Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 519.214.5

НОВОЕ ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ЧАСТНЫХ СУММ СКОЛЬЗЯЩИХ СРЕДНИХ

Н. С. Аркашов

Аннотация. Получено новое достаточное условие для C-сходимости в метрическом пространстве $D[0,1]$ (с метрикой А. В. Скорохода) распределений процессов частных сумм скользящих средних к распределению винеровского процесса.

Ключевые слова: принцип инвариантности, скользящие средние, C-сходимость.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть $\{\xi_k;\ k \in \mathbb{Z}\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями, где $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел. Рассмотрим последовательность случайных величин

$$X_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}\xi_k, \tag{1}$$

которые называются *скользящими средними* исходной последовательности $\{\xi_k;$ $k \in \mathbb{Z}\}$ (см., например, [1]). Хорошо известно, что условие

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k^2 < \infty \tag{2}$$

гарантирует сходимость с вероятностью 1 ряда в правой части (1) (см., например, [2]). Определим последовательность частных сумм

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Обозначим через $S_n(t) = S_{[nt]}/\sqrt{n},\ t \in [0,1],\ n = 1, 2, \dots,$ соответствующий процесс частных сумм скользящих средних. Введем следующее условие:

$$0 < \sigma^2 := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{D}S_n}{n} < \infty. \tag{3}$$

Мы будем изучать условия C-сходимости (см., например, [3, с. 51]) в метрическом пространстве $D[0,1]$ (с метрикой А. В. Скорохода) распределений случайных процессов $S_n(\cdot)$ к распределению процесса $\sigma W(\cdot)$, где $W(\cdot)$ — стандартный винеровский процесс. Напомним, что под C-сходимостью в $D[0,1]$ понимается слабая сходимость распределений функционалов, измеримых относительно борелевской σ-алгебры в $D[0,1]$ и непрерывных относительно равномерной метрики в точках пространства $C[0,1]$ (см., например, [4]).

Заметим, что существование двух моментов последовательности $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и условие (3) гарантируют сходимость конечномерных распределений процессов $S_n(\cdot)$ к конечномерным распределениям процесса $\sigma W(\cdot)$ (см. [5]). Поэтому для доказательства C-сходимости процесса $S_n(\cdot)$ к процессу $\sigma W(\cdot)$ остается проверить условие плотности семейства распределений процессов $S_n(\cdot)$ в $D[0,1]$ относительно равномерной метрики.

Теорема 1. *Пусть выполнено* (2) *и для некоторого натурального числа* m

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{(i-1)m+1}+\dots+a_{im}|<\infty,\quad \sum_{i=1}^{\infty}|a_{-((i-1)m+1)}+\dots+a_{-im}|<\infty.$$

Тогда имеет место плотность семейства распределений процессов $S_n(\cdot)$ *в* $D[0,1]$ *относительно равномерной метрики.*

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbf{D}S_n}{n}=\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i\Big)^2.$$

Следствие 1. *Условия теоремы* 1, *а также требование* $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}a_i\neq 0$ *влекут за собой* C*-сходимость распределений процесса* $S_n(\cdot)$ *к распределениям процесса* $\sigma W(\cdot)$, *где* $\sigma=\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}a_i$ (*см. также* [6]).

Замечание 1. Если $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}|a_i|<\infty$, то выполняется условие теоремы 1 для $m=1$. Заметим, что в случае абсолютной суммируемости коэффициентов $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ условия (3) и $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}a_i\neq 0$ эквивалентны; это сразу следует из теоремы 2. Отметим также, что утверждение о C-сходимости распределений процессов $S_n(\cdot)$ к распределениям процессов $\sigma W(\cdot)$ при условии абсолютной суммируемости коэффициентов $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и условии (3) получено в [7].

Замечание 2. Условия на коэффициенты $\{a_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, возникающие в теореме 1, допускают *условную* сходимость ряда $\sum a_i$. В качестве примера для $m=2$ можно взять коэффициенты $a_i=0$ при $i\le 0$ и $a_i=(-1)^i/i$ при $i\ge 1$.

Замечание 3. В [8] наряду с (2) приведено также условие

$$\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\Big(\sum_{i>l}a_i\Big)^2+\Big(\sum_{i>l}a_{-i}\Big)^2\Big)<\infty, \tag{4}$$

которое обеспечивает C-сходимость процесса $S_n(\cdot)$ к винеровскому процессу. Отметим, что здесь уже допускается *условная* сходимость ряда $\sum a_i$. Но если хвост $\sum\limits_{|i|\ge k}a_i$ ряда $\sum a_i$ убывает достаточно медленно, то условие (4) может не выполняться. Скажем, последовательность $a_i=\frac{1}{i^{3/2}}$ при $i\ge 1$ и $a_i=0$ при $i\le 0$ не удовлетворяет условию (4), в то время как условие теоремы 1 выполнено при $m=1$. Легко привести пример последовательности, не являющейся абсолютно суммируемой и не удовлетворяющей условию (4), но удовлетворяющей условию теоремы 1. Действительно, положим $a_{3i-2}=\frac{1}{3i-2}$, $a_{3i-1}=-\frac{1}{3i-1}$ и $a_{3i}=\frac{1}{(3i)^{3/2}}$ при $i\ge 1$ и $a_i=0$ при $i\le 0$. Очевидно, что последовательность $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ не является абсолютно суммируемой. Условие (4) не выполняется, поскольку в этом случае $|\sum\limits_{i>l}a_i|\sim\frac{C}{\sqrt{l}}$ при $l\to\infty$, условие же теоремы 1 выполняется при $m=3$.

§ 2. Доказательство основных результатов

Прежде всего докажем ряд вспомогательных утверждений. Для случайной величины ξ_i определим центрированную срезку и соответственно центрированный «хвост» срезки на уровне $N > 0$:

$$\bar{\xi}_i^N = \xi_i I_{\{|\xi_i|\le N\}} - \mathbf{E}(\xi_i I_{\{|\xi_i|\le N\}}), \quad \hat{\xi}_i^N = \xi_i I_{\{|\xi_i|>N\}} - \mathbf{E}(\xi_i I_{\{|\xi_i|>N\}}).$$

Очевидно, выполняется равенство $\xi_i = \bar{\xi}_i^N + \hat{\xi}_i^N$ для всех $i \in \mathbb{Z}$. Соответствующие нормированные процессы частных сумм скользящих средних, построенные по последовательностям $\{\bar{\xi}_i^N\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{\hat{\xi}_i^N\}_{i\in\mathbb{Z}}$, обозначим через $\overline{S}_n^N(\cdot)$ и $\widehat{S}_n^N(\cdot)$ соответственно. Очевидно, для всех $t \in [0,1]$ выполняется равенство

$$S_n(t) = \overline{S}_n^N(t) + \widehat{S}_n^N(t). \tag{5}$$

Для того чтобы проверить условия плотности семейства распределений процессов $S_n(\cdot)$ в $D[0,1]$ относительно равномерной метрики, достаточно показать, что для любого положительного ε выполняется соотношение (см. [3, с. 51; 9; 10])

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big(\sup_{|t-s|<\delta,\ t,s\in[0,1]}|S_n(t)-S_n(s)|>\varepsilon\Big) = 0. \tag{6}$$

В силу (5) получаем

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big(&\sup_{|t-s|<\delta,\ t,s\in[0,1]}|S_n(t)-S_n(s)|>\varepsilon\Big)\\ &\le \lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big(\sup_{|t-s|<\delta,\ t,s\in[0,1]}\big|\overline{S}_n^N(t)-\overline{S}_n^N(s)\big|>\varepsilon/2\Big)\\ &\qquad + \limsup_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\widehat{S}_n^N(t)\big|>\varepsilon/4\Big).\end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (7) равно 0. Это следует из того, что семейство распределений процессов $\overline{S}_n^N(\cdot)$, построенных по ограниченной последовательности $\{\bar{\xi}_i^N\}_{i\in\mathbb{Z}}$, плотно (см., например, [5]). Поэтому достаточно показать, что для любого положительного ε имеет место

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{n\ge 1}\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\widehat{S}_n^N(t)\big|>\varepsilon\Big) = 0. \tag{8}$$

В леммах 1–4 будем предполагать, что m — некоторое натуральное число, $\{\eta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с условиями $\mathbf{E}\eta_1 = 0$ и $\mathbf{D}\eta_1 < \infty$.

Лемма 1. *Пусть последовательность $\{b_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} b_i^2 < \infty$. Обозначим $Y_j = \sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} b_i\eta_{j-i}$ и $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$, $k = 1,2,\dots$. Тогда выполняется неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\le n/m}\frac{|S_k|}{\sqrt{n}} > \varepsilon\right) \le \frac{4}{m\varepsilon^2}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|b_i|\Big)^2\mathbf{D}\eta_0.$$

Доказательство. Имеет место равенство

$$S_k = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i\eta_{j-i} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i\sum_{j=1}^{k}\eta_{j-i}.$$

Далее, используя неравенство треугольника, а также неравенство Чебышёва, получаем

$$\mathbf{P}\biggl(\max_{k\le n/m}\frac{|S_k|}{\sqrt{n}}>\varepsilon\biggr)\le\mathbf{P}\Biggl(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|b_i|\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\Biggl|\sum_{j=1}^{k}\eta_{j-i}\Biggr|>\varepsilon\Biggr)$$
$$\le\frac{1}{n\varepsilon^2}\mathbf{E}\Biggl(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|b_i|\max_{k\le n/m}\Biggl|\sum_{j=1}^{k}\eta_{j-i}\Biggr|\Biggr)^2$$
$$\le\frac{1}{n\varepsilon^2}\mathbf{E}\Biggl(\sum_{l,m\in\mathbb{Z}}|b_l||b_m|\max_{k\le n/m}\Biggl|\sum_{j=1}^{k}\eta_{j-l}\Biggr|\max_{k\le n/m}\Biggl|\sum_{j=1}^{k}\eta_{j-m}\Biggr|\Biggr).\quad(9)$$

Далее воспользуемся следующим неравенством (см. [2]):

$$\mathbf{E}\max_{k\le n}\Biggl(\sum_{j=1}^{k}\zeta_j\Biggr)^2\le 4\sum_{j=1}^{n}\mathbf{D}\zeta_j,$$

где $\{\zeta_j\}$ — последовательность независимых случайных величин с условиями $\mathbf{E}\zeta_j=0$ и $\mathbf{D}\zeta_j<\infty$. Применяя неравенство Гёльдера и предыдущее неравенство, получаем

$$\mathbf{P}\biggl(\max_{k\le n/m}\frac{|S_k|}{\sqrt{n}}>\varepsilon\biggr)$$
$$\le\frac{1}{n\varepsilon^2}\sum_{l,m\in\mathbb{Z}}|b_l||b_m|\Biggl(\mathbf{E}\max_{k\le n/m}\Biggl|\sum_{j=1}^{k}\eta_{j-l}\Biggr|^2\Biggr)^{1/2}\Biggl(\mathbf{E}\max_{k\le n/m}\Biggl|\sum_{j=1}^{k}\eta_{j-m}\Biggr|^2\Biggr)^{1/2}$$
$$\le\frac{4}{m\varepsilon^2}\biggl(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|b_i|\biggr)^2\mathbf{D}\eta_0.\quad(10)$$

Лемма доказана.

Пусть $A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$ при $k\ge1$ и $A_0=0$, а также $B_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_{-i}$ при $k\ge1$ и $B_0=0$. В терминах этих обозначений выполняется равенство

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}A_{n-j}\xi_j+\sum_{j=0}^{\infty}(A_{n+j}-A_j)\xi_{-j}+\sum_{j=0}^{n-1}(a_0+B_j)\xi_{j+1}+\sum_{j=n}^{\infty}(B_j-B_{j-n})\xi_{j+1}.\quad(11)$$

Лемма 2. *Имеют место следующие равенства:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{km}A_{km-j}\eta_j=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k}A_{km-im}\sum_{j=(i-1)m+1}^{im}\eta_j+\frac{\gamma_{1k}^m}{\sqrt{n}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+i}-A_i)\eta_{-i}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+im}-A_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{-j}+\frac{\gamma_{2k}^m}{\sqrt{n}},$$

где γ_{1k}^m и γ_{2k}^m — случайные величины, обладающие свойством

$$\mathbf{P}\biggl(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}|\gamma_{ik}^m|>\varepsilon\biggr)\le\frac{4m}{\varepsilon^2}\mathbf{D}\eta_1\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i^2,\quad i=1,2.$$

Доказательство. Очевидно, выполняется следующее равенство:

$$\sum_{j=1}^{km} A_{km-j}\eta_j = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m} A_{km-j}\eta_j.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m} A_{km-j}\eta_j &\\ &= \sum_{i=0}^{k-1} A_{km-(i+1)m}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m}\eta_j + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m}(A_{km-j}-A_{km-(i+1)m})\eta_j\\ &= \sum_{i=0}^{k-1} A_{km-(i+1)m}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m}\eta_j + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m}\eta_j\sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-j} a_l. \end{aligned}\tag{12}$$

Рассмотрим отдельно последнее слагаемое правой части (12), обозначив его через γ_{1k}^m. Оценим $\mathbf{D}\gamma_{1k}^m$:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m}\eta_j\sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-j} a_l\right)&\\ = \mathbf{D}\eta_1\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m}\left(\sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-j} a_l\right)^2 &\le m\mathbf{D}\eta_1\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m}\sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-j} a_l^2\\ &\le m^2\mathbf{D}\eta_1\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{l=km-(i+1)m+1}^{km-im-1} a_l^2 \le m^2\mathbf{D}\eta_1\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l^2. \end{aligned}\tag{13}$$

Стало быть,

$$\mathbf{D}\gamma_{1k}^m \le m^2\mathbf{D}\eta_1\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l^2. \tag{14}$$

Поэтому выполняется неравенство

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}|\gamma_{1k}^m| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{m\varepsilon^2}\max_{k\le n/m}\mathbf{D}\gamma_{1k}^m. \tag{15}$$

Применяя неравенство (14) к оценке правой части (15), получаем первое утверждение леммы. Докажем, что имеет место второе представление. Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}(A_{km+j}-A_j)\eta_{-j} &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}(A_{km+j}-A_j)\eta_{-j}\\ &= \sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+ki}-A_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{-j} + \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{-j}\sum_{l=km+im+1}^{km+j} a_l\right)\\ &\qquad - \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{-j}\sum_{l=im+1}^{j} a_l\right). \end{aligned}\tag{16}$$

Обозначим через γ_{2k}^m последние два слагаемых правой части (16), т. е.

$$\gamma_{2k}^m = \sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{-j}\sum_{l=km+im+1}^{km+j}a_l\Biggr) - \sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{-j}\sum_{l=im+1}^{j}a_l\Biggr).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\mathbf{D}\gamma_{2k}^m \le 2\mathbf{D}\eta_0\sum_{i=0}^{\infty}\Biggl(\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\Biggl(\sum_{l=km+im+1}^{km+j}a_l\Biggr)^2 + \sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\Biggl(\sum_{l=im+1}^{j}a_l\Biggr)^2\Biggr). \qquad (17)$$

Далее, проводя аналогичные (13) вычисления, получаем

$$\mathbf{D}\gamma_{2k}^m \le 4m^2\mathbf{D}\eta_0\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i^2.$$

Используя последнее неравенство, а также соотношение

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}|\gamma_{2k}^m| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{m\varepsilon^2}\max_{k\le n/m}\mathbf{D}\gamma_{2k}^m,$$

получаем второе утверждение леммы.

Лемма 3. *Имеют место следующие два представления:*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{km-1}(a_0+B_j)\eta_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=0}^{k-1}(a_0+B_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{j+1} + \frac{\gamma_{3k}^m}{\sqrt{n}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=km}^{\infty}(B_j-B_{j-km})\eta_{j+1} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=k}^{\infty}(B_{im}-B_{(i-k)m})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{j+1} + \frac{\gamma_{4k}^m}{\sqrt{n}},$$

где γ_{3k}^m и γ_{4k}^m — случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\Biggl(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}|\gamma_{ik}^m| > \varepsilon\Biggr) \le \frac{4m}{\varepsilon^2}\mathbf{D}\eta_1\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i^2, \quad i = 3, 4.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}(a_0+B_j)\eta_{j+1} = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}(a_0+B_{im})\eta_{j+1} + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{j+1}\sum_{l=im+1}^{j}a_{-l}. \qquad (18)$$

Обозначим последнее слагаемое правой части (18) через γ_{3k}^m, т. е.

$$\gamma_{3k}^m = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\eta_{j+1}\sum_{l=im+1}^{j}a_{-l}.$$

Тогда выполняются следующие неравенства:

$$\mathbf{D}\gamma_{3k}^m = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\Biggl(\sum_{l=im+1}^{j}a_{-l}\Biggr)^2\mathbf{D}\eta_1 \le m^2\mathbf{D}\eta_1\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=im+1}^{(i+1)m-1}a_{-j}^2 \le m^2\mathbf{D}\eta_1\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i^2. \qquad (19)$$

Оценивая с помощью (19) правую часть неравенства

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}|\gamma_{3k}^m|>\varepsilon\right)\le\frac{1}{m\varepsilon^2}\max_{k\le n/m}\mathbf{D}\gamma_{3k}^m,$$

получаем первое утверждение леммы. Чтобы получить второе утверждение, воспользуемся следующим соотношением:

$$\sum_{j=km}^{\infty}(B_j-B_{j-km})\eta_{j+1}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1}(B_j-B_{j-km})\eta_{j+1}$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}(B_{km+im}-B_{im})\sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1}\eta_{j+1}$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1}\eta_{j+1}\sum_{l=km+im+1}^{j}a_{-l}-\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1}\eta_{j+1}\sum_{l=im+1}^{j-km}a_{-l}. \quad (20)$$

Через γ_{4k}^m обозначим последние два слагаемых правой части (20), т. е.

$$\gamma_{4k}^m=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1}\eta_{j+1}\sum_{l=km+im+1}^{j}a_{-l}-\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=km+im}^{km+(i+1)m-1}\eta_{j+1}\sum_{l=im+1}^{j-km}a_{-l}.$$

Проводя вычисления, аналогичные (17), получаем

$$\mathbf{D}\gamma_{4k}^m\le 4m^2\mathbf{D}\eta_1\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i^2. \quad (21)$$

Применяя (21) и неравенство

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}|\gamma_{4k}^m|>\varepsilon\right)\le\frac{1}{m\varepsilon^2}\max_{k\le n/m}\mathbf{D}\gamma_{4k}^m,$$

получаем второе утверждение.

Лемма 4. *Выполняются следующие неравенства:*

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{k+i}-A_i)\eta_{-i}\right|>\varepsilon\right)$$
$$\le m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=1}^{km}A_{km-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+i}-A_i)\eta_{-i}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$+\mathbf{D}\eta_0\frac{8m^2}{\varepsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i^2, \quad (22)$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n}\left|\sum_{i=0}^{k-1}(a_0+B_i)\eta_{i+1}+\sum_{i=k}^{\infty}(B_i-B_{i-k})\eta_{i+1}\right|>\varepsilon\right)$$
$$\le m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=0}^{km-1}(a_0+B_i)\eta_{i+1}+\sum_{i=km}^{\infty}(B_i-B_{i-km})\eta_{i+1}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$+\mathbf{D}\eta_0\frac{8m^2}{\varepsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i^2. \quad (23)$$

Доказательство. Докажем (22). Очевидно, выполняется следующее соотношение:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{k+i}-A_i)\eta_i\right|>\varepsilon\right)\\
&\quad=\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{0\le r\le m-1}\max_{k\le(n-r)/m}\left|\sum_{i=1}^{km+r}A_{km+r-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+r+i}-A_i)\eta_i\right|>\varepsilon\right)\\
&\le m\max_{0\le r\le m-1}\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le(n-r)/m}\left|\sum_{i=1}^{km+r}A_{km+r-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+r+i}-A_i)\eta_{-i}\right|>\varepsilon\right).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Рассмотрим правую часть неравенства (24). Прежде всего отметим, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{km+r}A_{km+r-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+r+i}-A_i)\eta_{-i}\\
&\qquad=\sum_{i=1}^{km}A_{km-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+i}-A_i)\eta_{-i}+\sum_{i=1}^{km}(A_{km+r-i}-A_{km-i})\eta_i\\
&\qquad\qquad+\sum_{i=km+1}^{km+r}A_{km+r-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+r+i}-A_{km+i})\eta_{-i}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Оценим сумму последних трех слагаемых правой части (25), обозначив их сумму буквой γ_{kr1}^m. Тогда

$$
\mathbf{D}\gamma_{kr1}^m=\left(\sum_{i=0}^{\infty}(A_{r+i}-A_i)^2+\sum_{i=1}^{r}A_{r-i}^2\right)\mathbf{D}\eta_0. \tag{26}
$$

Заметим, что $(A_{r+i}-A_i)^2\le r\sum\limits_{k=i+1}^{r+i}a_k^2$ и $A_{r-i}^2\le(r-i)\sum\limits_{k=1}^{r-i}a_k^2$. Тогда правую часть (26) можно оценить следующим образом:

$$
\mathbf{D}\gamma_{kr1}^m=\left(\sum_{i=0}^{\infty}(A_{r+i}-A_i)^2+\sum_{i=1}^{r}A_{r-i}^2\right)\mathbf{D}\eta_0\le 2r^2\mathbf{D}\eta_0\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2. \tag{27}
$$

Следовательно, из (24), (25) вытекает оценка

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{k+i}-A_i)\eta_i\right|>\varepsilon\right)\\
&\le m\max_{0\le r\le m-1}\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le(n-r)/m}\left|\sum_{i=1}^{km}A_{km-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+i}-A_i)\eta_{-i}+\gamma_{kr1}^m\right|>\varepsilon\right)\\
&\qquad\le m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=1}^{km}A_{km-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+i}-A_i)\eta_{-i}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\qquad\qquad+m\max_{0\le r\le m-1}\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le(n-r)/m}|\gamma_{kr1}^m|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\qquad\le m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=1}^{km}A_{km-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+i}-A_i)\eta_{-i}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$+\, n \max_{0\le r\le m-1} \max_{k\le (n-r)/m} \mathbf{P}\biggl(\frac{1}{\sqrt{n}}|\gamma_{kr1}^m| > \frac{\varepsilon}{2}\biggr). \quad (28)$$

Применив неравенство Чебышёва, а также (27) к правой части неравенства (28), получим

$$\mathbf{P}\Biggl(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k\le n}\Biggl|\sum_{i=1}^{k} A_{k-i}\eta_i + \sum_{i=0}^{\infty}(A_{k+i} - A_i)\eta_i\Biggr| > \varepsilon\Biggr)$$
$$\le m\mathbf{P}\Biggl(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k\le n/m}\Biggl|\sum_{i=1}^{km} A_{km-i}\eta_i + \sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+i} - A_i)\eta_{-i}\Biggr| > \frac{\varepsilon}{2}\Biggr)$$
$$+\, \frac{8m^2}{\varepsilon^2}\mathbf{D}\eta_0 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2. \quad (29)$$

Таким образом, (22) доказано.

Докажем неравенство (23). Имеем

$$\mathbf{P}\Biggl(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k\le n}\Biggl|\sum_{j=0}^{k-1}(a_0 + B_j)\eta_{j+1} + \sum_{j=k}^{\infty}(B_j - B_{j-k})\eta_{j+1}\Biggr| > \varepsilon\Biggr)$$
$$= \mathbf{P}\Biggl(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le r\le m-1} \max_{k\le (n-r)/m}\Biggl|\sum_{j=0}^{km+r-1}(a_0 + B_j)\eta_{j+1}$$
$$+ \sum_{j=km+r}^{\infty}(B_j - B_{j-km-r})\eta_{j+1}\Biggr| > \varepsilon\Biggr)$$
$$\le m \max_{0\le r\le m-1} \mathbf{P}\Biggl(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k\le (n-r)/m}\Biggl|\sum_{j=0}^{km+r-1}(a_0 + B_j)\eta_{j+1}$$
$$+ \sum_{j=km+r}^{\infty}(B_j - B_{j-km-r})\eta_{j+1}\Biggr| > \varepsilon\Biggr). \quad (30)$$

Преобразуем правую часть неравенства (30):

$$\sum_{j=0}^{km+r-1}(a_0 + B_j)\eta_{j+1} + \sum_{j=km+r}^{\infty}(B_j - B_{j-km-r})\eta_{j+1}$$
$$= \sum_{j=0}^{km-1}(a_0 + B_j)\eta_{j+1} + \sum_{j=km}^{\infty}(B_j - B_{j-km})\eta_{j+1}$$
$$+ \sum_{j=km}^{km+r-1}(a_0 + B_{j-km})\eta_{j+1} + \sum_{j=km+r}^{\infty}(B_{j-km} - B_{j-km-r})\eta_{j+1}. \quad (31)$$

Оценим сумму последних двух слагаемых правой части (31), обозначив ее буквой γ_{kr2}^m. Тогда

$$\mathbf{D}\gamma_{kr2}^m = \Biggl(\sum_{j=0}^{r-1}(a_0 + B_j)^2 + \sum_{j=r}^{\infty}(B_j - B_{j-r})^2\Biggr)\mathbf{D}\eta_0. \quad (32)$$

Заметим, что

$$(a_0+B_j)^2 \le (j+1)\left(a_0^2+\sum_{i=1}^{j} a_{-i}^2\right), \quad (B_j-B_{j-r})^2 \le r\sum_{i=j-r+1}^{j} a_i^2.$$

Поэтому

$$\mathbf{D}\gamma_{kr2}^m = \left(\sum_{j=0}^{r-1}(a_0+B_j)^2+\sum_{j=r}^{\infty}(B_j-B_{j-r})^2\right)\mathbf{D}\eta_0 \le 2r^2\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2\mathbf{D}\eta_0. \tag{33}$$

Далее, с помощью (33) оцениваем правую часть неравенства (30), действуя так же, как и при выводе оценки (28). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Применяя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\widehat{S}_n^N(t)\big|>\varepsilon\Big)\\
&\le \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} A_{k-i}\hat{\xi}_i^N+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{k+i}-A_i)\hat{\xi}_{-i}^N\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&+\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n}\left|\sum_{i=0}^{k-1}(a_0+B_i)\hat{\xi}_{i+1}^N+\sum_{i=k}^{\infty}(B_i-B_{i-k})\hat{\xi}_{i+1}^N\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&\le m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=1}^{km} A_{km-i}\hat{\xi}_i^N+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+i}-A_i)\hat{\xi}_{-i}^N\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N\frac{32m^2}{\varepsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2\\
&+m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=0}^{km-1}(a_0+B_i)\hat{\xi}_{i+1}^N+\sum_{i=km}^{\infty}(B_i-B_{i-km})\hat{\xi}_{i+1}^N\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&+\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N\frac{32m^2}{\varepsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2.
\end{aligned}\tag{34}$$

Применяя леммы 2 и 3 к последнему неравенству правой части (34), имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\widehat{S}_n^N(t)\big|>\varepsilon\Big)\\
&\le m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=1}^{km} A_{km-i}\hat{\xi}_i^N+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+i}-A_i)\hat{\xi}_{-i}^N\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&+m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=0}^{km-1}(a_0+B_i)\hat{\xi}_{i+1}^N+\sum_{i=km}^{\infty}(B_i-B_{i-km})\hat{\xi}_{i+1}^N\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&+\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N\frac{64m^2}{\varepsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i^2 \le m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=1}^{k} A_{km-im}\sum_{j=(i-1)m+1}^{im}\hat{\xi}_j^N\right.\right.\\
&\left.\left.+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+im}-A_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\hat{\xi}_{-j}^N+\gamma_{1k}^m+\gamma_{2k}^m\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)\\
&+m\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=0}^{k-1}(a_0+B_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\hat{\xi}_{j+1}^N\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=k}^{\infty}(B_{im}-B_{(i-k)m})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\hat{\xi}_{j+1}^{N}+\gamma_{3k}^{m}+\gamma_{4k}^{m}\Bigg|>\frac{\varepsilon}{2}\Bigg)+\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N\frac{64m^2}{\varepsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i^2. \quad (35)$$

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t\in[0,1]}\big|\widehat{S}_n^N(t)\big|>\varepsilon\big)\le m\mathbf{P}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\Bigg|\sum_{i=1}^{k}A_{km-im}\sum_{j=(i-1)m+1}^{im}\hat{\xi}_j^N$$
$$+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+im}-A_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\hat{\xi}_{-j}^N\Bigg|>\varepsilon/6\Bigg)$$
$$+m\mathbf{P}\Bigg(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\Bigg|\sum_{i=0}^{k-1}(a_0+B_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\hat{\xi}_{j+1}^N$$
$$+\sum_{i=k}^{\infty}(B_{im}-B_{(i-k)m})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\hat{\xi}_{j+1}^N\Bigg|>\varepsilon/6\Bigg)$$
$$+\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N\frac{64m^2}{\varepsilon^2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i^2+\sum_{i=1}^{4}\mathbf{P}\left(\max_{k\le n/m}\left|\frac{\gamma_{ik}^m}{\sqrt{n}}\right|>\varepsilon/6\right). \quad (36)$$

Рассмотрим первое слагаемое правой части (36). Введем обозначения:

$$b_i=a_{(i-1)m+1}+\dots+a_{im},\ i\ge 1,\quad \eta_i=\sum_{j=(i-1)m+1}^{im}\hat{\xi}_j^N,\ i\ge 1,$$

$$A_k^1=\sum_{i=1}^{k}b_i,\ k\ge 1,\quad \eta_{-i}=\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\hat{\xi}_{-j}^N,\ i\ge 0.$$

С помощью этих обозначений первое слагаемое правой части (36) переписывается следующим образом:

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=1}^{k}A_{km-im}\sum_{j=(i-1)m+1}^{im}\hat{\xi}_j^N+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+im}-A_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\hat{\xi}_{-j}^N\right|>\frac{\varepsilon}{6}\right)$$
$$=\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^1\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}\big(A_{k+i}^1-A_i^1\big)\eta_{-i}\right|>\frac{\varepsilon}{6}\right). \quad (37)$$

Заметим, что выражение $\sum\limits_{i=1}^{k}A_{k-i}^1\eta_i+\sum\limits_{i=0}^{\infty}\big(A_{k+i}^1-A_i^1\big)\eta_{-i}$ представляет собой сумму скользящих средних, построенных по последовательности случайных величин $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и коэффициентам $\{c_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, где $c_i=b_i$ при $i\ge 1$ и $c_i=0$ при $i<1$ (см. (11)). Но тогда в силу леммы 1 справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{k\le n/m}\left|\sum_{i=1}^{k}A_{k-i}^1\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}\big(A_{k+i}^1-A_i^1\big)\eta_{-i}\right|>\frac{\varepsilon}{6}\right)\le\frac{144}{m\varepsilon^2}\Big(\sum_{i\ge 1}|b_i|\Big)^2\mathbf{D}\eta_0$$
$$=\frac{144}{\varepsilon^2}\Big(\sum_{i\ge 1}|a_{(i-1)m+1}+\dots+a_{im}|\Big)^2\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N. \quad (38)$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части (36). Обозначим

$$b_0 = a_0,\ b_{-i} = a_{-((i-1)m+1)} + \dots + a_{-(im)},\ i \ge 1, \quad B_k^1 = \sum_{i=1}^{k} b_{-i},\ k \ge 1.$$

В терминах этих обозначений второе слагаемое правой части (36) переписывается следующим образом:

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \le n/m} \left| \sum_{i=0}^{k-1} (b_0 + B_{im}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \hat{\xi}_{j+1}^N + \sum_{i=k}^{\infty} (B_{im} - B_{(i-k)m}) \sum_{j=im}^{(i+1)m-1} \hat{\xi}_{j+1}^N \right| > \frac{\varepsilon}{6}\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \le n/m} \left| \sum_{i=0}^{k-1} \big(a_0 + B_i^1\big)\eta_{i+1} + \sum_{i=k}^{\infty} \big(B_i^1 - B_{i-k}^1\big)\eta_{i+1} \right| > \frac{\varepsilon}{6}\right). \quad (39)$$

Но тогда опять же с помощью леммы 1 получаем неравенство

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \le n/m} \left| \sum_{i=0}^{k-1} \big(a_0 + B_i^1\big)\eta_{i+1} + \sum_{i=k}^{\infty} \big(B_i^1 - B_{i-k}^1\big)\eta_{i+1} \right| > \frac{\varepsilon}{6}\right)$$

$$\le \frac{144}{\varepsilon^2}\Big(|a_0| + \sum_{i \ge 1} |a_{-((i-1)m+1)} + \dots + a_{-(im)}|\Big)^2 \mathbf{D}\hat{\xi}_0^N. \quad (40)$$

Используя (38) и (40), переписываем неравенство (36) так:

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t \in [0,1]} \big|\widehat{S}_n^N(t)\big| > \varepsilon\big) \le \frac{144m}{\varepsilon^2}\Big(\sum_{i \ge 1} |a_{(i-1)m+1} + \dots + a_{im}|\Big)^2 \mathbf{D}\hat{\xi}_0^N$$

$$+ \frac{144m}{\varepsilon^2}\Big(|a_0| + \sum_{i \ge 1} |a_{-((i-1)m+1)} + \dots + a_{-(im)}|\Big)^2 \mathbf{D}\hat{\xi}_0^N$$

$$+ \frac{64m^2}{\varepsilon^2}\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2 + \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}\left(\max_{k \le n/m} \left|\frac{\gamma_{ik}^m}{\sqrt{n}}\right| > \frac{\varepsilon}{6}\right). \quad (41)$$

Учитывая леммы 2, 3 и неравенство (41), получаем

$$\mathbf{P}\big(\sup_{t \in [0,1]} \big|\widehat{S}_n^N(t)\big| > \varepsilon\big) \le \frac{144m}{\varepsilon^2}\Big(\sum_{i \ge 1} |a_{(i-1)m+1} + \dots + a_{im}|\Big)^2 \mathbf{D}\hat{\xi}_0^N$$

$$+ \frac{144m}{\varepsilon^2}\Big(|a_0| + \sum_{i \ge 1} |a_{-((i-1)m+1)} + \dots + a_{-(im)}|\Big)^2 \mathbf{D}\hat{\xi}_0^N$$

$$+ \frac{64m^2}{\varepsilon^2}\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2 + \frac{576m^2}{\varepsilon^2}\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^2. \quad (42)$$

Условие теоремы, а также тот факт, что $\mathbf{D}\hat{\xi}_0^N \to 0$ при $N \to \infty$, заканчивают доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. Прежде всего представим n в виде $km + r$, где $0 \le r < m$ (m — натуральное число, см. условие теоремы 2). В силу этого все дальнейшие предельные соотношения будут изучаться при $k \to \infty$. Далее мы будем использовать следующие два равенства из леммы 4 (см. представление (25) и (31)):

$$\sum_{i=1}^{km+r} A_{km+r-i}\eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+r+i} - A_i)\eta_{-i} = \sum_{i=1}^{km} A_{km-i}\eta_i + \sum_{i=0}^{\infty} (A_{km+i} - A_i)\eta_{-i} + \gamma_{kr1}^m, \quad (43)$$

а также

$$\sum_{j=0}^{km+r-1}(a_0+B_j)\eta_{j+1}+\sum_{j=km+r}^{\infty}(B_j-B_{j-km-r})\eta_{j+1}$$
$$=\sum_{j=0}^{km-1}(a_0+B_j)\eta_{j+1}+\sum_{j=km}^{\infty}(B_j-B_{j-km})\eta_{j+1}+\gamma^m_{kr2}. \quad (44)$$

Из лемм 2 и 3, а также из (43) и (44) получаем

$$S_{km+r}=\sum_{i=1}^{k}A_{km-im}\sum_{j=(i-1)m+1}^{im}\xi_j+\sum_{i=0}^{\infty}(A_{km+im}-A_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\xi_{-j}$$
$$+\sum_{i=0}^{k-1}(a_0+B_{im})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\xi_{j+1}+\sum_{i=k}^{\infty}(B_{im}-B_{(i-k)m})\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\xi_{j+1}$$
$$+\sum_{i=1}^{4}\gamma^m_{ik}+\gamma^m_{kr1}+\gamma^m_{kr2}. \quad (45)$$

Так же, как и в теореме 1, введем следующие обозначения:

$$b_i=a_{(i-1)m+1}+\dots+a_{im},\ i\ge 1,\quad \eta_i=\sum_{j=(i-1)m+1}^{im}\xi_j,\ i\ge 1,$$

$$A^1_k=\sum_{i=1}^{k}b_i,\ k\ge 1,\quad \eta_{-i}=\sum_{j=im}^{(i+1)m-1}\xi_{-j},\ i\ge 0,$$

$$b_0=a_0,\ b_{-i}=a_{-((i-1)m+1)}+\dots+a_{-(im)},\ i\ge 1,\quad B^1_k=\sum_{i=1}^{k}b_{-i},\ k\ge 1.$$

Тогда S_{km+r} преобразуется следующим образом:

$$S_{km+r}=\sum_{i=1}^{k}A^1_{k-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}\big(A^1_{k+i}-A^1_i\big)\eta_{-i}+\sum_{i=0}^{k-1}\big(a_0+B^1_i\big)\eta_i$$
$$+\sum_{i=k}^{\infty}\big(B^1_i-B^1_{i-k}\big)\eta_i+\sum_{i=1}^{4}\gamma^m_{ik}+\gamma^m_{kr1}+\gamma^m_{kr2}. \quad (46)$$

Рассмотрим первые четыре слагаемых правой части (46). Их сумма равна сумме скользящих средних, построенных по последовательностям $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и $\{b_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ (см. (11)), а именно:

$$\sum_{i=1}^{k}A^1_{k-i}\eta_i+\sum_{i=0}^{\infty}\big(A^1_{k+i}-A^1_i\big)\eta_{-i}+\sum_{i=0}^{k-1}\big(a_0+B^1_i\big)\eta_i+\sum_{i=k}^{\infty}\big(B^1_i-B^1_{i-k}\big)\eta_i=\sum_{j=1}^{k}Y_j, \quad (47)$$

где $Y_j=\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}b_{j-i}\eta_i$. Обозначим $Z_k=\sum\limits_{j=1}^{k}Y_j$. Заметим, что

$$Z_k=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(b_{i+1}+\dots+b_{i+k})\eta_i.$$

Поскольку $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |b_i| < \infty$, нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\frac{\mathbf{D}Z_k}{km} = k^{-1}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(b_{i+1}+\dots+b_{i+k})^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i^2 + 2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_{i+j}b_i - 2k^{-1}\sum_{j=1}^{k} j\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_{i+j}b_i.$$

В силу леммы Кронекера (см. [11, с. 328]) последняя двойная сумма в правой части этого равенства в пределе при $k\to\infty$ обращается в нуль. Так что при условии абсолютной суммируемости последовательности $\{b_k\}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{D}Z_k}{km} = \sigma^2 = \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i\Big)^2. \tag{48}$$

Заметим, что (см. доказательство лемм 2–4)

$$\mathbf{D}\gamma_{ik}^m \le 4m^2\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l^2,\ i=1,\dots,4,\quad \mathbf{D}\gamma_{kri}^m \le 2m^2\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l^2,\ i=1,2.$$

При этом имеем

$$\frac{S_{km+r}}{\sqrt{km}} = \frac{Z_k}{\sqrt{km}} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{4}\gamma_{ik}^m + \gamma_{kr1}^m + \gamma_{kr2}^m}{\sqrt{km}}.$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{D}S_{km+r}}{km} = \lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{D}Z_k}{km}.$$

Но тогда (см. (48))

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathbf{D}S_{km+r}}{km} = \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\Big)^2.$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
2. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
3. *Боровков А. А., Могульский А. А., Саханенко А. И.* Предельные теоремы для случайных процессов. М.: ВИНИТИ, 1995. Т. 82.
4. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1980.
5. *Давыдов Ю. А.* Принцип инвариантности для стационарных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1970. Т. 24, № 3. С. 487–498.
6. *Аркашов Н. С., Борисов И. С.* Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1221–1255.
7. *Hannan E. J.* The central limit theorem for time series regression // Stochastic Processes Appl. 1979. N 9. P. 281–289.
8. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale limit theory and its application. New York: Acad. Press, 1980.
9. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
10. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965.
11. *Петров В. В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

Статья поступила 2 декабря 2008, окончательный вариант — 17 июня 2010 г.

Аркашов Николай Сергеевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. Карла Маркса, 20, Новосибирск 630092
nicky1978@mail.ru