Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 517.54, 517.554

ДОСТАТОЧНОСТЬ СЕМЕЙСТВА ЛОМАНЫХ В МЕТОДЕ МОДУЛЕЙ И УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык

Аннотация. Установлена достаточность семейства ломаных при вычислении модуля конденсатора. Распространено определение Альфорса — Бёйрлинга устранимых множеств на основе прямоугольников на весовые соболевские пространства с весом Макенхаупта. Получены точные характеристики устранимых множеств в терминах обхвата ломаными. Установлена инвариантность весовых соболевских пространств при квазиизометрических отображениях.

Ключевые слова: модуль семейства кривых, емкость конденсатора, вес Макенхаупта, устранимое множество, соболевское пространство, квазиизометрия.

В работе известное определение Альфорса — Бёйрлинга [1] устранимых множеств для регулярных функций с ограниченным интегралом Дирихле на основе координатных прямоугольников распространяется на соболевский класс $L^1_{p,w}(G)$ [2].

При доказательстве ряда утверждений используется технический результат о том, что при вычислении модуля семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора, можно считать эти кривые ломаными (свойство достаточности). Для $p = n$, $w \equiv 1$ этот результат установлен В. В. Асеевым [3].

В § 3 приводится условие малости обхвата для изучаемых здесь устранимых множеств в терминах ломаных. Как следствия из него получены точные описания данных множеств на гиперплоскости и сфере, что содержит как частный случай критерий В. В. Асеева [3].

Кроме того, установлена инвариантность класса $L^1_{p,w}(G)$ при квазиизометрическом отображении открытого множества G.

Подробное изложение свойств класса $L^1_{p,w}(G)$ дано Оцука в [4] (в его обозначениях $L^1_{p,w}(G) = BL^{p,w}(G)$).

Обзор результатов, в идейном плане близких к тематике нашей статьи, можно найти в [3].

§ 1. Предварительные сведения

Ниже G — открытое ограниченное множество в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; $\mathscr{L}_k$, $\mathscr{H}_k$ — k-мерные меры Лебега, Хаусдорфа соответственно; A_p — класс локально интегрируемых функций $w : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ–2810–2008.1), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–000 28) и ДВО РАН (грант 06–III–А–01–013).

удовлетворяющих условию Макенхаупта [5]

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\,dx \biggl(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\,dx\biggr)^{p-1} < \infty, \tag{1}$$

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset \mathbb{R}^n$, $|Q| = \mathscr{L}_n(Q)$, $p, q \in (1, +\infty)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Отметим, что в (1) семейство кубов Q можно заменить семейством шаров (см. [4, гл. 5]).

Обозначим через $L^{p,w}(D)$, где D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, класс функций $f : D \to [-\infty, +\infty]$, для которых $\|f\|_{p,w} = \bigl(\int\limits_D |f|^p w\,dx\bigr)^{1/p} < \infty$. Через $L^{p,w}_+(D)$ обозначим класс борелевских функций $f : D \to [0, +\infty]$, $f \in L^{p,w}(D)$.

Пусть $B(x, r)$ — открытый шар с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$ радиуса $r > 0$. Определим максимальную функцию

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

для локально интегрируемой в $\mathbb{R}^n$ функции f, $|B(x,r)| = \mathscr{L}_n(B(x,r))$. Известно (см. [4, теорема 5.1.1]), что

$$\|Mf(x)\|_{p,w} \le \mathrm{const}\,\|f\|_{p,w}. \tag{2}$$

Пусть $d(E, F)$, $d(E)$ обозначают соответственно евклидово расстояние между E и F, евклидов диаметр E для $E, F \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{E}$ — замыкание множества E в топологии $\mathbb{R}^n$, ∂E — граница множества E.

Для весовой функции $w \in A_p$ обозначим через $L^1_{p,w}(G)$ пространство функций $u : G \to (-\infty, +\infty)$, локально интегрируемых в G, имеющих в G обобщенные частные производные и таких, что $\|u\|^p_{L^1_{p,w}(G)} = \int\limits_G |\nabla u|^p w\,dx < \infty$.

Конденсатором назовем набор множеств (F_0, F_1, G), где F_0, F_1 — непустые непересекающиеся компакты из G. Определим (p, w)-емкость с весом $w \in A_p$ конденсатора (F_0, F_1, G) как

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G) = \inf_u \int\limits_G |\nabla u|^p w\,dx,$$

где инфимум берется по всем функциям u таким, что $u \in C^\infty(G) \cap L^1_{p,w}(G)$; $u = j$ в некоторой окрестности F_j, $j = 0, 1$. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{Adm}_{p,w}(F_0, F_1, G)$.

Кривой в $\mathbb{R}^n$ назовем образ числового интервала или отрезка при непрерывном отображении его в $\mathbb{R}^n$.

Пусть дано некоторое семейство Γ кривых в $\mathbb{R}^n$. Определим (p, w)-модуль с весом $w \in A_p$ семейства Γ следующим образом:

$$m_{p,w}(\Gamma) = \inf_\rho \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p w\,dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : [0, +\infty]$ таким, что $\int\limits_\gamma \rho\,d\mathscr{H}_1 \ge 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. Класс всех таких допустимых функций (или допустимых метрик) обозначим через $\mathrm{adm}_{p,w}(\Gamma)$.

Будем говорить, что кривая $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ *соединяет множества* A и B, если $\gamma(x) \to x_0 \in A$ при $x \to a$ и $\gamma(x) \to x_1 \in B$ при $x \to b$.

Для конденсатора (F_0, F_1, G) через $\Gamma(F_0, F_1, G)$ обозначим семейство всех кривых $\gamma \subset G$, соединяющих F_0 и F_1. Тогда (p,w)-модуль конденсатора с весом $w \in A_p$ определим с помощью равенства $m_{p,w}(F_0, F_1, G) = m_{p,w}(\Gamma(F_0, F_1, G))$. Положим $\operatorname{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G) = \operatorname{adm}_{p,w}(\Gamma(F_0, F_1, G))$.

Семейство всех ломаных $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G)$ таких, что для любых окрестностей U компакта $F_0 \cup F_1$ пересечение $\gamma \cap (G \setminus U)$ содержится в объединении конечного числа звеньев ломаной γ, обозначим через $\Gamma^0(F_0, F_1, G)$. Положим

$$\operatorname{adm}_{p,w}(\Gamma^0(F_0, F_1, G)) = \operatorname{adm}^0_{p,w}(F_0, F_1, G),$$

$$m_{p,w}(\Gamma^0(F_0, F_1, G)) = m^0_{p,w}(F_0, F_1, G).$$

Пусть $0 < \omega < \infty$ — локально интегрируемая функция в G. Как и выше, определим пространства $L^{p,\omega}(G)$, $L^1_{p,\omega}(G)$ и (p,ω)-модуль семейства кривых.

Пусть γ — локально спрямляемая кривая. Функцию f, заданную на γ, назовем *абсолютно непрерывной на* γ, если она абсолютно непрерывна на любой замкнутой дуге этой кривой как функция длины при натуральной параметризации этой дуги.

Будем говорить, что f *принадлежит* $\mathrm{AC}^{p,\omega}(G)$, если f абсолютно непрерывна на (p,ω)-п. в. кривых из G (т. е. (p,ω)-модуль семейства кривых, на которых f не является абсолютно непрерывной, равен нулю) и $|\nabla f| \in L^{p,\omega}(G)$ (подробнее см. [4, гл. 4]). Если $w \in A_p$, то $\mathrm{AC}^{p,w}(G) = L^1_{p,w}(G)$ в том смысле, что каждую функцию $f \in L^1_{p,w}(G)$ можно переопределить на множестве $\mathscr{L}_n$-меры нуль так, чтобы она стала функцией из $\mathrm{AC}^{p,w}(G)$ [4, теорема 4.4.6].

Пусть $K(r_1, r_2) = K(x_0, r_1, r_2) = B(x_0, r_2) \setminus \overline{B(x_0, r_1)}$, где $x_0 = \left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)$ и $0 < r_1 < r_2$.

Обозначим

$$l^+(r_1, r_2) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \left(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n\right), x_n > x_n^0\right\} \cap \overline{K(r_1, r_2)},$$

$$l^-(r_1, r_2) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \left(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n\right), x_n < x_n^0\right\} \cap \overline{K(r_1, r_2)}.$$

Будем говорить, что вес $w \in A_p$ *удовлетворяет условию* (α) в точке x_0, если можно указать шар $B(x_0, r_0)$ и положительные постоянные $c_1(x_0)$, $c_2(x_0)$, $\alpha = \alpha(x_0) \in [0, n)$ такие, что $c_1|x - x_0|^{-\alpha} \le w(x) \le c_2|x - x_0|^{-\alpha}$ для всех $x \in B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}$. Если $\alpha = 0$, то вес $w \in A_p$ назовем *локально ограниченным в точке* x_0.

Приведем аналог известной леммы Вяйсяля [6] для весовых модулей.

Лемма 1. *Пусть $w \in A_p$, $p \ge n$, и вес w удовлетворяет условию (α). Тогда для всех $0 < r_1 < r_2 < r_0$*

1) *в случае $\alpha = 0$, $p = n$*

$$m_{p,w}(l^+(r_1, r_2), l^-(r_1, r_2), K(r_1, r_2)) \ge \operatorname{const} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

2) *в случае $\alpha - n + p > 0$*

$$m_{p,w}(l^+(r_1, r_2), l^-(r_1, r_2), K(r_1, r_2)) \ge \operatorname{const} \ln^p \frac{r_2}{r_1},$$

где const *зависит только от* p, c_1, c_2, n, α.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $x_0 = 0$. Выберем в $\mathbb{R}^n$ сферическую систему координат с полюсом в точке 0:

$$\begin{aligned}
&x_1 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-1},\\
&x_j = r\cos_{j-1}\prod_{k=j}^{n-1}\sin\theta_k, \quad j=2,\dots,n-1, \qquad (3)\\
&x_n = r\cos\theta_{n-1} \quad (r\geq 0,\ \theta_1\in[0,2\pi),\ \theta_j\in[0,\pi],\ j=2,\dots,n-1).
\end{aligned}$$

Якобиан преобразования от сферических координат к декартовым имеет вид $\frac{D(x_1,x-2\dots,x_n)}{D(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})} = r^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin^{k-1}\theta_k$.

Пусть $\rho\in \mathrm{adm}_{p,w}\,\Gamma(l^+(r_1,r_2),l^-(r_1,r_2),K(r_1,r_2))$. Тогда ρ будет допустимой метрикой для семейства $\Gamma(r)$ кривых на сфере $S(r)=\partial B(0,r)$, соединяющих точки $a(r)\in l^+(r_1,r_2)\cap S(r)$ и $b(r)\in l^-(r_1,r_2)\cap S(r)$, $r_1<r<r_2$. Сфера $S(r)$ в сферических координатах представляет собой $(n-1)$-мерный прямоугольник $\Pi(r)=\{(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1}):\theta_1\in[0,2\pi),\theta_j\in[0,\pi],\ j=2,\dots,n-1\}$. Пусть $\gamma_{\theta_1\dots\theta_{n-2}}\in\Gamma(r)$ — дуга окружности на $S(r)$, на которой $\theta_1,\dots,\theta_{n-2}$ фиксированы. Данной дуге $\gamma_{\theta_1\dots\theta_{n-2}}$ соответствует в $\Pi(r)$ прямолинейный отрезок $\tau_{\theta_1\dots\theta_{n-2}}$, соединяющий противоположные грани σ_0, σ_π, на которых соответственно $\theta_{n-1}=0$, $\theta_{n-1}=\pi$. Тогда

$$1\leq \int\limits_{\gamma_{\theta_1\dots\theta_{n-2}}}\rho\,ds = \int\limits_0^\pi \rho r\,d\theta_{n-1},$$

следовательно,

$$\frac{1}{r}\leq\int\limits_0^\pi\rho\,d\theta_{n-1}. \tag{4}$$

Если $n>2$, то интегрирование равенства (4) по $\theta_1,\dots,\theta_{n-2}$ даст оценку

$$\frac{\mathscr{L}_{n-2}(\sigma_0)}{r}\leq\int\limits_{\Pi(r)}\rho\,d\theta_1\dots d\theta_{n-1}. \tag{5}$$

Интегрируя (5) для $n>2$ и (4) для $n=2$ по $r\in[r_1,r_2]$ и применяя неравенство Гёльдера, придем к неравенству

$$\begin{aligned}
\mathrm{const}\ln\frac{r_2}{r_1}\leq &\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}dr\int\limits_{\Pi(r)}\rho^p w r^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin^{k-1}\theta_k\right)d\theta_1\dots d\theta_{n-1}\right)^{1/p}\\
\times &\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}dr\int\limits_{\Pi(r)}w^{-\frac{q}{p}}r^{-\frac{n-1}{p}q}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin^{-\frac{k-1}{p}q}\theta_k\right)d\theta_1\dots d\theta_{n-1}\right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку $\sin\theta\approx\theta$ при $\theta\to 0$ и $\sin\theta_i$, $i=2,\dots,n-1$, в последнем интеграле из (6) входят с показателями степени из $(-1,0]$, в силу условия (α) и теоремы Фубини последний интеграл допускает оценку сверху

$$\mathrm{const}\int\limits_{r_1}^{r_2}c_1(x_0)^{\frac{1}{1-p}}\cdot r^{\frac{\alpha}{p-1}}\cdot r^{-\frac{n-1}{p-1}}\,dr. \tag{7}$$

Соединяя (6) и (7), переходя к декартовым координатам в первом интеграле из (6) и используя произвол в выборе $\rho \in \operatorname{adm}_{p,w} \Gamma(l^+(r_1, r_2), l^-(r_1, r_2), K(r_1, r_2))$, получим требуемые неравенства в лемме 1.

Пусть τ_1, τ_2 — два невырожденных континуума таких, что $\tau_1 \cap \tau_2$ состоит из единственной точки $a \in G$ и $\Gamma = \Gamma(\tau_1 \setminus \{a\}, \tau_2 \setminus \{a\}, G)$ — семейство кривых, соединяющих $\tau_1 \setminus \{a\}$ и $\tau_2 \setminus \{a\}$ в G, $\Gamma(r) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \subset B(a, r)\}$.

Лемма 2. *Если $m_{p,w}(\Gamma) = \infty$, то $m_{p,w}(\Gamma(r)) = \infty$ для любого $r > 0$.*

Доказательство. Предположим, что $m_{p,w}(\Gamma(r_1)) < \infty$ для некоторого $r_1 > 0$. Тогда найдется $\rho_1 \in \operatorname{adm}_{p,w}(\Gamma(r_1))$, для которой выполнено неравенство $\int\limits_{B(a,r)} \rho_1^p w\, dx < \infty$.

Пусть $B(a, R)$ — шар такой, что $\tau_1 \cup \tau_2 \subset B(a, R)$. Введем обозначение $d = \min\{d(\tau_1 \cup \tau_2, \partial B(a, R)), d(\tau_2, \tau_1 \setminus B(a, r_1)), d(\tau_1, \tau_2 \setminus B(a, r_1))\}$. Положим

$$\rho = \begin{cases} 0, & x \notin B(a, R), \\ \frac{1}{d}, & x \in B(a, R) \setminus B(a, r_1), \\ \rho_1, & x \in B(a, r_1). \end{cases}$$

Тогда $\rho \in \operatorname{adm}_{p,w}(\Gamma)$ и

$$\int\limits_G \rho^p w\, dx \leq \frac{1}{d^p} \int\limits_{B(a,R)} w\, dx + \int\limits_{B(a,r_1)} \rho_1^p w\, dx < \infty,$$

что противоречит условию $m_{p,w}(\Gamma) = \infty$.

§ 2. Семейство $\Gamma^0(F_0, F_1, G)$ и его свойства

Модифицируя построения из [7, 8], распространим теорему В. В. Асеева [3] о достаточности непрерывных в $G \setminus (F_0 \cup F_1)$ допустимых функций для $\Gamma^0(F_0, F_1, G)$ и о полноте $\Gamma^0(F_0, F_1, G)$ для $\Gamma(F_0, F_1, G)$ в проблеме модуля этих семейств при $p = n$, $w \equiv 1$ на случай (p, w)-модуля этих семейств.

Лемма 3. *В определении (p, w)-модуля семейства $\Gamma^0(F_0, F_1, G)$ инфимум можно брать по системе непрерывных в $G \setminus (F_0 \cup F_1)$ допустимых функций. При этом $m^0_{p,w}(F_0, F_1, G) = m_{p,w}(F_0, F_1, G)$.*

Доказательство. Пусть функция ρ допустима для $m^0_{p,w}(F_0, F_1, G)$ и такая, что $\int\limits_G \rho^p w\, dx < \infty$ (поскольку $1/d(F_0, F_1) \in \operatorname{adm}_{p,w}(\Gamma^0)$, отсюда следует, что $m_{p,w}(\Gamma^0) < \infty$). Зададим в $G \setminus (F_0 \cup F_1)$ функцию $\alpha(x)$ следующим образом:

1) $0 < \alpha(x) \leq \frac{1}{2} d(x, \partial(G \setminus (F_0 \cup F_1)))$,

2) $\alpha(x)$ локально липшицева и кусочно-аффинна,

3) $|\nabla\alpha(x)| \leq \frac{1}{2}$ п. в. в смысле $\mathscr{L}_n$-меры.

Для $x \notin G \setminus (F_0 \cup F_1)$ положим $\alpha(x) = 0$. Построение такой функции приведено в [3].

Пусть в G

$$\rho_k(x) = \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \rho\left(x + \frac{\alpha(x)}{k} y\right) dy, \quad k = 1, 2, \dots.$$

При натуральном k и любом фиксированном $y \in B(0, 1)$ преобразование $z = z_k(x) = x + \frac{\alpha(x)}{k} y$ локально кусочно-аффинно на $G \setminus (F_0 \cup F_1)$, тождественно на $(\mathbb{R}^n \setminus G) \cup F_0 \cup F_1$. Поэтому $z(\gamma) \in \Gamma^0(F_0, F_1, G)$ для любых γ, принадлежащих $\Gamma^0(F_0, F_1, G)$. Кроме того, для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\left(1 - \frac{1}{2k}\right)|b - a| \leq |z(b) - z(a)| \leq \left(1 + \frac{1}{2k}\right)|b - a|.$$

Отсюда, применяя стандартные рассуждения (см. [3, 8]), получим, что ρ_k непрерывна в $G \setminus (F_0 \cup F_1)$ и $\int\limits_\gamma \rho_k(x)\, d\mathscr{H}_1 \geq \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{-1}$ для любой $\gamma \in \Gamma^0(F_0, F_1, G)$.

Более того, $\|\rho_k - \rho\|_{p,w} \to 0$ в G при $k \to \infty$ (см. доказательство теоремы 2 для функций $f(y)$ и $f_k(y)$ в (17)).

Следовательно, функция $\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\rho_k$ непрерывна в $G \setminus (F_0 \cup F_1)$, является допустимой функцией для $m_{p,w}(\Gamma^0)$ и

$$\int\limits_G \left(\left(1 + \frac{1}{2k}\right)\rho_k\right)^p w\, dx = \int\limits_G \rho^p w\, dx + o(1) \quad \text{при } k \to \infty.$$

Тем самым достаточность семейства непрерывных в $G \setminus (F_0 \cup F_1)$ допустимых функций для $m^0_{p,w}(F_0, F_1, G)$ установлена. Повторяя дословно рассуждения из доказательства полноты семейства кусочно-линейных континуумов в упомянутой выше теореме В. В. Асеева [3], получим

$$m^0_{p,w}(F_0, F_1, G) = m_{p,w}(F_0, F_1, G).$$

§ 3. Устранимые множества для (p, w)-модуля семейства кривых

Пусть $E \subset G$ — относительно замкнутое в G множество. Для координатного прямоугольника $\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ пусть его грани, параллельные гиперплоскости $x_i = 0$, обозначаются через $\sigma_{0i} \subset \{x : x_i = a_i\}$ и $\sigma_{1i} \subset \{x : x_i = b_i\}$. Следуя Альфорсу и Бёйрлингу [1], С. К. Водопьянову и В. М. Гольдштейну [9], E назовем *$NC_{p,w}$-множеством*, если для любого координатного прямоугольника Π, $\overline{\Pi} \subset G$, выполняется равенство

$$m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E) = m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{8}$$

В следующих утверждениях устанавливается, что $NC_{p,w}$-множества не влияют на модуль $m_{p,w}(F_0, F_1, G)$ и являются устранимыми для весового соболевского пространства $L^1_{p,w}(G)$.

Отметим, что идея изучения подобного рода устранимых множеств в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, в терминах прямоугольников не нова и для $w \equiv 1$ рассматривалась в [10, 11].

Приводимые ниже леммы носят технический характер, и для $w \equiv 1$ их можно найти в [10, 12].

Лемма 4. *Для* $\Pi = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ *и* $w \in A_p$

$$m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi) \geq \int\limits_{\Pi'} \left(\int\limits_{a_i}^{b_i} w^{1-q}\, dx_i\right)^{1-p} dx', \tag{9}$$

где $\Pi' = \{x' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : a_j < x_j < b_j,\ j \neq i\}$.

Доказательство неравенства (9) приведено в [2, с. 71].

Лемма 5. *Если E — $NC_{p,w}$-множество, то* $\mathscr{L}_n(E)=0$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}_n(E)>0$. Рассмотрим координатный прямоугольник $\Pi=\{x=(x_1,\dots,x_n): a_i<x_i<b_i,\ i=1,2,\dots,n\}$, $\overline{\Pi}\subset G$, такой, что $\mathscr{L}_n(E\cap\Pi)>0$. Пусть $\rho_1=1$ на $\Pi\setminus E$, $\rho_1=0$ на $\Pi\cap E$. Для рациональных чисел $r_1<r_2$ из (a_1,b_1) положим $\Pi(r_1,r_2)=\Pi\cap\{x\in\mathbb{R}^n: r_1<x_1<r_2\}$, $\sigma_0=\sigma_0(r_1,r_2)=\overline{\Pi}\cap\{x: x_1=r_1\}$, $\sigma_1=\sigma_1(r_1,r_2)=\overline{\Pi}\cap\{x: x_1=r_2\}$. Тогда $\frac{\rho_1}{r_2-r_1}\in\operatorname{adm}_{p,w}(\sigma_0,\sigma_1,\Pi(r_1,r_2)\setminus E)$. Поэтому в силу леммы 4

$$\int\limits_{\Pi'}\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}(\ \rho_1/(r_2-r_1))^p\,w\,dx_1\right)dx'\geq\int\limits_{\Pi'}\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}w^{1-q}\,dx_1\right)^{1-p}dx',\qquad(10)$$

где $\Pi'=\{x'=(x_2,\dots,x_n): a_i<x_i<b_i, i=2,\dots,n\}$.

Положим $\Phi_1(x',r_1,r_2)=\int\limits_{r_1}^{r_2}\rho_1^p w\,dx_1$, $\Phi_2(x',r_1,r_2)=\left(\int\limits_{r_1}^{r_2}w^{1-q}\,dx_1\right)^{1-p}$, $x'\in\Pi'$, $r_1<r_2$ — любые рациональные числа из (a_1,b_1).

По теореме Фубини (см., например, [13]) существует множество $\widetilde{\Pi}'(r_1,r_2)$ из Π', $\mathscr{L}_{n-1}(\widetilde{\Pi}'(r_1,r_2))=\mathscr{L}_{n-1}(\Pi')$, все точки которого являются точками Лебега для функций $\Phi_1(x',r_1,r_2)$ и $\Phi_2(x',r_1,r_2)$ (точками дифференцируемости интегралов от этих функций на Π'). Положим $\widetilde{\Pi}'=\bigcap\limits_{r_1<r_2}\widetilde{\Pi}'(r_1,r_2)$. Очевидно, что $\mathscr{L}_{n-1}(\widetilde{\Pi}')=\mathscr{L}_{n-1}(\Pi')$.

Выберем теперь $x'\in\widetilde{\Pi}'$ таким образом, чтобы $\mathscr{H}_1(l(x')\cap E)>0$ и $\mathscr{H}_1$-п. в. точки отрезка $l(x')=\{(x_1,x'): a_1\leq x_1\leq b_1\}$ являлись точками Лебега для функций $\rho_1^p\cdot w$, w^{1-q}, рассматриваемых на этом отрезке.

Из (10) получаем

$$\left(\frac{1}{r_2-r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\rho_1^p w\,dx_1\right)^{1/p}\left(\frac{1}{r_2-r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}w^{1-q}\,dx_1\right)^{1/q}\geq 1.\qquad(11)$$

Произвол в выборе рациональных r_1, r_2 из (a_1,b_1) и абсолютная непрерывность рассматриваемых интегралов позволяют заменить r_1, r_2 произвольными числами $e_1<e_2$ из (a_1,b_1). По построению найдутся $x_1^0\in(a_1,b_1)$ и $(x_1^0,x')\in E\cap l(x')$, (x_1^0,x') — точка Лебега для функций $\rho_1^p\cdot w$, w^{1-q}. Полагая в (11) $e_1=x_1^0-\delta$, $e_2=x_1^0+\delta$ для $\delta>0$ и устремляя $\delta\to0$, получим противоречивое неравенство $0=\rho(x_1^0,x')\geq1$. Следовательно, $\mathscr{L}_n(E)=0$.

Пусть X_i — семейство всех прямых в $\mathbb{R}^n$, параллельных координатной x_i-оси, $i=1,2,\dots,n$. Индексируем каждую прямую $l\in X_i$ индексом a, где a — точка пересечения этой прямой с гиперплоскостью $H_i=\{x\in\mathbb{R}^n: x_i=0\}$. Тогда будем говорить, что некоторое свойство *выполняется для* $\mathscr{H}_{n-1}$*-п. в. прямых из* X_i (или отрезков, расположенных на этих прямых), если соответствующее множество точек a на H_i для прямых (или отрезков на этих прямых) из X_i, не удовлетворяющих этому свойству, имеет $\mathscr{H}_{n-1}$-меру 0.

Пусть E — замкнутое относительно G множество и $\mathscr{L}_n(E)=0$. Будем говорить, что E *удовлетворяет условию малости обхвата с весом* $w\in A_p$ *в* G *относительно* X_i, если для каждой борелевской функции $\rho: G\to[0,+\infty)$, локально ограниченной в $G\setminus E$, $\rho\in L^{p,w}(G)$, для любого $\varepsilon>0$ выполняется условие ε-обхвата, т. е. для $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. прямых $l\in X_i$, $l\cap E\neq\varnothing$, и для каждого невырожденного отрезка $[c,d] \subset l \cap E$ можно указать конечную последовательность непересекающихся интервалов $(c_k,d_k) \subset l$ и кривые $\gamma_k \subset G \setminus E$, соединяющие c_k с d_k, $k = 1,2,\dots,s$, такие, что $\sum\limits_{k=1}^{s} \int\limits_{\gamma_k} \rho \, d\mathscr{H}_1 < \varepsilon$, $\mathscr{H}_1\left(\bigcup\limits_{k=1}^{s} \gamma_k\right) < \varepsilon$ и $\bigcup(c_k,d_k) \supset l \cap E$. Последнее требование будем называть *условием ε-обхвата на отрезке* $[c,d]$. В этой ситуации меру $\mathscr{H}_{n-1}$ можно заменить на $\mathscr{L}_{n-1}$. Поскольку в дальнейшем будут рассматриваться аналоги малости обхвата для семейства кривых, индексируемых параметром a, изменяющимся на некоторой поверхности в $\mathbb{R}^n$, то использование $\mathscr{H}_{n-1}$-меры является более предпочтительным.

Заметим, что в определении ε-обхвата множество $\mathscr{H}^{n-1}$-п. в. прямых $l \in X_i$ можно выбрать не зависящим от ε.

Теорема 1. *E — $NC_{p,w}$-множество в G тогда и только тогда, когда E удовлетворяет условию малости обхвата с весом w в G относительно всех X_i, $i = 1,2,\dots,n$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть E — $NC_{p,w}$-множество в G. Рассмотрим случай $i = 1$. Зададим $\varepsilon > 0$. Достаточно доказать условие малости обхвата относительно X_1 для $\mathscr{H}_{n-1}$-п. в. отрезков, параллельных x_1-оси и соединяющих грани σ^1_{01}, σ^1_{11} наперед заданного прямоугольника Π_1, σ^1_{01}, σ^1_{11} параллельны H_1, $\overline{\Pi}_1 \subset G$. Рассмотрим также координатные прямоугольники $\Pi = \{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i,\ i = 1,2,\dots,n\}$ и Π_2, $\overline{\Pi}_1 \subset \Pi_2 \subset \overline{\Pi}_2 \subset \Pi \subset \overline{\Pi} \subset G$, причем $d(\partial\Pi_1,\partial\Pi_2) = \varepsilon_1 < \varepsilon$.

Пусть $E_1 = E \cap \overline{\Pi}_2$. Очевидно, что E_1 является $NC_{p,w}$-множеством в G. Положим $\Pi' = \{x' = (x_2,\dots,x_n) : a_j < x_j < b_j,\ j = 2,\dots,n\}$, $l(x') = \{x = (x_1,x') : a_1 \le x_1 \le b_1\}$, $x' \in \Pi'$. Покажем, что условие малости обхвата выполняется на отрезках $l(x')$ для п.-в. $x' \in \Pi'$.

Действительно, для функции ρ из определения малости обхвата положим $\rho_1 = \rho$ на Π и $\rho_1 = 0$ вне Π. Тогда (см. лемму 4)

$$\int\limits_{\Pi'} dx' \int\limits_{a_1}^{b_1} \rho_1^p w \, dx_1 < \infty, \quad \int\limits_{\Pi'} dx' \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} w^{1-q} \, dx_1\right)^{1-p} < \infty.$$

Пусть $\Phi_1(x',r_1,r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \rho_1^p w \, dx_1$, $\Phi_2(x',r_1,r_2) = \left(\int\limits_{r_1}^{r_2} w^{1-q} \, dx_1\right)^{1-p}$ для любых рациональных чисел r_1, r_2 из $[a_1,b_1]$. Как в доказательстве леммы 5, покажем, что существует измеримое множество $\widetilde{\Pi}' \subset \Pi'$, $\mathscr{L}_{n-1}(\widetilde{\Pi}') = \mathscr{L}_{n-1}(\Pi')$ такое, что любая точка $x' \in \widetilde{\Pi}'$ является точкой Лебега для каждой из функций $\Phi_1(x',r_1,r_2)$, $\Phi_2(x',r_1,r_2)$, $\Phi_1(x',a_1,b_1)$, $\Phi_2(x',a_1,b_1)$ (точками дифференцируемости интегралов от этих функций на Π') независимо от выбора рациональных $r_1, r_2 \in [a_1,b_1]$.

Выберем теперь $x' = (x_2,\dots,x_n) \in \widetilde{\Pi}'$ таким, чтобы $\mathscr{H}_1(l(x') \cap E_1) = 0$. Покроем $l(x') \cap E_1$ интервалами $A_k = (c_k,d_k)$, $k = 1,2,\dots,s$, где $c_k = (r_k,x')$, $d_k = (\tilde r_k,x')$ и r_k, $\tilde r_k$ — рациональные числа из (a_1,b_1), $r_k < \tilde r_k$, $\sum\limits_{k=1}^{s} \mathscr{H}_1(A_k) < \varepsilon_1$,

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{s} A_k} w^{1-q} \, dx_1 < \frac{\varepsilon_1}{4}, \qquad \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{s} A_k} \rho_1^p w \, dx_1 < \frac{\varepsilon_1}{4}.$$

Для малых δ пусть $\Pi'_k(\delta) = \{y' = (y_2, \dots, y_n) : |y_2 - x_2| < \delta, \dots, |y_n - x_n| < \delta\}$, $\Pi_k(\delta) = \{(x_1, y') : r_k < x_1 < \tilde{r}_k, y' \in \Pi'(\delta)\}$, σ_0^k, σ_1^k — грани $\Pi_k(\delta)$, параллельные гиперплоскости H_1, $\Gamma_k^0(\delta) = \Gamma^0\big(\sigma_0^k, \sigma_1^k, \Pi_k(\delta) \backslash E\big)$. В силу леммы 4 и определения $NC_{p,w}$-множества

$$m_{p,w}^0\big(\Gamma_k^0(\delta)\big) = m_{p,w}\big(\sigma_0^k, \sigma_1^k, \Pi_k(\delta) \setminus E\big) \geq \int\limits_{\Pi'_k(\delta)} \left(\int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} w^{1-q}\, dx_1 \right)^{1-p} dy'. \tag{12}$$

Обозначим $L_k(\delta) = \inf\big\{\int\limits_{\gamma} \rho_1\, d\mathscr{H}_1 : \gamma \in \Gamma_k^0(\delta)\big\}$. Покажем, что $L_k(\delta)$ будет достаточно мало, когда δ близко к нулю. Если $L_k(\delta) = 0$, то доказывать нечего. Поэтому считаем, что $L_k(\delta) > 0$. Тогда $\rho_1 / L_k(\delta) \in \operatorname{adm}_{p,w}\big(\Gamma_k^0(\delta)\big)$ и

$$m_{p,w}\big(\Gamma_k^0(\delta)\big) \leq (L_k(\delta))^{-p} \int\limits_{\Pi_k(\delta)} \rho_1^p w\, dx. \tag{13}$$

Соединяя (12) и (13), получим

$$(L_k(\delta))^{-p} \int\limits_{\Pi_k(\delta)} \rho_1^p w\, dx \geq \int\limits_{\Pi'_k(\delta)} \left(\int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} w^{1-q}\, dx_1 \right)^{1-p} dy'.$$

При достаточно малых $\delta > 0$, используя неравенство Юнга и дифференцируемость рассматриваемых интегралов, имеем

$$(L_k(\delta))^{-p} \left(\int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} \rho_1^p w\, dx_1 + \frac{\varepsilon_1}{8s} \right) \geq \left(\int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} w^{1-q}\, dx_1 + \frac{\varepsilon_1}{8s} \right)^{1-p},$$

$$L_k(\delta) \leq \left(\int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} \rho_1^p w\, dx_1 + \frac{\varepsilon_1}{8s} \right)^{1/p} \left(\int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} w^{1-q}\, dx_1 + \frac{\varepsilon_1}{8s} \right)^{1/q}$$
$$\leq \frac{1}{p} \int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} \rho_1^p w\, dx_1 + \frac{1}{q} \int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} w^{1-q}\, dx_1 + \frac{\varepsilon_1}{8s}.$$

По определению инфимума найдется ломаная $\gamma_k^0 \in \Gamma_k^0(\delta)$ такая, что

$$\int\limits_{\gamma_k^0} \rho_1\, d\mathscr{H}_1 \leq L_k(\delta) + \frac{\varepsilon_1}{8s} \leq \frac{1}{p} \int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} \rho_1^p w\, dx_1 + \frac{1}{q} \int\limits_{r_k}^{\tilde{r}_k} w^{1-q}\, dx_1 + \frac{\varepsilon_1}{4s}.$$

В силу локальной ограниченности функции ρ_1 в $\Pi \setminus E_1$ при достаточно малых $\delta > 0$ найдутся отрезки γ_k^1, γ_k^2, соединяющие точки c_k и d_k соответственно с концами ломаной γ_k^0 в $\Pi \setminus E$ так, что

$$\int\limits_{\gamma_k^1} \rho_1\, d\mathscr{H}_1 + \int\limits_{\gamma_k^2} \rho_1\, d\mathscr{H}_1 < \frac{\varepsilon_1}{2s}.$$

Следовательно, существуют простые ломаные $\gamma_k \subset \gamma_k^0 \cup \gamma_k^1 \cup \gamma_k^2$, соединяющие соответствующие точки c_k и d_k, $k = 1, 2, \dots, s$, которые удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{s} \int_{\gamma_k} \rho_1 \, d\mathscr{H}_1 \le \frac{1}{p} \left(\sum_{k=1}^{s} \int_{r_k}^{\tilde{r}_k} \rho_1^p w \, dx_1 \right) + \frac{1}{q} \left(\sum_{k=1}^{s} \int_{r_k}^{\tilde{r}_k} w^{1-q} \, dx_1 \right) + \frac{\varepsilon_1}{4} + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1.$$

Ломаные γ_k^0, γ_k^1, γ_k^2 можно выбрать так, чтобы $\mathscr{H}_1(\gamma_k) < \frac{\varepsilon_1}{s}$. Отсюда получим, что $\mathscr{H}_1 \left(\bigcup\limits_{k=1}^{s} \gamma_k \right) < \varepsilon_1$.

Ввиду выбора Π_1, Π_2, Π, конечной последовательности дуг γ_k и интервалов A_k, обеспечивающих выполнение условия ε_1-обхвата для функции ρ_1 на отрезке $l(x')$, извлекаем подпоследовательность дуг и интервалов, расположенных в Π_2, где $\rho_1 = \rho$, и обеспечивающих выполнение условия ε_1-обхвата на $l(x') \cap \overline{\overline{\Pi}}_1$ для ρ. Поскольку $\varepsilon_1 < \varepsilon$, для ρ выполняется условие малости обхвата на $l(x') \cap \overline{\overline{\Pi}}_1$. Тем самым условие необходимости для $i = 1$ доказано. Аналогично проводится доказательство для $i = 2, \dots, n$.

Достаточность. Пусть $ACL_{p,w}(G)$ — класс функций u, абсолютно непрерывных на линиях, для которых $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p,w}(G)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Известно, что $ACL_{p,w}(G) = L^1_{p,w}(G)$ (см., например, [4, теорема 4.1.5, замечание 4.4.3]). Равенство здесь понимается так, что для любой функции $f \in L^1_{p,w}(G)$ найдется ей эквивалентная функция $\tilde{f}$, $\mathscr{L}_n(\{x \in G : \tilde{f}(x) \ne f(x)\}) = 0$, из класса $ACL_{p,w}(G)$. Покажем, что *если E удовлетворяет условию малости обхвата относительно X_i, $i = 1, 2, \dots, n$, то любую функцию $f \in ACL_{p,w}(G \setminus E)$ можно продолжить до функции $\tilde{f} \in ACL_{p,w}(G)$.*

Предположим сначала, что $f \in ACL_{p,w}(G \setminus E) \cap C^\infty(G \setminus E)$.

Покажем, что функция f продолжается в Π до абсолютно непрерывной функции на $\mathscr{H}_{n-1}$-п. в. отрезках $l(x') \subset \Pi$, $x' \in \Pi'$, параллельных x_1-оси.

Пусть дано $\eta > 0$. Рассмотрим отрезок $l(x')$, на котором $|\nabla f|$ суммируем и выполняется условие малости обхвата для $\rho = |\nabla f|$. Не ограничивая общности, можно считать, что концы $l(x')$ лежат вне E. Пусть $\delta > 0$ такое, что $\int\limits_A |\nabla f| \, dx_1 < \eta$ для любого множества $A \subset l(x')$ с $\mathscr{L}_1(A) < \delta$.

Установим, что функция f равномерно непрерывна на $l(x') \setminus E$. Возьмем любые c_1, $c_2 \in l(x') \setminus E$, $c_1 < c_2$.

Пусть $0 < \varepsilon < \min\{d(c_1, c_2), d(c_1, E), d(c_2, E), d(l(x'), \partial\Pi)\}$. В силу выбора $l(x')$ найдутся интервалы A_i на $l(x')$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i \supset E \cap l(x')$ и ломаные $\gamma_i \subset \Pi \setminus E$, соединяющие концы интервалов A_i, такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} \mathscr{H}_1(A_i) < \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} |\nabla f| \, d\mathscr{H}_1 < \varepsilon.$$

Следовательно, есть простая ломаная $\gamma' \subset \left([c_1, c_2] \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \gamma_i \right) \right) \cap (\Pi \setminus E)$, соединяющая точки c_1 и c_2, для которой в силу гладкости f

$$|f(c_1)-f(c_2)| = \left|\int\limits_{\gamma'} \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right|$$

$$\leq \int\limits_{\gamma'} |\nabla f|\,d\mathscr{H}_1 \leq \int\limits_{c_1}^{c_2} |\nabla f|\,dx_1 + \sum_{i=1}^{k}\int\limits_{\gamma_i}|\nabla f|\,d\mathscr{H}_1 < \int\limits_{c_1}^{c_2}|\nabla f|\,dx_1+\varepsilon. \quad (14)$$

Переходя в (14) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$|f(c_1)-f(c_2)| \leq \int\limits_{c_1}^{c_2} |\nabla f|\,dx_1, \quad (15)$$

что означает равномерную непрерывность функции $f(x)$ на $l(x')\setminus E$. Отсюда сразу следует существование $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ на $l(x')\setminus E$ для каждой точки $c\in l(x')\cap E$. Продолжая функцию $f(x)$ по непрерывности, получим, что неравенство (15) выполняется для любых c_1, $c_2\in l(x')$.

Следовательно, $f(x)$ продолжаема до абсолютно непрерывной функции на линиях, параллельных x_1-оси, на Π. Поэтому $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, будучи обобщенной частной производной для $f(x)$ на $\Pi\setminus E$, будет обобщенной частной производной на Π. Аналогично устанавливаем, что $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ будет обобщенной частной производной $f(x)$ на Π, $i=2,\dots,n$. Другими словами, $f\in L^1_{p,w}(\Pi)$, и если ее переопределить на множестве меры нуль, то она будет принадлежать классу $ACL_{p,w}(\Pi)$ (см., например, [4, замечания 4.4.3, 4.4.4]).

Пусть теперь f — произвольная функция из класса $ACL_{p,w}(G\setminus E)$. Тогда (см. [4, теорема 4.4.6]) можно указать последовательность f_k из класса $ACL_{p,w}(G\setminus E)\cap C^\infty(G\setminus E)$, для которой имеет место сходимость $f_k\to f$ $\mathscr{L}_n$-п. в. в $G\setminus E$ и при этом

$$\int\limits_{G\setminus E} |\nabla f_k - \nabla f|^p w\,dx \to 0 \quad (16)$$

при $k\to\infty$. В силу доказанного выше можно считать, что $f_k\in ACL_{p,w}(G)$. Поскольку $\mathscr{L}_n(E)=0$, из (16) следует, что обобщенные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,2,\dots,n$, для f в $G\setminus E$ будут обобщенными частными производными для f в G. Другими словами, $f\in L^1_{p,w}(G)$, и тем самым E — устранимое множество для $L^1_{p,w}(G\setminus E)$.

Из доказанного выше и определения (p,w)-емкости конденсатора следует равенство $C_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi\setminus E)=\mathrm{C}_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi)$. Применяя известный результат о равенстве модуля и емкости [2, теорема 1], получим

$$m_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi)=m_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi\setminus E), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Значит, E — $NC_{p,w}$-множество в G. Тем самым условие достаточности установлено, что завершает доказательство теоремы.

Аналогично можно доказать, что $m_{p,w}(F_0,F_1,G) = m_{p,w}(F_0,F_1,G\setminus E)$, $C_{p,w}(F_0,F_1,G)=C_{p,w}(F_0,F_1,G\setminus E)$ для любого конденсатора (F_0,F_1,G).

Приведем несколько утверждений, которые вытекают из доказательства теоремы 1.

Следствие 1. *Если E — $NC_{p,w}$-множество в G, то E не влияет на (p,w)-модули и (p,w)-емкости конденсаторов в G, т. е.*

$$m_{p,w}(F_0,F_1,G)=m_{p,w}(F_0,F_1,G\setminus E),\quad C_{p,w}(F_0,F_1,G)=C_{p,w}(F_0,F_1,G\setminus E).$$

Следствие 2. *Замкнутое относительно G множество E устранимо для $L^1_{p,w}(G\setminus E)$ тогда и только тогда, когда E — $NC_{p,w}$-множество в G.*

Пусть $K\geq 1$. Если заменить в доказательстве необходимости для теоремы 1 равенство $m_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi)=m^0_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi\setminus E)$ более общим неравенством $K\cdot m^0_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi\setminus E)\geq m_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi)$, то аналогично установим

Следствие 3. *Замкнутое относительно G множество E является $NC_{p,w}$-множеством в G тогда и только тогда, когда существует постоянная $K\geq 1$ такая, что неравенство*

$$K\cdot m^0_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi\setminus E)\geq m_{p,w}(\sigma_{0i},\sigma_{1i},\Pi),\quad i=1,2,\dots,n,$$

выполняется для всех координатных прямоугольников Π, $\overline{\Pi}\subset G$, $\Pi\cap E\neq\varnothing$.

Отметим, что аналоги этого утверждения, когда прямоугольник Π заменяется произвольной областью или шаром, можно найти в [14, теорема 4.8; 15, п. 3] соответственно.

Установим теперь аналог условия малости обхвата в сферических координатах. Пусть, как и прежде, E — относительно замкнутое в G множество, $\mathscr{L}_n(E)=0$. Зафиксируем точку $y_0\notin E$, $d(y_0,E)>0$. Зададим всевозможные декартовы системы координат с началом в точке y_0. Возьмем одну из них и введем там преобразование g по формулам (3), считая для удобства $y_0=0$. Пусть $T=\{(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1}):0<r_1<r<r_2,0<\alpha_1<\theta_1<\beta_1<2\pi,0<\alpha_2<\theta_2<\beta_2<\pi,\dots,0<\alpha_{n-1}<\theta_{n-1}<\beta_{n-1}<\pi\}$. Тогда $g(T)=S$ назовем *шаровым сектором*. Множество секторов в выбранной системе координат с центром в точке y_0 обозначим через $\{S_{y_0}\}$.

Пусть κ_{01}, κ_{11} — грани T, на которых r соответственно равно r_1, r_2. Аналогично κ_{02}, κ_{12} — грани T, на которых θ_1 соответственно равно α_1, β_1, …, κ_{0n}; κ_{1n} — грани T, на которых θ_{n-1} соответственно равно α_{n-1}, β_{n-1}. Тогда множества $g(\kappa_{ij})=\tilde{\sigma}_{ij}$, $i=0,1$, $j=1,2,\dots,n$, назовем *гранями шарового сектора S*.

Пусть $\Gamma_1=\Gamma(r_1,r_2)$ — семейство отрезков, соединяющих κ_{01} и κ_{11} в T. Аналогично определим $\Gamma_2=\Gamma(\alpha_1,\beta_1),\dots,\Gamma_n=\Gamma(\alpha_{n-1},\beta_{n-1})$. Положим $\overline{\Gamma}_i=g(\Gamma_i)$, $i=1,2,\dots,n$.

Пусть $\omega=w\circ g$ в T. Считаем T частью $\mathbb{R}^n=\{y=(y_1,\dots,y_n)\}$.

Теорема 2. *Для открытого множества $D\subset T$ классы $L^1_{p,\omega}(D)$ и $AC^{p,\omega}(D)$ совпадают.*

Доказательство. Здесь используются построения из доказательства теоремы 4.1.6 в [4]. Рассмотрим функцию $\alpha(y)\in C^\infty(D)$, удовлетворяющую условиям

1) $0<\alpha(y)\leq 1$,
2) $|\nabla\alpha(y)|\leq\frac{1}{2}$,
3) $2\alpha(y)<d(y,\partial D)$,

и неотрицательную функцию $\psi(t)$, $0\leq t<\infty$, такую, что $\psi(t)=0$ для $t\in[1,+\infty)$, $\psi(|y|)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(|y|)\,dy=1$.

Отображение $y \to y + \frac{\alpha(y)}{k} z$ дает C^∞-диффеоморфизм множества D на себя, $k = 1, 2, \dots$, при $|z| < 1$.

Положим $\psi_k(z) = k^n \psi(k|z|)$. Для $f(y) \in L^1_{p,\omega}(D)$ определим

$$f_k(y) = \int\limits_{|z|<1} f\left(y + \frac{\alpha(y)}{k} z\right) \psi(|z|)\, dz = \frac{1}{(\alpha(y))^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\eta) \psi_k\left(\frac{y-\eta}{\alpha(y)}\right) d\eta, \tag{17}$$

где $\eta = y + \frac{\alpha(y)}{k} z$. По построению $f_k(y) \in C^\infty(D)$. Имеем

$$|f_k(y) - f(y)| \le \frac{k^n}{(\alpha(y))^k} \int\limits_{|z-y|<\frac{\alpha(y)}{k}} |f(z) - f(y)| \psi\left(\frac{k|y-z|}{\alpha(y)}\right) dz$$
$$\le \frac{\max\psi \cdot \mathscr{L}_n(B(0,1))}{\mathscr{L}_n\big(B\big(y, \frac{\alpha(y)}{k}\big)\big)} \int\limits_{B\left(y, \frac{\alpha(y)}{k}\right)} |f(z) - f(y)|\, dz.$$

Последнее выражение $\mathscr{L}_n$-п. в. стремится к нулю в D при $k \to \infty$. Поэтому $f_k(y)$ сходится $\mathscr{L}_n$-п. в. в D к $f(y)$.

Покажем, что $f_k(y) \to f(y)$ в $L^{p,\omega}(D)$. Имеем

$$|f_k(y)| = \frac{k^n}{(\alpha(y))^k} \left| \int\limits_{|z-y|<\frac{\alpha(y)}{k}} f(z) \cdot \psi\left(\frac{k|y-z|}{\alpha(y)}\right) dz \right|$$
$$\le \frac{k^n}{(\alpha(y))^k} \max\psi \int\limits_{|z-y|<\frac{\alpha(y)}{k}} |f(z)|\, dz. \tag{18}$$

Отображения $t = g(z)$ и $z \in D$; $z = g^{-1}(t)$, $t \in g(D) = D'$, являются квазиизометриями. Поэтому

$$\frac{1}{L}|t' - t''| \le |g^{-1}(t') - g^{-1}(t'')| \le L|t' - t''| \quad \text{для всех } t', t'' \in D',$$
$$\frac{1}{L}|z' - z''| \le |g(z') - g(z'')| \le L|z' - z''| \quad \text{для всех } z', z'' \in D,$$

где L — положительная постоянная. Якобианы $J(t, g^{-1})$, $J(z, g)$ существуют на соответствующих множествах, и для них справедливы оценки

$$L^{-n} \le |J(z,g)| \le L^n, \quad L^{-n} \le |J(t, g^{-1})| \le L^n.$$

В последнем интеграле в (18) сделаем замену $z = g^{-1}(t)$, $y = g^{-1}(x)$. Тогда

$$\frac{\max\psi \cdot \mathscr{L}_n(B(0,1))}{\mathscr{L}_n\big(B\big(y, \frac{\alpha(y)}{k}\big)\big)} \int\limits_{B\left(y, \frac{\alpha(y)}{k}\right)} |f(z)|\, dz$$
$$\le \frac{\max\psi \cdot \mathscr{L}_n(B(0,1)) \cdot L^n \cdot L^n}{\mathscr{L}_n\big(B\big(x, \frac{\alpha(y)\cdot L}{k}\big)\big)} \int\limits_{B\left(x, \frac{\alpha(y)\cdot L}{k}\right)} |f(g^{-1}(t))|\, dt \le \mathrm{const} \cdot M(f \circ g^{-1})(x), \tag{19}$$

где $(f \circ g^{-1})(x) = 0$ вне D'.

Очевидно, что

$$\int\limits_{D'} |f(g^{-1}(x))|^p w\, dx \le L^n \int\limits_D |f(y)|^p \omega(y)\, dy,$$

т. е. $f(g^{-1}(x)) \in L^{p,w}(D')$. Тогда (см. [5])

$$\int\limits_{D'} |M(f \circ g^{-1})(x)|^p w\, dx \leq \mathrm{const} \int\limits_{D'} |f(g^{-1}(x))|^p w\, dx \leq \mathrm{const} \int\limits_{D} |f(y)|^p \omega(y)\, dy.$$

Из (18) с учетом приведенных неравенств вытекает, что

$$\int\limits_{D} |f_k(y)|^p \omega(y)\, dy \leq \mathrm{const} \int\limits_{D} |f(y)|^p \omega(y)\, dy.$$

Соединяя последнее неравенство со сходимостью $f_k(y) \to f(y)$ $\mathscr{L}_n$-п. в. в D, получаем сходимость

$$\int\limits_{D} |f_k(y) - f(y)|^p \omega(y)\, dy \to 0$$

при $k \to \infty$.

Обозначим $u_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial y_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $u_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}$, $u = (u_1, \ldots, u_n)$. По лемме 4.1.6 из [4]

$$u_{ik}(y) = \int\limits_{|z|<\frac{1}{k}} u_i(y + \alpha(y)z)\psi_k(z)\, dz + \int\limits_{|z|<\frac{1}{k}} z \cdot u(y + \alpha(y)z) \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_i} \psi_k(z)\, dz.$$

Во втором интеграле точкой обозначено скалярное произведение. Отсюда

$$\begin{aligned}\|u_{ik}(g^{-1}(x)) - u_i(g^{-1}(x))\|_{p,w} &\leq \|(u_i)_k(g^{-1}(x)) - u_i(g^{-1}(x))\|_{p,w} \\ &\quad + \Bigg\| \int\limits_{|z|<1/k} z \cdot u(g^{-1}(x) + \alpha(g^{-1}(x))z) \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_i} \psi_k(z)\, dz \Bigg\|_{p,w},\end{aligned}$$

где $(u_i)_k$ — усреднение функции u_i по формуле (17), а $x = g(y)$.

Аналогично приведенному выше доказательству сходимости $f_k(y) \to f(y)$ в $L^1_{p,\omega}(D)$ при $k \to \infty$ первое слагаемое стремится к нулю при $k \to \infty$.

Покажем, что второе слагаемое также стремится к нулю при $k \to \infty$. При этом используем рассуждения из доказательства леммы 4.1.7 в [4]. Имеем

$$\begin{aligned}\Bigg| \int\limits_{|z|<1/k} z \cdot u(y + \alpha(y)z) \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_i} \psi_k(z)\, dz \Bigg| &\leq \frac{1}{2k} \int\limits_{|z|<1} \left| u\left(y + \alpha(y)\frac{z}{k}\right)\right| \psi(|z|)\, dz \\ &\leq \frac{\max \psi}{2k} \frac{k^n}{\alpha(y)^n} \int\limits_{B(y, \frac{\alpha(y)}{k})} |u_i(z)|\, dz \leq \frac{\mathrm{const}}{k} M(|u| \circ g^{-1})(x),\end{aligned}$$

где полагаем $(|u| \circ g^{-1})(x) = 0$ вне D'. Последнее неравенство получено так же, как и (19). Отсюда

$$\begin{aligned}&\Bigg\| \int\limits_{|z|<1/k} z \cdot u(g^{-1}(x) + \alpha(g^{-1}(x))z) \frac{\partial \alpha(y)}{\partial y_i} \psi_k(z)\, dz \Bigg\|^p_{p,w} \\ &\quad \leq \frac{\mathrm{const}}{k} \|M(|u| \circ g^{-1})(x)\|^p_{p,w} \leq \frac{\mathrm{const}}{k} \int\limits_{D'} |(|u| \circ g^{-1})(x)|^p w(x)\, dx \\ &\quad \leq \frac{\mathrm{const}}{k} \int\limits_{D} |u(y)|^p \omega(y)\, dx \to 0\end{aligned}$$

при $k \to \infty$. Таким образом, $u_{ik}(g^{-1}(x)) \to u_i(g^{-1}(x))$ в $L^{p,w}(D')$ при $k \to \infty$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Отсюда следует, что $\int\limits_D |\nabla f_k(y) - \nabla f(y)|^p \omega(y)\, dy \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку $f_k \in AC^{p,\omega}(D)$, то (см. [4, теорема 4.4.5]) $f = \lim\limits_{k\to\infty} f_k$ в $L^1_{p,\omega}(D)$ будет принадлежать классу $AC^{p,\omega}(D)$. Тем самым теорема доказана.

При квазиизометрии (см. [4, замечание 6.1.4]) $g : D \to D'$ класс $AC^{p,w\circ g}(D)$ переходит в класс $AC^{p,w}(D')$ и, наоборот, при $g^{-1} : D' \to D$ класс $AC^{p,w}(D')$ переходит в $AC^{p,w\circ g}(D)$. В силу теоремы 2 аналогичное свойство будет выполняться для классов $L^1_{p,w}(D')$, $L^1_{p,\omega}(D)$. Применяя дословно рассуждения из [16, теорема 4.4], получим более общий результат.

Теорема 3. *Пусть $\varphi : D' \to D$ — квазиизометрический гомеоморфизм с метрическим коэффициентом квазиизометричности L и $w \in A_p$ на D'. Тогда оператор $\varphi_{p,w} : L^1_{p,w}(D') \to L^1_{p,w\circ\varphi^{-1}}(D)$, определенный по правилу $\varphi_{p,w}(u) = u \circ \varphi$, является ограниченным. Кроме того, $\|\varphi_{p,w}\| \le L^{p+n}$. Аналогичное утверждение справедливо и для $\varphi^{-1} : D' \to D$.*

Замечание. Как видно из определения $NC_{p,w}$-множества и его свойств, достаточно рассматривать прямоугольники Π с диаметром меньше наперед заданного $\delta > 0$ и устанавливать устранимость $NC_{p,w}$-множества E для $L^1_{p,w}(\Pi \setminus E)$, $\Pi \cap E \ne \varnothing$.

Поскольку в силу теорем 2, 3 устранимость E для $L^1_{p,w}(S \setminus E)$ влечет устранимость $g^{-1}(E) = E'$ для $L^1_{p,w\circ g}(T \setminus E')$ и наоборот, естественно заменить прямоугольники Π в определении $NC_{p,w}$-множества шаровыми секторами S.

Теорема 4. *Для того чтобы E было $NC_{p,w}$-множеством в G, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой точки $y_0 \notin E$ и для всех шаровых секторов $S \in \{S_{y_0}\}$ выполнялись равенства*

$$m_{p,\omega}(\tilde\sigma_{0i}, \tilde\sigma_{1i}, S \setminus E) = m_{p,\omega}(\tilde\sigma_{0i}, \tilde\sigma_{1i}, S), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{20}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность равенства (20). Заметим, что в (20) слева $m_{p,w}(\tilde\sigma_{0i}, \tilde\sigma_{1i}, S \setminus E)$ по лемме 3 можно заменить на $m^0_{p,w}(\tilde\sigma_{0i}, \tilde\sigma_{1i}, S \setminus E)$. Ввиду квазиизометричности отображения g^{-1}, индуцирующей квазиинвариантность (p, w)-модуля (см. [4, теорема 6.13]), равенства (20) переписываются для $g^{-1}(\Gamma^0(\tilde\sigma_{0i}, \tilde\sigma_{1i}, S \setminus E))$ и $g^{-1}(\Gamma^0(\tilde\sigma_{0i}, \tilde\sigma_{1i}, S))$ в виде неравенств

$$K m_{p,w}(g^{-1}(\Gamma^0(\tilde\sigma_{0i}, \tilde\sigma_{1i}, S \setminus E))) \ge m_{p,w}(\kappa_{0i}, \kappa_{1i}, T),$$

где $K \ge 1$ зависит от p, n и коэффициента квазиизометричности L отображения g. При этом такие же оценки будут выполняться для каждого координатного прямоугольника $T_1 \subset T$. Тем самым выполнены условия следствия 3 с той лишь разницей, что вес w заменен весом $\omega = w \circ g$, что не влияет на рассуждения из доказательства теоремы 1, связанные с выполнением условия малости обхвата. Это влечет по следствию 4 устранимость $E' = g^{-1}(E)$ в классе $L^1_{p,w\circ g}(T \setminus E')$ и условие малости обхвата относительно семейств кривых $\Gamma(r_1, r_2)$, $\Gamma(\alpha_1, \beta_1), \dots, \Gamma(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ с дугами, осуществляющими обхват точек E', на кривых из $g^{-1}(\Gamma^0(\tilde\sigma_{0i}, \tilde\sigma_{1i}, S \setminus E))$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда E будет устранимым множеством для $L^1_{p,w}(S \setminus E)$, а в силу произвола в выборе S — и для $L^1_{p,w}(G \setminus E)$. Тем самым достаточность (20) установлена.

Как видно из доказательств теорем 1 и 4, выполнение условия малости обхвата для E' относительно семейств $\Gamma(r_1, r_2)$, $\Gamma(\alpha_1, \beta_1), \dots, \Gamma(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ на T эквивалентно устранимости E' для $L^1_{p,w}(S \setminus E)$. В силу квазиизометричности отображения $g : T \to S$ это условие малости обхвата для E в T равносильно условию малости обхвата для E в S относительно семейств $\overline{\Gamma}(r_1, r_2)$, $\overline{\Gamma}(\alpha_1, \beta_1), \dots, \overline{\Gamma}(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$, в котором вместо прямолинейных отрезков l из $\Gamma(r_1, r_2)$, $\Gamma(\alpha_1, \beta_1), \dots, \Gamma(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ рассматриваются кривые $g(l)$ из $\overline{\Gamma}(r_1, r_2)$, $\overline{\Gamma}(\alpha_1, \beta_1), \dots, \overline{\Gamma}(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$. При этом по-прежнему можно считать, что обхват точек $E \cap g(l)$ осуществляется ломаными с концами на $g(l) \setminus E$, т. е. справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Для того чтобы E было $NC_{p,w}$-множеством в G, необходимо и достаточно, чтобы E удовлетворяло условию малости обхвата относительно семейств $\overline{\Gamma}(r_1, r_2)$, $\overline{\Gamma}(\alpha_1, \beta_1), \dots, \overline{\Gamma}(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ на каждом шаровом секторе $S \in \{S_{y_0}\}$ для некоторой точки $y_0 \notin E$ и $S \cap E \neq \varnothing$.*

Отметим, что утверждения, подобные теоремам 4, 5, можно установить и для других систем криволинейных координат.

§ 4. Критерии $NC_{p,w}$-множества на гиперплоскости и гиперсфере

1. Пусть E — замкнутое относительно G множество, расположенное в гиперплоскости $H_1 = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 = 0\}$. Для $x_0 \in E$ обозначим через $\tau(x_0)$ любой невырожденный отрезок, проходящий через x_0 параллельно x_1-оси и соединяющий какие-либо точки из $H_1^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 > 0\}$ и $H_1^- = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 < 0\}$. Из определения $\tau(x_0)$ следует, что

$$\overline{B(x_0, r) \cap \tau(x_0) \cap H_1^+} = \tau_0(x_0), \quad \overline{B(x_0, r) \cap \tau(x_0) \cap H_1^-} = \tau_1(x_0)$$

являются невырожденными отрезками для всех положительных r. Обозначим $\Gamma(r) = \Gamma(\tau_0(x_0) \setminus \{x_0\}, \tau_1(x_0) \setminus \{x_0\}, B(x_0, r) \setminus E)$, $\Gamma^0(r)$ — семейство ломаных из $\Gamma(r)$. Также в дальнейшем полагаем $p \geq n$.

Теорема 6. *Пусть $p \geq n$, $w \in A_p$ и для $\mathscr{L}_{n-1}$-п. в. точек $x_0 \in E$ выполняется условие (α) из леммы 1. E является $NC_{p,w}$-множеством в G тогда и только тогда, когда для $\mathscr{L}_{n-1}$-п. в. точек $x_0 \in E$ и всех $r > 0$ имеет место равенство*

$$m_{p,w}(\Gamma^0(r)) = \infty. \tag{21}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть E — $NC_{p,w}$-множество. В силу лемм 1, 3 и определения $NC_{p,w}$-множества имеем

$$m_{p,w}(\Gamma(r)) = m_{p,w}(\Gamma^0(r)) = m_{p,w}(\tau_0(x_0) \setminus \{x_0\}, \tau_1(x_0) \setminus \{x_0\}, B(x_0, r)) = \infty$$

в каждой точке x_0, где выполняется условие (α). Тем самым необходимость установлена.

Достаточность. Возьмем точку $x_0 \in E$, для которой выполняется (21), и отрезок $\tau(x_0)$. По построению $\tau(x_0)$ параллелен x_1-оси.

Пусть $\rho \in L_+^{p,w}(G)$ и ρ локально ограничена в $G \setminus E$. Тогда функция $\rho + 1$ обладает такими же свойствами.

Для заданного $\varepsilon > 0$ и шара $B(x_0, r)$ найдется $\gamma \in \Gamma^0(r)$ такая, что выполняется неравенство $\int_\gamma (\rho+1)\, d\mathscr{H}_1 < \varepsilon$ (в противном случае $(\rho+1)/\varepsilon \in \mathrm{adm}_{p,w}(\Gamma^0(r))$, что противоречит (21)). Значит, $\int\limits_{\gamma} \rho\, d\mathscr{H}_1 < \varepsilon$, $\int\limits_{\gamma} d\mathscr{H}_1 < \varepsilon$. Тогда для E выполняется условие малости обхвата относительно X_1. Для $X_2, \dots, X_n$ оно выполняется автоматически из-за того, что $E \subset H$. Следовательно, E является $NC_{p,w}$-множеством в G.

2. Пусть E — относительно замкнутое в G множество, расположенное на сфере $S(0,1) = \partial B(0,1)$. Для $x_0 \in E$ обозначим через $\beta(x_0)$ любой невырожденный радиальный отрезок, проходящий через x_0, на продолжении которого лежит точка $O = (0, \dots, 0)$. При этом $\beta(x_0)$ соединяет какие-либо точки множеств $S^+(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ и $S^-(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Положим

$$\beta_0(x_0) = \overline{B(x_0,r) \cap \beta(x_0) \cap S^+(0,1)}, \quad \beta_1(x_0) = \overline{B(x_0,r) \cap \beta(x_0) \cap S^-(0,1)}.$$

Обозначим $\widetilde{\Gamma}(r) = \Gamma(\beta_0(x_0) \setminus \{x_0\}, \beta_1(x_0) \setminus \{x_0\}, B(x_0,r) \setminus E)$, $\widetilde{\Gamma}^0(r)$ — семейство всех ломаных из $\widetilde{\Gamma}(r)$.

Теорема 7. *Пусть $p \geq n$, $w \in A_p$ и для $\mathscr{H}_{n-1}$-п. в. точек $x_0 \in E$ выполняется условие (α). E — $NC_{p,w}$-множество тогда и только тогда, когда для $\mathscr{H}_{n-1}$-п. в. $x_0 \in E$ имеет место равенство*

$$m_{p,w}(\widetilde{\Gamma}^0(r)) = \infty.$$

Доказательство. Используем построения при доказательстве теоремы 2, в которых $y_0 = (0, \dots, 0)$. Построим шаровой сектор S, $S \cap E \neq \varnothing$, и зададим отображение $g : T \to S$ по формулам (3), осуществляющим переход от сферических координат $y_1 = r$, $y_2 = \theta_1, \dots, y_n = \theta_{n-1}$ к декартовым $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть $z_0 = g^{-1}(x_0)$, $x_0 \in E$, $w(x)$ удовлетворяет условию (α) в точке x_0. Тогда $w(g(y))$ удовлетворяет условию (α) в точке z_0 ввиду квазиизометричности g. При этом в силу локальности рассуждений в доказательствах лемм 1 и 2 утверждения этих лемм остаются верными и для веса $w(g(y))$ применительно к точке z_0.

Применяя теорему 6 к $E' = g^{-1}(E) \subset H_1 = \{y = (y_1, \dots, y_n) : y_1 = 1\}$, открытому множеству T и весу $w \circ g$, лемму 2 и квазиинвариантность (p, w)-модуля семейства кривых при квазиизометрии $g : T \to S$, получим справедливость этой теоремы в S для $E \cap S$. Это и произвол в выборе S завершают доказательство теоремы.

Отметим, что при $p = n$, $w \equiv 1$ теорема 6 другим методом установлена в [3].

Авторы признательны рецензенту за сделанные замечания, которые способствовали улучшению содержания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlfors L, Beurling A.* Conformal invariants and functional-theoretic null-sets // Acta Math. 1950. V. 83. P. 100–129.
2. *Демшин И Н., Дымченко Ю. В., Шлык В. А.* Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств // Зап. научн. семин. ПОМИ РАН. СПб.: Наука, 2001. Т. 276. С. 52–82.
3. *Асеев В. В.* NED-множества, лежащие в гиперплоскости // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 760–775.
4. *Ohtsuka M.* Extremal length and precise functions // GAKUTO Intern. J. 2003. V. 19. P. 1–343. (Adv. Math. Sci. Appl.).
5. *Muckenhoupt B.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 192. P. 207–226.

6. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin: Springer, 1971. (Lect. Notes Math.; N 229).

7. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Arkiv Math. 1975. V. 13, N 1. P. 131–144.

8. *Асеев В. В.* Об одном свойстве модуля // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, № 3. С. 513–514.

9. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Критерий устранимости множеств для пространств W_p^1, квазиконформных и квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 1. С. 48–68.

10. *Hedberg L. I.* Removable singularities and condenser capacities // Arkiv. Math. 1974. V. 12, N 1. P. 181–201.

11. *Yamamoto H.* On null-sets for extremal distances of order p // Mem. Fac. Sci. Koch. Univ. Ser. A. Math. 1982. N 3. P. 37–49.

12. *Väisälä J.* On the null-sets for extremal distances // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1962. V. 322. P. 1–12.

13. *Акилов Г. П., Макаров Б. М., Хавин В. П.* Элементарное введение в теорию интеграла. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1969.

14. *Сычев А. В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983.

15. *Kolsrud T.* Condenser capacities and removable sets in $W^{1,p}$ // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. Math. 1983. V. 8. P. 343–348.

16. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.

Статья поступила 29 декабря 2009 г., окончательный вариант — 17 мая 2010 г.

Дымченко Юрий Викторович, Шлык Владимир Алексеевич
Дальневосточный гос. университет, ул. Суханова, 8, Владивосток 690951
`dymch@mail.ru`, `shlyknv@yandex.ru`