Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 512.544

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ НЕАБЕЛЕВЫХ ГРУПП С ПОМОЩЬЮ СКРУЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

А. Л. Мыльников

Аннотация. Доказано, что если класс групп, порожденных одним и тем же с точностью до изоморфизма скрученным подмножеством группы, включает конечную простую неабелеву группу, то группы данного класса являются конечными совершенными центральными расширениями этой простой группы.

Ключевые слова: скрученное подмножество, скрученная подгруппа, конечная простая неабелева группа.

Основным объектом исследований в настоящей работе является понятие скрученного подмножества. Следуя [1], приведем его определение.

Определение 1. Подмножество K группы G называется *скрученным*, если $1 \in K$ и $xy^{-1}x \in K$ для любых x, y из K.

Пусть G — группа и w — инволюция из G. В качестве примеров скрученных подмножеств выступают следующие подмножества, образованные с помощью инволюции w: $T = w^G \cup \{1\}$, $I = \{g \in G : g^w = g^{-1}\}$, $F = \{g^{-1}g^w : g \in G\}$.

Определение 2. Пусть G_i — группа, K_i — скрученное подмножество группы G_i, $i = 1, 2$. Скрученное подмножество K_1 *изоморфно* K_2, если существует биекция $\varphi : K_1 \to K_2$ такая, что $\varphi(1) = 1$ и для любых элементов x, y из K_1 справедливо $\varphi(xy^{-1}x) = \varphi(x)[\varphi(y)]^{-1}\varphi(x)$.

Изоморфизм между группами G_1, G_2 будем обозначать через $G_1 \cong G_2$, а изоморфизм между скрученными подмножествами K_1, K_2 соответственно $K_1 \simeq K_2$.

Основной вопрос, рассматриваемый в настоящей работе, состоит в следующем. *Пусть G — конечная простая неабелева группа и K — скрученное подмножество группы G такое, что $G = \langle K\rangle$, $G \neq K$. Насколько сильно строение произвольной группы, порожденной изоморфным с K скрученным подмножеством, отличается от строения группы G?*

Ранее в работе [2] было показано, что для данного конечного скрученного подмножества K существует лишь конечное множество неизоморфных групп, порожденных изоморфными с K скрученными подмножествами, причем все эти группы конечны. Отметим также, что в разд. 2 настоящей работы приводится пример двух неизоморфных групп, порожденных изоморфными скрученными подмножествами. В этом же разделе доказывается тот факт, что *в классе групп,*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта СФУ по Молодежному научному проекту № 74.2008.

порожденных «одним и тем же» скрученным подмножеством, существует такая группа G, что любая другая группа из этого класса является гомоморфным образом группы G (теорема 2.1). Это утверждение лежит в основе доказательства центрального результата настоящей работы.

Основная теорема. *Пусть K и S — скрученные подмножества групп G и L соответственно такие, что $G \neq K$, $G = \langle K \rangle$ и $L \neq S$, $L = \langle S \rangle$. Допустим, что G — конечная простая неабелева группа.*

Если $K \simeq S$, то группа L является совершенным центральным расширением группы G (т. е. $L = L'$, $L/Z(L) \cong G$).

Отметим, что обратное к этой теореме утверждение неверно, т. е. произвольное совершенное центральное расширение конечной простой неабелевой группы G может и не порождаться изоморфным с K скрученным подмножеством. В качестве примера такой конечной простой неабелевой группы G можно взять $PSL_2(F_p)$, где F_p — конечное поле нечетной характеристики p. Совершенным центральным расширением L группы G в данном случае выступает группа $SL_2(F_p)$. Можно показать, что не существует изоморфных между собой скрученных подмножеств K и S, порождающих соответственно группы G и L.

1. Скрученные подмножества и инволютивные автоморфизмы группы

В данном разделе излагается связь между скрученными подмножествами и инволютивными автоморфизмами группы. Отметим, что впервые эта связь изложена, видимо, в работе Ашбахера [3], но не для скрученных подмножеств, а для очень близких к ним объектов — скрученных подгрупп. Кроме того, уже для скрученных подмножеств эта связь рассмотрена в работе [4]. В обоих работах изложение велось для конечных групп. В настоящей работе связь между скрученными подмножествами и инволютивными автоморфизмами группы (леммы 1.2–1.4) излагается без предположения конечности группы.

Лемма 1.1 [лемма 2.1]. *Пусть G — группа и K — скрученное подмножество группы G. Тогда для любого $x \in K$ справедливо $\langle x \rangle \subseteq K$.*

Лемма 1.2. *Пусть G — группа, φ — автоморфизм группы G такой, что $\varphi^2 = 1$. Тогда $S = \{x\varphi(x^{-1}) : x \in G\}$ является скрученным подмножеством группы G.*

Доказательство. Очевидно, $1 \in S$. Если $x, y \in S$, то $x = a\varphi(a^{-1})$, $y = b\varphi(b^{-1})$ для некоторых элементов a, b из G. Имеем

$$xy^{-1}x = a\varphi(a^{-1})\varphi(b)b^{-1}a\varphi(a^{-1}) = a\varphi(a^{-1}b)b^{-1}a\varphi(a^{-1}) = z\varphi(z^{-1}),$$

где $z = a\varphi(a^{-1}b)$. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Пусть G — группа и K — скрученное подмножество в G такое, что $G = \langle K \rangle$. Для любого $x \in G$ положим $S_x := \{y \in K : xK = Ky\}$ и $\operatorname{Ker} K := \{x \in K : xK = K\}$. Пусть $\Omega := \{S_x : x \in G\}$ и φ — отображение из группы G в множество Ω, определенное по правилу $\varphi(x) := S_x$ для любого $x \in G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *для элементов $x := a_1 \dots a_n$ и $\bar{x} := (a_1)^{-1} \dots (a_n)^{-1}$, где $a_1, \dots, a_n \in K$, выполняется $(\operatorname{Ker} K)x \subseteq S_{\bar{x}}$ и $S_x \subseteq (\operatorname{Ker} K)\bar{x}$;*

(2) *множество $\operatorname{Ker} K$ является нормальной подгруппой в группе G;*

(3) *$\Omega = G/\operatorname{Ker} K$;*

(4) *φ — гомоморфизм группы G на группу $G/\operatorname{Ker} K$.*

Доказательство. (1) Так как $\operatorname{Ker} K \subseteq K$, для любого $z \in \operatorname{Ker} K$ имеем $Kz = zKz = K$. Поскольку для любого $a \in K$ справедливо $aK = Ka^{-1}$, легко видеть, что $\bar{x}K = Kzx$, где z — произвольный элемент из $\operatorname{Ker} K$. Значит, $(\operatorname{Ker} K)x \subseteq S_{\bar{x}}$.

Пусть y — произвольный элемент из S_x. Тогда $(xK\bar{x}^{-1})\bar{x} = Ky$. Нетрудно видеть, что $xK\bar{x}^{-1} = K$. Поэтому $K = Ky(\bar{x})^{-1}$, откуда $y(\bar{x})^{-1} \in K$. Значит, $y(\bar{x})^{-1} \in \operatorname{Ker} K$, следовательно, $y \in (\operatorname{Ker} K)\bar{x}$, откуда $S_x \subseteq (\operatorname{Ker} K)\bar{x}$.

(2) Нетрудно видеть, что $\operatorname{Ker} K$ — подгруппа в G. Пусть $z \in \operatorname{Ker} K$, $x \in G$. Так как $G = \langle K \rangle$, имеем $x = a_1 \dots a_k$ для некоторых элементов $a_1, \dots, a_n$ из K. Следовательно,

$$x^{-1}zxK = (a_n)^{-1} \dots (a_1)^{-1} z a_1 \dots a_n K = (a_n)^{-1} \dots (a_1)^{-1} z K (a_1)^{-1} \dots (a_n)^{-1}.$$

Так как по лемме 3.1 $a_i^{-1} \in K$, а z — элемент из $\operatorname{Ker} K$, получаем, что $x^{-1}zxK = K$, значит, $x^{-1}zx \in \operatorname{Ker} K$, т. е. $\operatorname{Ker} K \lhd G$.

(3) Так как $G = \langle K \rangle$, для любого $x \in G$ существуют такие элементы $a_1, \dots, a_n$ из K, что $x = a_1 \dots a_n$. Из (1) следует, что $(\operatorname{Ker} K)x \subseteq S_{\bar{x}} \subseteq (\operatorname{Ker} K)x$. Значит, $(\operatorname{Ker} K)x = S_{\bar{x}}$, откуда $\Omega = G/\operatorname{Ker} K$.

(4) В силу (3) получаем, что φ — сюръекция. Таким образом, осталось показать, что для любых $x, y \in G$ справедливо $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$. Так как $G = \langle K \rangle$, существуют такие элементы $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_s$ из K, что $x = a_1 \dots a_n$ и $y = b_1 \dots b_s$. Введем следующие обозначения: $\bar{x} := (a_1)^{-1} \dots (a_n)^{-1}$, $\bar{y} := (b_1)^{-1} \dots (b_s)^{-1}$ и $\overline{xy} := (a_1)^{-1} \dots (a_k)^{-1}(b_1)^{-1} \dots\ (b_s)^{-1}$.

Из (1) следует, что $\varphi(x) = (\operatorname{Ker} K)\bar{x}$, $\varphi(y) = (\operatorname{Ker} K)\bar{y}$ и $\varphi(xy) = (\operatorname{Ker} K)\overline{xy}$. Тогда ввиду (2) имеем $\varphi(x)\varphi(y) = (\operatorname{Ker} K)\bar{x}(\operatorname{Ker} K)\bar{y} = \operatorname{Ker} K(\bar{x})(\bar{y})$. Очевидно, $(\bar{x})(\bar{y}) = \overline{xy}$. Значит, $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ и п. (4) доказан. Лемма 1.3 доказана.

Лемма 1.4. *Пусть G, K, Ω, $\operatorname{Ker} K$ и φ удовлетворяют условию леммы* 1.3. *Допустим, что $\operatorname{Ker} K = 1$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\Omega = G$ и отображение φ является автоморфизмом группы G таким, что $\varphi^2 = 1$;*

(2) *для любого элемента z из K справедливо $\varphi(z) = z^{-1}$;*

(3) *$N := \{g^{-1}\varphi(g) \mid g \in G\} \subseteq K$;*

(4) *если G — периодическая группа без инволюций, то $N = K$.*

Доказательство. (1) Так как $\operatorname{Ker} K = 1$, из п. (3) леммы 1.3 вытекает, что $\Omega = G$ и φ — автоморфизм группы G. Пусть $x \in G$. Поскольку $G = \langle K \rangle$, то $x = a_1 \dots a_n$ для некоторых элементов $a_1, \dots, a_n$ из K. Из п. (1) леммы 1.3 следует, что $\varphi(x) = \bar{x}$, где $\bar{x} := (a_1)^{-1} \dots (a_n)^{-1}$, и $\varphi(\bar{x}) = x$. Таким образом, $\varphi^2(x) = x$, откуда $\varphi^2 = 1$.

(2) Для любого $z \in K$ верно $zKz = K$, откуда $zK = Kz^{-1}$. Значит, $\varphi(z) = z^{-1}$.

(3) Из п. (1) и леммы 1.2 следует, что N — скрученное подмножество. Пусть $x \in G$. Поскольку $G = \langle K \rangle$, имеем $x = a_1 \dots a_n$ для некоторых элементов $a_1, \dots, a_n$ из K. Из пп. (1), (2) вытекает, что $\varphi(x) = a_1^{-1} \dots a_n^{-1}$, значит, $x^{-1}\varphi(x) = a_n^{-1} \dots a_1^{-1} a_1^{-1} \dots a_n^{-1}$. Поскольку согласно лемме 1.1 $a_i^{-1} \in K$, легко видеть, что $x^{-1}\varphi(x) \in K$, откуда $N \subseteq K$.

(4) В силу п. (3) достаточно показать, что $K \subseteq N$. Пусть $x \in K$. Так как G — периодическая группа без инволюций, то $|x| = 2m + 1$ для некоторого целого

$m \geq 0$. В силу пп. (2), (3) имеем $x = x^{m+1}\varphi(x^{-(m+1)})$. Таким образом, $x \in N$, откуда $K \subseteq N$. Лемма 1.4 доказана.

Лемма 1.5. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество из группы G такое, что $G = \langle K\rangle$, и $\operatorname{Ker} K = \{x \in K : xK = K\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Для любого $z \in K$ справедливо включение $z(\operatorname{Ker} K) \subseteq K$.*

(2) *Пусть $\overline{G} := G/\operatorname{Ker} K$ и $\overline{K}$ — образ K в $\overline{G}$. Тогда $\overline{K}$ — скрученное подмножество и $\operatorname{Ker} \overline{K} = 1$.*

Доказательство. (1) Для любого $x \in \operatorname{Ker} K$ справедливо $Kx = K$, значит, для любого $z \in K$ имеем $zx \in K$, откуда и следует, что $z(\operatorname{Ker} K) \subseteq K$.

(2) Очевидно, что $\overline{K}$ — скрученное подмножество в $\overline{G}$. Пусть $\bar{x} \in \operatorname{Ker} \overline{K}$. В силу (1) $\bar{x} = x(\operatorname{Ker} K)$ для некоторого $x \in K$. Тогда для любого $\bar{z} = z(\operatorname{Ker} K) \in \overline{K}$, где z — некоторый прообраз $\bar{z}$ в K, имеем

$$\bar{x}\bar{z} = x(\operatorname{Ker} K)z(\operatorname{Ker} K) = xz(\operatorname{Ker} K) \in \overline{K}.$$

Следовательно, $xz \in K$ для любого $z \in K$, т. е. $xK \subseteq K$, откуда вытекает, что $x \in \operatorname{Ker} K$. Следовательно, $\bar{x} = 1$, значит, $\operatorname{Ker} \overline{K} = 1$. Лемма 1.5 доказана.

Стоит особо отметить, что лемма 1.5 дает возможность переходить от произвольного скрученного подмножества K к скрученному подмножеству $\overline{K}$ с единичным ядром. Данный переход позволяет ввести на фактор-группе $\langle K\rangle/\operatorname{Ker} K$ инволютивный автоморфизм, который играет важную роль при выявлении информации о строении скрученного подмножества K и группы $\langle K\rangle$.

2. Универсальная накрывающая

Мы начнем с примера двух неизоморфных групп, порожденных изоморфными скрученными подмножествами.

Пример. Пусть $H_i := (\langle a_i\rangle \times \langle z_i\rangle) \leftthreetimes \langle b_i\rangle$, где $|a_i| = |b_i| = |z_i| = p$, p — нечетное простое число, $z_i = [a_i, b_i]$, $[z_i, a_i] = [z_i, b_i] = 1$, $i = 1, 2$. Подмножество $K_i := \{a_i^m b_i^n a_i^m : n, m \in \mathbb{Z}\}$ в H_i является скрученным подмножеством, причем $K_i \neq \langle K_i\rangle = H_i$ (доказательство этого факта см. в [1]).

Рассмотрим группы $G_1 := H_1 \times H_2$ и $G_2 := H_1 \circ H_2$ — прямое и центральное произведение групп H_1, H_2. Заметим, что $G_2 \cong G_1/\langle z_1 z_2^{-1}\rangle$. Рассмотрим множество $T := K_1 \times K_2$ в G_1. Легко видеть, что T — скрученное подмножество группы G_1, причем $T \neq \langle T\rangle = G_1$.

Нетрудно видеть, что $K_i \cap Z(H_i) = 1$. Поскольку в группе G_2 выполняется $H_1 \cap H_2 \subseteq Z(G_2)$ и для любых элементов $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$ справедливо $h_1h_2 = h_2h_1$, группа G_2 также содержит скрученное подмножество $T = K_1 \times K_2$. Ясно, что $T \neq \langle T\rangle = G_2$. Таким образом, существуют неизоморфные группы G_1 и G_2, порожденные изоморфными скрученными подмножествами.

При рассмотрении этого примера видно, что одна группа является гомоморфным образом другой группы. Оказывается, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть G — группа, K — скрученное подмножество группы G такое, что $G = \langle K\rangle$, и Ω_K — класс групп, элементы которого порождены скрученными подмножествами, изоморфными K. Тогда Ω_K содержит группу $\overline{U}$, для которой справедливо следующее: если $\overline{K}$ — порождающее $\overline{U}$ скрученное подмножество, изоморфное K, A — группа из Ω_K и K_A — порождающее A*

скрученное подмножество, изоморфное K, то изоморфизм τ_A между $\overline{K}$ и K_A может быть продолжен до гомоморфизма φ_A группы $\overline{U}$ на группу A.

Группу $\overline{U}$ из Ω_K будем называть *универсальной накрывающей в классе* Ω_K, а φ_A — *накрывающим гомоморфизмом группы A в классе* Ω_K.

Для доказательства теоремы 2.1 нам понадобится следующая

Лемма 2.2 [5, с. 71, теорема 5.7]. *Пусть группа G задана порождающими и определяющими соотношениями $\langle X \mid R\rangle$, и пусть G' — другая группа. Если отображение $\varphi : X \to G'$ таково, что $r(\varphi(X)) = 1$ для любого $r(X)$ из R, то φ продолжается до гомоморфизма $G \to G'$.*

Доказательство теоремы 2.1. Для любого $x \in K$ рассмотрим символ t_x. Пусть $T_K := \{t_x : x \in K\}$ и $F(T_K)$ — свободная группа, порожденная алфавитом T_K. Положим $N := \langle (t_1)^f,\ (t_x(t_y)^{-1}t_x(t_{xy^{-1}x})^{-1})^f : x, y \in K, f \in F(T_K)\rangle$. Очевидно, что N — нормальная подгруппа группы $F(T_K)$. Обозначим через $\overline{U}$ фактор-группу $F(T_K)/N$, а через $\overline{K}$ — образ T_K в $\overline{U}$.

(1) $\overline{U} = \langle \overline{K}\rangle$. Очевидно.

(2) $\overline{K}$ — *скрученное подмножество.* Рассмотрим символ t_1, где $1 \in K$. Так как $t_1 \in N(T_K)$, имеем $\overline{1} \in \overline{K}$, где $\overline{1}$ — единичный элемент группы $\overline{U}$. Пусть $\bar{x}, \bar{y}$ — некоторые элементы из $\overline{K}$. Тогда $\bar{x} = t_xN$, $\bar{y} = t_yN$, где $x, y \in K$. Так как элемент $(t_x(t_y)^{-1}t_x(t_{xy^{-1}x})^{-1})$ содержится в N, имеем

$$\bar{x}(\bar{y})^{-1}\bar{x} = t_x(t_y)^{-1}t_xN = t_{xy^{-1}x}N = \overline{xy^{-1}x} \in \overline{K}.$$

(3) *Пусть A — группа из Ω_K, K_A — скрученное подмножество из A такое, что $A = \langle K_A\rangle$ и $K \simeq K_A$. Пусть τ_A — изоморфное отображение из K на K_A и $\overline{\varphi}_A : \overline{K} \to K_A$ — отображение, определенное правилом $\overline{\varphi}_A(\bar{x}) := \tau_A(x)$ для любого $\bar{x} \in \overline{K}$, где $x \in K$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

(a) *отображение $\overline{\varphi}_A$ продолжается до гомоморфизма φ_A группы $\overline{U}$ на группу A*;

(b) *φ_A биективно отображает $\overline{K}$ на K_A.*

Рассмотрим отображение $\mu : K \to \overline{K}$ по правилу: $\mu(x) := \bar{x}$ для любого элемента $x \in K$. Легко видеть, что μ изоморфно отображает K на $\overline{K}$. Тогда $\overline{\varphi}_A = \tau_A \circ \mu^{-1}$ и, значит, $\overline{\varphi}_A$ изоморфно отображает $\overline{K}$ на K_A. Следовательно, для любого определяющего соотношения $r(\overline{K})$ группы $\overline{U}$ справедливо $r(\overline{\varphi}_A(\overline{K})) = 1$. Поскольку $A = \langle \overline{\varphi}_A(\overline{K})\rangle$, по лемме 2.2 получаем, что отображение $\overline{\varphi_A}$ может быть продолжено до гомоморфизма φ_A группы $\overline{U}$ на группу A, причем φ_A биективно отображает $\overline{K}$ на K_A. Таким образом, п. (3) доказан.

Из пп. (1)–(3) вытекает заключение теоремы 2.1.

3. Характеризация конечных простых неабелевых групп

Лемма 3.1. *Пусть G — группа, φ — инволютивный автоморфизм группы G и $N = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. Допустим, что $G = \langle N\rangle$. Пусть S — скрученное подмножество из N такое, что для любого $x \in N$ справедливо $xSx \subseteq S$. Тогда $N = S$.*

Доказательство. Пусть $U = G\langle\varphi\rangle$. Тогда $N\varphi = \varphi^U$. Так как $G = \langle N\rangle$, имеем $U = \langle \varphi^U\rangle$. Поскольку $xSx \subseteq S$ для любого $x \in N$, для произвольного $u \in$

U имеем $\varphi^u(S\varphi)\varphi^u \subseteq S\varphi$, откуда вытекает, что для любых элементов $u_1 \dots, u_n$ из U выполняется $\varphi^{u_1} \dots \varphi^{u_n}(S\varphi)\varphi^{u_n} \dots \varphi^{u_1} \subseteq S\varphi$. Следовательно, так как $U = \langle \varphi^U \rangle$, имеем $u^{-1}(S\varphi)u \subseteq S\varphi$. Далее, очевидно, $\varphi \in S\varphi$. Таким образом, $\varphi^U \subseteq S\varphi$, откуда вытекает, что $N = S$. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2. *Пусть G — группа и K — конечное скрученное подмножество из группы G такое, что $G = \langle K \rangle$. Тогда G — конечная группа.*

Доказательство следует из теоремы 1 работы [2].

Лемма 3.3 [6, с. 18, теорема 2.1(iii)]. *Пусть G — группа и φ — автоморфизм группы G такой, что $\varphi^2 = 1$. Тогда $\langle x^{-1}\varphi(x) \mid x \in G \rangle$ — нормальная подгруппа в G.*

Теперь приступим к доказательству основной теоремы.

Пусть Ω_K — класс групп, элементы которого порождаются скрученными подмножествами, изоморфными K. В силу теоремы 2.1 существуют группа U из Ω_K, порождающее группу U скрученное подмножество $K_U \simeq K$ и такой гомоморфизм ψ из U на G, что ψ действует инъективно на K_U и $\psi(K_U) = K$. Кроме того, любая группа из Ω_K является гомоморфным образом группы U.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $L = U$ и $S = K_U$. Дальнейший анализ ситуации разбивается на ряд этапов.

(1) *U — конечная группа.* Следует из леммы 3.1.

(2) *Для подмножества $\operatorname{Ker} K_U = \{x \in K_U : xK_U = K_U\}$ справедливо $\operatorname{Ker} K_U = 1$.*

Допустим, что $\operatorname{Ker} K_U \neq 1$. Поскольку гомоморфизм ψ инъективен на K_U, нетрудно видеть, что ψ отображает $\operatorname{Ker} K_U$ биективно на $\operatorname{Ker} K$. Таким образом, $\operatorname{Ker} K \neq 1$. Согласно лемме 1.3(2) $\operatorname{Ker} K$ — нормальная подгруппа в G. Так как $G \neq K$, получаем противоречие с простотой группы G. Данное противоречие доказывает п. (2).

(3) *Можно считать, что в K_U существует элемент x такой, что $|x| > 2$.*

Пусть $\Sigma := \{xK_U : x \in K_U\}$. Нетрудно видеть, что любой элемент из Σ есть скрученное подмножество, изоморфное K_U. Некоторое скрученное подмножество xK_U из Σ содержит элемент z такой, что $|z| > 2$, поскольку в противном случае U будет элементарной абелевой 2-группой, что невозможно.

Таким образом, вместо K_U можно рассматривать скрученное подмножество xK_U, которое содержит элемент z с $|z| > 2$.

(4) *Группа U обладает таким инволютивным автоморфизмом φ, что для любого $x \in K_U$ выполняется $\varphi(x) = x^{-1}$ и $\{g^{-1}\varphi(g) : g \in U\} \subseteq K_U$.*

Из п. (2) и леммы 1.4(1)–(3) следует существование автоморфизма φ, а из п. (3) — его нетривиальность.

(5) *$\operatorname{Ker} \psi$ — φ-инвариантная подгруппа в U.*

Положим $T = \operatorname{Ker} \psi$. Допустим, что T не является φ-инвариантной подгруппой. Пусть $F = T \cap \varphi(T)$. Ясно, что F — нормальная φ-инвариантная подгруппа в U. Рассмотрим фактор-группу $\overline{U} = U/F$. Пусть $\overline{T}$ — образ T в $\overline{U}$. Автоморфизм φ индуцирует на $\overline{U}$ автоморфизм $\overline{\varphi}$. Нетрудно видеть, что $\langle \overline{T}, \overline{\varphi}(\overline{T}) \rangle = \overline{T} \times \overline{\varphi}(\overline{T})$. Понятно, что $\overline{T}, \overline{\varphi}(\overline{T})$ — нормальные подгруппы в $\overline{U}$. Поскольку $\overline{U}/\overline{T} \cong G$ — простая группа, имеем $\overline{U} = \overline{T} \times \overline{\varphi}(\overline{T})$. Тогда $\overline{T} \cong G$. Заметим, что для $\overline{K}_U$ — образа K_U в $\overline{U}$ — выполняется $\overline{K}_U \simeq K$ и $\overline{U} = \langle \overline{K}_U \rangle$.

Рассмотрим $\overline{S} = \{\bar{x}^{-1}\overline{\varphi}(\bar{x}) : \bar{x} \in \overline{T}\}$. Из п. (4) следует, что $\overline{S} \subseteq \overline{K}_U$. Очевидно, $|\overline{S}| = |\overline{T}| = |G|$. Таким образом, $|\overline{K}_U| \geq |G|$, откуда ввиду $K \neq G$ вытекает неравенство $|\overline{K}_U| > |K|$, которое противоречит тому, что $\overline{K}_U \simeq K$.

(6) *Автоморфизм φ действует тождественно на* $\operatorname{Ker}\psi$.

Допустим, что φ действует нетождественно на $\operatorname{Ker}\psi$. Тогда для некоторого $x \in \operatorname{Ker}\psi$ имеем $x^{-1}\varphi(x) \neq 1$. Поскольку согласно (4) $x^{-1}\varphi(x) \in K_U$, ввиду (5) получаем, что $K_U \cap \operatorname{Ker}\psi \neq 1$. Значит, ψ не может действовать инъективно на K_U, что противоречит определению ψ.

(7) *Любой элемент z из K_U индуцирует сопряжением на* $\operatorname{Ker}\psi$ *автоморфизм τ_z такой, что $|\tau_z| \leq 2$, т. е. $z^2 \in C_U(\operatorname{Ker}\psi)$.*

Допустим противное. Тогда существует элемент $x \in \operatorname{Ker}\psi$ такой, что $x^z = x^{z^{-1}}$. С другой стороны, поскольку $z \in K_U$, ввиду пп. (4), (6) имеем $x^z = \varphi(x^z) = x^{z^{-1}}$; противоречие.

(8) *Если $N = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in U\}$, то $U = \langle N \rangle$.*

Предположим, что $U \neq \langle N \rangle$. Согласно лемме 3.3 $\langle N \rangle$ — нормальная подгруппа в U. Так как $U/\operatorname{Ker}\psi$ — простая группа, нетрудно видеть, что $\langle N \rangle \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Поскольку согласно п. (4) $N \subseteq K_U$ ввиду $K_U \cap \operatorname{Ker}\psi = 1$ получаем, что $N = 1$, откуда $\varphi = 1$. С другой стороны, ввиду (3) и леммы 1.4(2) имеем $\varphi \neq 1$. Получаем противоречие, доказывающее п. (8).

(9) *Пусть S — скрученное подмножество в K_U такое, что $xSx \subseteq S$ для любого $x \in K_U$. Тогда $N \subseteq S$.*

Заметим, что для любого $x \in K_U$ выполняется $xNx \subseteq N$. Действительно, для любого $g \in U$ в силу п. (4) имеем $xg^{-1}\varphi(g)x = xg^{-1}\varphi(gx^{-1}) = z^{-1}\varphi(z) \in N$, где $z = gx^{-1}$. Рассмотрим $T = S \cap N$. Легко видеть, что для любого $x \in K_U$ справедливо $xTx \subseteq T$. Согласно (8) $U = \langle N \rangle$. Применяя лемму 3.1, получаем, что $T = N$, т. е. $N \subseteq S$.

(10) $\operatorname{Ker}\psi = Z(U)$.

Предположим, что $\operatorname{Ker}\psi \nleq Z(U)$. Поскольку ввиду (6) $\operatorname{Ker}\psi$ — нормальная φ-инвариантная подгруппа в U, то $C_U(\operatorname{Ker}\psi)$ также является нормальной φ-инвариантной подгруппой в U. Рассмотрим $S = K_U \cap C_U(\operatorname{Ker}\psi)$. Ясно, что S — скрученное подмножество. Заметим, что для любого $x \in K_U$ выполняется $xSx \subseteq S$. Действительно, для любых $x \in K_U$, $y \in S$ элемент $z = xy^{-1}x$ принадлежит K_U. С другой стороны, $z = x^{-1}(x^2y^{-1})x$. Поскольку согласно (7) $x^2 \in C_U(\operatorname{Ker}\psi)$, то $z \in C_U(\operatorname{Ker}\psi)$. Таким образом, $z \in K_U \cap C_U(\operatorname{Ker}\psi) = S$.

В силу п. (9) $\{g^{-1}\varphi(g) : g \in U\} \subseteq S$. Поскольку ввиду (8) $U = \langle g^{-1}\varphi(g) : g \in U\rangle$, получаем, что $U = \langle S \rangle$. Значит, $U = C_U(\operatorname{Ker}\psi)$, т. е. $\operatorname{Ker}\psi \leq Z(U)$.

Далее, так как $U/\operatorname{Ker}\psi$ — простая группа, имеем $Z(U) \leq \operatorname{Ker}\psi$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\psi = Z(U)$ и п. (10) доказан.

(11) *Группа U является совершенным центральным расширением группы G.*

Ввиду (10) для доказательства (11) достаточно показать, что $U = U'$. Допустим, что $U \neq U'$. Пусть $T = Z(U) \cap U'$. Очевидно, T — нормальная подгруппа из U. Рассмотрим фактор-группу $\overline{U} = U/T$. Пусть $\overline{Z(U)}$, $\overline{U}'$ — образы соответственно $Z(U)$ и U' в U. Понятно, что $\overline{Z(U)} \cap \overline{U'} = 1$. Тогда нетрудно видеть, что $\overline{U} = \overline{Z(U)} \times \overline{U'}$.

Пусть $\overline{K}_U$ — образ K_U в $\overline{U}$. Поскольку $K_U \cap \operatorname{Ker}\psi = 1$, ввиду п. (10) легко видеть, что $\overline{K}_U \cap \overline{Z(U)} = 1$.

Далее, автоморфизм φ индуцирует на $\overline{U}$ автоморфизм $\overline{\varphi}$. Очевидно, $\overline{Z(U)}$ и $\overline{U'}$ — $\overline{\varphi}$-инвариантные подгруппы.

Пусть $\overline{N}$ — образ множества $N = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in U\}$ в $\overline{U}$. Имеем $\overline{N} = \{\bar{g}^{-1}\overline{\varphi}(\bar{g}) : \bar{g} \in \overline{U}\}$. В силу п. (4) $\overline{N} \subseteq \overline{K}_U$, откуда ввиду равенства $\overline{K}_U \cap \overline{Z(U)} = 1$ получаем, что автоморфизм $\overline{\varphi}$ действует тождественно на $\overline{Z(U)}$. Тогда нетрудно видеть, что $\overline{N} \subseteq \overline{U'}$. Так как $U \neq U'$, имеем $\overline{Z(U)} \neq 1$, значит, $\overline{U} \neq \langle\overline{N}\rangle$. С другой стороны, в силу (8) выполнено равенство $\overline{U} = \langle\overline{N}\rangle$. Таким образом, получаем противоречие, доказывающее п. (11), а вместе с ним и основную теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мыльников А. Л.* Конечные перекрученные группы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 369–375.
2. *Беляев В. В., Мыльников А. Л.* Оценка порядка группы, порожденной конечным скрученным подмножеством // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1235–1237.
3. *Aschbacher M.* Near subgroups of finite groups // J. Group Theory. 1998. V. 1, N 2. P. 113–129.
4. *Мыльников А. Л.* Конечные минимальные неперекрученные группы // Вестн. Красноярск. гос. ун-та. 2005. № 1. С. 71–76.
5. *Богопольский О. В.* Введение в теорию групп. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
6. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.

Статья поступила 1 марта 2007 г., окончательный вариант — 13 мая 2010 г.

Мыльников Андрей Леонидович
Институт фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета,
кафедра высшей математики 1, пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
mylnand@yandex.ru