениях теоремы 1

$$d = \frac{|a_0\bar{a}_n - b_0\bar{b}_n| + |a_0 b_n - a_n b_0|}{|b_n|^2 - |a_n|^2}.$$

В силу того, что

$$\overline{D}_{n,r_1,\lambda} \subset D_{n,r_2,\lambda}, \quad \text{если } r_1 < r_2,\ \lambda < n,$$

(5) имеет место при $|z| \geq \rho$ и $\alpha \in \overline{D}_{n,\rho,\Lambda}$, где $\rho \geq 1$ — любое фиксированное число. В. И. Смирнов [4, с. 356] доказал (5) при $|z| \geq \rho$ и $\alpha \in \overline{D}_{n,\rho,0}$, где $\rho \geq 1$, и установил все случаи равенства, когда полином $H(z)$ не имеет нулей на окружности $|z| = 1$, а его степень не менее 2. Так как

$$\overline{D}_{n,r,\lambda_1} \subset D_{n,r,\lambda_2}, \quad \text{если } \lambda_1 < \lambda_2 < n,$$

в теореме 1 область изменения α в неравенстве Смирнова расширяется.

При доказательстве теоремы 1 установлено, что в случае $\Lambda < n$ неравенство (5) является строгим при любом z, $|z| \geq 1$, таком, что $|P(z)| \neq |H(z)|$, и любом $\alpha \in D_{n,|z|,\Lambda}$.

Следующие два утверждения отвечают на вопрос о равенстве в (5) при $|z| > 1$.

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Если при некоторых ζ, $|\zeta| > 1$, и β, $|\beta| = 1$, имеет место равенство*

$$\zeta H'(\zeta) - \frac{\zeta n + \beta\Lambda}{\zeta + \beta} H(\zeta) = 0, \tag{9}$$

то $H(z) = b_n(z+\beta)^n$ или $H(z) = b_n(z+\beta)^{n-1}z$ и $P(z)/H(z) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Случай $n = \Lambda = 1$ очевиден. Пусть $n > \Lambda$. Запишем (9) в виде

$$\beta[\zeta H'(\zeta) - \Lambda H(\zeta)] = -\zeta[\zeta H'(\zeta) - nH(\zeta)].$$

В силу леммы 2 и принципа максимума модуля (9) имеет место при любом комплексном ζ. Решая данное дифференциальное уравнение, получим

$$H(z) = C(z+\beta)^n \left(\frac{z}{z+\beta}\right)^{\Lambda}, \quad C = \mathrm{const}.$$

Это алгебраический полином только в случае $\Lambda = 0$ или $\Lambda = 1$. Тождество $P(z)/H(z) \equiv \mathrm{const}$ вытекает из условия (4).

Утверждение 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и* $\frac{P(z)}{H(z)} \not\equiv \mathrm{const}$. *Равенство*

$$\zeta P'(\zeta) - \frac{\zeta n + \beta\Lambda}{\zeta + \beta} P(\zeta) = \zeta H'(\zeta) - \frac{\zeta n + \beta\Lambda}{\zeta + \beta} H(\zeta) \tag{10}$$

при некоторых ζ, $|\zeta| > 1$, и β, $|\beta| = 1$, имеет место тогда и только тогда, когда

$$H(z) = (z+\beta)^{n-1}(b_n z + b) \quad \text{и} \quad P(z) = (z+\beta)^{n-1}(a_n z + a),$$

или

$$H(z) = (z+\beta)^{n-2}(b_n z + b)z \quad \text{и} \quad P(z) = (z+\beta)^{n-2}(a_n z + a)z,$$

где $|b_n| > |b| \geq 0$,

$$a_n = b_n + c\frac{|b_n|^2 - |b|^2}{\beta\bar{b} - \bar{b}_n}, \quad a = b + \beta c\frac{|b_n|^2 - |b|^2}{\beta\bar{b} - \bar{b}_n}, \quad 0 < c \leq 1.$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть выполняется (10). В силу теоремы 1 и утверждения 1

$$\left|zP'(z)-\frac{zn+\beta\Lambda}{z+\beta}P(z)\right|\le\left|zH'(z)-\frac{zn+\beta\Lambda}{z+\beta}H(z)\right|\ne 0\quad\text{при } |z|>1.$$

Отсюда и из принципа максимума модуля заключаем, что (10) имеет место при любом комплексном ζ. Разрешая дифференциальное уравнение (10) относительно $P(z)-H(z)$, находим

$$P(z)-H(z)=C(z+\beta)^n\quad\text{или}\quad P(z)-H(z)=C(z+\beta)^{n-1}z,\ C=\text{const},$$

при этом $\Lambda=0$ или $\Lambda=1$ соответственно. Отметим, что если $\Lambda=1$, то $b_0=0$ и $a_0=0$. В силу (4) полином $H(z)$ может иметь на окружности $|z|=1$ нуль только в точке $-\beta$. Обозначим через k, $k\ge 0$, кратность этого нуля и положим

$$H_*(z)=H(z)/(z+\beta)^k,\quad P_*(z)=P(z)/(z+\beta)^k,\quad\text{если } \Lambda=0,$$

$$H_*(z)=\frac{H(z)}{z(z+\beta)^k},\quad P_*(z)=\frac{P(z)}{z(z+\beta)^k},\quad\text{если } \Lambda=1.$$

Обозначим через m степень полинома $H_*(z)$. Равенство (10) можно записать в виде

$$P_*'(z)-\frac{m}{z+\beta}P_*(z)\equiv H_*'(z)-\frac{m}{z+\beta}H_*(z). \tag{11}$$

Полином $H_*(z)$ степени m не имеет нулей в области $|z|\ge 1$, а полином $P_*(z)$ степени $\le m$ удовлетворяет неравенству $|P_*(z)|\le|H_*(z)|$ при $|z|=1$. В. И. Смирнов [4, с. 357–359] доказал, что при этих условиях и условии $m\ge 2$ тождество (11) влечет тождество $P_*(z)\equiv H_*(z)$, невозможное в условиях утверждения. Очевидно, случай $m=0$ также невозможен. Пусть $H_*(z)=b_nz+b$, $P_*(z)=a_nz+a$. Из (11) находим

$$P_*(z)-H_*(z)=C(z+\beta),\quad C=\text{const}.$$

Следовательно, $P_*(z)=b_nz+b+C(z+\beta)$. Используя (8), не составляет труда показать, что в этом случае условие (4) выполняется тогда и только тогда, когда $C=c\frac{|b_n|^2-|b|^2}{\beta b-b_n}$, где $0<c\le 1$. Достаточность проверяется непосредственной подстановкой. Утверждение доказано.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *при* z, $|z|\ge 1$, $P(z)\ne 0$, *имеем*

$$\left|\frac{zP'(z)}{P(z)}+\overline{\frac{zH'(z)}{H(z)}}-n-\Lambda\right|+\left|\frac{zP'(z)}{P(z)}-\frac{zH'(z)}{H(z)}\right|\le 2\frac{|H(z)|}{|P(z)|}\left[\operatorname{Re}\frac{zH'(z)}{H(z)}-\frac{n+\Lambda}{2}\right].$$

Доказательство. Из (8) не составляет труда вывести формулу

$$\sup_{\operatorname{Re}\alpha=A}\left|\frac{u-\alpha}{v-\alpha}\right|=\frac{|v+\bar u-2A|+|u-v|}{2|\operatorname{Re}v-A|}\quad\text{при}\quad A\in\mathbb{R},\ u,v\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}v\ne A.$$

Максимизируя отношение левой части (5) к правой части (5) по α, $\operatorname{Re}\alpha=\frac{n+\Lambda}{2}$, и учитывая, что это отношение не превосходит единицы, получим доказываемое неравенство в случае $\operatorname{Re}\frac{zH'(z)}{H(z)}\ne\frac{n+\Lambda}{2}$. В противном случае требуемое сразу следует из (5).

Из следствия 1 с очевидностью вытекает

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 при z, $|z| \geq 1$, $P(z) \neq 0$, имеем*

$$|P(z)|\left|\operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} - \frac{n+\Lambda}{2}\right| \leq |H(z)|\left[\operatorname{Re}\frac{zH'(z)}{H(z)} - \frac{n+\Lambda}{2}\right].$$

Следствие 3. *Пусть полином $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $|a_n| < 1$, удовлетворяет условию $|P(z)| \leq 1$ при $|z| = 1$. Обозначим*

$$\Lambda_1 = \frac{1 - |a_n| - |a_0|}{1 - |a_n| + |a_0|}, \quad \Lambda_2 = \frac{1 - |a_0| - |a_n|}{1 - |a_0| + |a_n|}.$$

Тогда при z, $|z| = 1$, $P(z) \neq 0$ справедливы неравенства

$$\left|\frac{zP'(z)}{P(z)} - \Lambda_1\right| + \left|\frac{zP'(z)}{P(z)} - n\right| \leq \frac{n - \Lambda_1}{|P(z)|},$$

$$\left|\frac{zP'(z)}{P(z)}\right| + \left|\frac{zP'(z)}{P(z)} - n + \Lambda_2\right| \leq \frac{n - \Lambda_2}{|P(z)|}.$$

Доказательство. Следствие 1 для полиномов $H(z) = z^n$ и $P(z)$ дает первое неравенство. Для получения второго неравенства нужно применить следствие 1 к полиномам $H(z) = z^n$ и $P_*(z) := z^n\overline{P(1/\bar{z})} = \bar{a}_n + \dots + \bar{a}_0 z^n$ и воспользоваться тождеством

$$\frac{zP_*'(z)}{P_*(z)} \equiv n - \frac{1}{z}\frac{\overline{P'(1/\bar{z})}}{\overline{P(1/\bar{z})}}.$$

Следствие 4. *Пусть полином $P(z) = \sum_{j=l}^{n} a_j z^j$, $|a_n| \neq 1$, $0 \leq l < n$, удовлетворяет условию $|P(z)| \leq 1$ при $|z| = 1$. Обозначим*

$$\Lambda_1 = \frac{1 - |a_n| - |a_l|}{1 - |a_n| + |a_l|}, \quad \Lambda_2 = \frac{1 - |a_l| - |a_n|}{1 - |a_l| + |a_n|}.$$

Тогда при $|z| = 1$ имеем

$$|P'(z)| \leq \min\left\{\frac{n - l - \Lambda_1}{2} + |P(z)|\frac{n + l + \Lambda_1}{2},\ \frac{n - l - \Lambda_2}{2} + |P(z)|\frac{n + l - \Lambda_2}{2}\right\}.$$

Доказательство вытекает из следствия 3 для полинома $P(z)/z^l$.

Следствие 5. *Пусть полином $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ степени $n \geq 1$ удовлетворяет условию $|P(z)| \geq 1$ при $|z| \leq 1$. Обозначим*

$$\Lambda_1 = \frac{|a_0| - |a_n| - 1}{|a_0| + |a_n| + 1}, \quad \Lambda_2 = \frac{|a_0| - |a_n| - 1}{|a_0| + |a_n| - 1}.$$

Тогда при z, $|z| = 1$, имеют место оценки

$$\left|\frac{zP'(z)}{P(z)} - n\right| - \left|\frac{zP'(z)}{P(z)} + \Lambda_1\right| \geq \frac{n + \Lambda_1}{|P(z)|},$$

$$\left|\frac{zP'(z)}{P(z)} - n + \Lambda_2\right| - \left|\frac{zP'(z)}{P(z)}\right| \geq \frac{n - \Lambda_2}{|P(z)|}.$$

Доказательство. Полиномы $H(z) = z^n\overline{P(1/\bar{z})}$ и $P_1(z) \equiv 1$ удовлетворяют условиям теоремы 1. В обозначениях теоремы 1 для данных полиномов имеем $\Lambda = \Lambda_1$. Не составляет труда проверить, что

$$\frac{zH'(z)}{H(z)} = n - \frac{\overline{zP'(z)}}{\overline{P(z)}}, \quad \operatorname{Re}\frac{zH'(z)}{H(z)} - \frac{n+\Lambda_1}{2} = \frac{n-\Lambda_1}{2} - \operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} \quad \text{при } |z| = 1;$$

$$\frac{n-\Lambda_1}{2} - \operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} \equiv \frac{|zP'(z)/P(z) - n|^2 - |zP'(z)/P(z) + \Lambda_1|^2}{2(n+\Lambda_1)}.$$

Применяя следствие 1 к полиномам $H(z)$ и $P_1(z)$ и сокращая левую и правую части получаемого неравенства на $|zP'(z)/P(z)-n|+|zP'(z)/P(z)+\Lambda_1|$, получим первое соотношение. Полиномы $H(z)$ и $P_2(z) = z^n$ удовлетворяют условиям теоремы 1. В обозначениях теоремы 1 для данных полиномов $\Lambda = \Lambda_2 < n$. Применяя следствие 1 и используя тождество

$$\frac{n-\Lambda_2}{2} - \operatorname{Re}\frac{zP'(z)}{P(z)} \equiv \frac{|zP'(z)/P(z) - n + \Lambda_2|^2 - |zP'(z)/P(z)|^2}{2(n-\Lambda_2)},$$

придем к второму соотношению.

Следствие 6. *Пусть* $H(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j z^j$ *— полином степени* $\le n$, $n \ge 1$, *не имеющий нулей в круге* $|z| < 1$; $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ *— полином степени* $\le n$ *такой, что* $|P(z)| \not\equiv |H(z)|$ *и* $|P(z)| \le |H(z)|$ *при* $|z| = 1$. *Обозначим*

$$\varLambda = \frac{1-d}{1+d}, \quad \text{где } d = \max_{|w|=1}\left|\frac{a_n + wb_n}{a_0 + wb_0}\right| \quad (d \le 1).$$

Тогда

$$|zP'(z) - \alpha P(z)| \le |zH'(z) - \alpha H(z)|$$

при $|z| = 1$ *и* $\operatorname{Re}\alpha \ge \frac{n-\varLambda}{2}$, *или* $|z| < 1$ *и* $\alpha \in \left\{w : \left|w + \frac{|z|^2(n-\varLambda)}{1-|z|^2}\right| \ge \frac{|z|(n-\varLambda)}{1-|z|^2}\right\}$.

Доказательство. Применяем теорему 1 к полиномам $H_*(z) = z^n\overline{H(1/\bar{z})}$ и $P_*(z) = z^n\overline{P(1/\bar{z})}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bernstein S. N.* Sur la limitation des dérivées des polynomes // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris. 1930. V. 190. P. 338–341.
2. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1.
3. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. I.
4. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.
5. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. 1912. Т. 13. С. 49–194.
6. *Aziz A., Dawood Q. M.* Inequalities for a polynomial and its derivative // J. Approximation Theory. 1988. V. 54, N 3. P. 306–313.
7. *Дубинин В. Н.* О применении леммы Шварца к неравенствам для целых функций с ограничениями на нули // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2006. Т. 337. С. 101–112.

Статья поступила 8 декабря 2008 г., окончательный вариант — 21 августа 2009 г.

Олесов Александр Викторович
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7, Владивосток 690041
olesov1@iam.dvo.ru