Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 512.544

ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЭЛЕМЕНТ, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЙ ЛИШЬ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СОПРЯЖЕННЫХ С НИМ ЭЛЕМЕНТОВ

В. Е. Кисляков

Аннотация. Доказано существование абелевой нормальной подгруппы в локально нильпотентной группе, содержащей элемент, перестановочный с конечным числом сопряженных с ним элементов. Найдены достаточные условия нильпотентности нормального замыкания в группе такого элемента.

Ключевые слова: локально нильпотентная группа; нильпотентная группа; абелева нормальная подгруппа; нормальное замыкание элемента в группе; элемент, перестановочный лишь с конечным числом сопряженных с ним элементов.

В работе продолжается исследование локально нильпотентных групп с элементом, перестановочным лишь с конечным числом сопряженных с ним элементов, начатое в статьях [1, 2].

Теорема 1. *Если неединичный элемент a локально нильпотентной группы G перестановочен лишь с конечным числом сопряженных с ним элементов, то центр нормального замыкания $\langle a^G\rangle$ нетривиален.*

Следствие 1. *Локально нильпотентная группа G, содержащая неединичный элемент a, перестановочный лишь с конечным числом сопряженных с ним элементов, имеет неединичную абелеву нормальную подгруппу.*

Теорема 2. *Элемент локально нильпотентной группы без кручения в том и только том случае перестановочен лишь с конечным числом сопряженных с ним элементов, когда он содержится в центре группы.*

Теорема 3. *Пусть элемент a локально нильпотентной группы G имеет конечный порядок и перестановочен лишь с конечным числом сопряженных с ним элементов и порядки всех коммутаторов вида $a^{-1}g^{-1}ag$ ограничены в совокупности. Тогда нормальное замыкание $\langle a^G\rangle$ — нильпотентная группа.*

1. Доказательства теорем 1, 2

Доказательство теоремы 1 начнем с предварительных утверждений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–0059–а).

Лемма 1. *Пусть K — непустое конечное подмножество элементов группы G. Если каждая нормальная подгруппа группы G имеет нееединичное пересечение с K, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *каждая нормальная в G подгруппа содержит минимальную нормальную подгруппу группы G;*

(2) *число минимальных нормальных подгрупп группы G конечно и ограничено порядком множества K.*

Доказательство. (1) Пусть X — неединичая нормальная подгруппа группы G. Положим $\Lambda_X = \{Y \trianglelefteq G \mid Y \neq 1,\ Y \leq X\}$, $\Omega_K = \{Y \cap K | Y \in \Lambda_X\}$. По условию леммы $Y \cap K \neq 1$ для любого $Y \in \Lambda_X$. Поэтому Ω_K непусто. Понятно, что Ω_K — конечное частично упорядоченное по включению множество. По лемме Цорна Ω_K содержит минимальный элемент $M \cap K \neq 1$, где $M \in \Lambda_X$. Нетрудно увидеть, что нормальное замыкание множества $M \cap K$ в G, т. е. подгруппа $\langle (M \cap K)^G \rangle$, является минимальной нормальной подгруппой группы G. Первое утверждение леммы доказано.

2. Если M и N — минимальные нормальные подгруппы группы G, то $M \cap N = 1$, $M \cap K \neq 1$ и $N \cap K \neq 1$. Поэтому число минимальных нормальных подгрупп группы G ограничено порядком множества K. Лемма доказана.

Следующая лемма непосредственно вытекает из [1, лемма 1.3].

Лемма 2. *Пусть локально нильпотентная группа G содержит элемент g и H является g-инвариантной подгруппой. Тогда имеет место одно из утверждений:*

(1) *элемент g централизует H;*

(2) *пересечение $C_H(g) \cap g^{-1}g^H$ неединично.*

Лемма 3. *Пусть локально нильпотентная группа G содержит элемент g и H — неединичная нормальная подгруппа в G. Тогда пересечение $H \cap g^{-1}g^G$ неединично тогда и только тогда, когда пересечение $H \cap C_G(g) \cap g^{-1}g^G$ неединично.*

Доказательство. Покажем, что $H \cap g^{-1}g^G = 1$ тогда и только тогда, когда $H \cap C_(g) \cap g^{-1}g^G = 1$. Действительно, если $H \cap g^{-1}g^G = 1$, то для элемента g имеет место первое утверждение леммы 2, т. е. $H = C_H(g)$, и получаем $H \cap C_G(g) \cap g^{-1}g^G = H \cap g^{-1}g^G = 1$.

Обратно, пусть $H \cap C_G(g) \cap g^{-1}g^G = 1$. Тогда $C_H(g) \cap g^{-1}g^G = 1$ и для элемента g опять справедливо первое утверждение леммы 2, т. е. $C_H(g) = H$. Следовательно, $H \cap g^{-1}g^G = 1$, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Пусть G — локально нильпотентная группа, $g \in G$ и H — нормальная подгруппа G такие, что $H \cap g^{-1}g^G = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $H \leq C_G(\langle g^G \rangle)$;

(2) $C_{\overline{G}}(\bar{g}) = \overline{C_G(g)}$, *где* $\overline{G} = G/H$, $\bar{g} = gH$ *и* $\overline{C_G(g)}$ — *образ централизатора* $C_G(g)$ *в* $\overline{G}$;

(3) $|C_{\overline{G}}(\bar{g}) \cap \bar{g}^{\overline{G}}| = |C_G(g) \cap g^G|$.

Доказательство. (1) Согласно условию леммы $C_H(g) \cap g^{-1}g^H = 1$. Значит, для элемента g и подгруппы H имеет место первое утверждение леммы 2, т. е. $H \leq C_G(g)$. Поскольку $H \trianglelefteq G$, то $H \leq C_G(\langle g^G \rangle)$, и первое утверждение леммы доказано.

2. Понятно, что $\overline{C_G(g)} \le C_{\overline{G}}(\bar g)$. Докажем обратное включение. Пусть $\bar x \in C_{\overline{G}}(\bar g)$, $\bar x \ne 1$ и x — прообраз $\bar x$ в группе G. Тогда $x \ne 1$, $x \notin H$ и $[g,x] \in H$. Поскольку $[g,x] = g^{-1}g^x$, из условия леммы следует, что $[g,x]=1$ и $x \in C_G(g)$. Значит, $C_{\overline{G}}(\bar g) \le \overline{C_G(g)}$, что и требовалось доказать.

3. Пусть x — произвольный элемент из G и $\bar x = xH$. Если $g^x \in C_G(g)$, то $\bar g^{\bar x} \in C_{\overline{G}}(\bar g)$. Обратно, если $\bar g^{\bar x} \in C_{\overline{G}}(\bar g)$, то прообраз g^x элемента $\bar g^{\bar x}$ в группе G принадлежит $C_G(g)$ по второму утверждению леммы. Допустим, что $\bar g^{\bar x} = \bar g^{\bar y}$, для некоторого $y \in G$, $x \ne y$. Тогда $g^y \in g^x H$. Поэтому $g \in g^{xy^{-1}}H$, $g^{-1}g^{xy^{-1}} = 1$ и $g^x = g^y$. Поскольку для различных элементов $\bar g^{\bar x}$, $\bar g^{\bar y}$ их прообразы g^x и g^y различны, имеем $|C_{\overline{G}}(\bar g) \cap \bar g^{\overline{G}}| = |C_G(g) \cap g^G|$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть g — нецентральный элемент локально нильпотентной группы G и $|C_G(g) \cap g^G| < \infty$. Если H — максимальная по включению нормальная подгруппа (так что $H \cap g^{-1}g^G = 1$), то каждая неединичная нормальная подгруппа фактор-группы G/H содержит элемент простого порядка из центра G/H.*

Доказательство. Ясно, что фактор-группа $\overline{G} = G/H$ является локально нильпотентной группой. Поскольку элемент g не лежит в центре группы G, множество $g^{-1}g^G$ содержит неединичный элемент и, следовательно, $H \ne G$, т. е. $\overline{G}$ — неединичная группа. По утверждению (3) леммы 4 множество $C_{\overline{G}}(\bar g) \cap \bar g^{\overline{G}}$ конечно. Поскольку $\bar g \in C_{\overline{G}}(\bar g)$, конечно и множество $\overline{Y} = C_{\overline{G}}(\bar g) \cap \bar g^{-1}\bar g^{\overline{G}}$. Пусть $\overline{M}$ — неединичная нормальная подгруппа группы $\overline{G}$ и M — полный прообраз $\overline{M}$ в группе G. Тогда M нормальна в G, $H < M$ и $M \cap g^{-1}g^G \ne 1$ по выбору подгруппы H. Ввиду леммы 3 множество $M \cap C_G(g) \cap g^{-1}g^G$ содержит неединичные элементы. Поэтому $\overline{M} \cap \overline{Y} \ne \bar 1$. Пусть $\overline{X}$ — множество $\overline{Y}$ без единицы $\bar 1$. Тогда для группы $\overline{G}$ и множества $\overline{X}$ выполняются все условия леммы 1. По этой лемме множество минимальных нормальных подгрупп группы $\overline{G}$ непусто и конечно. Известно [3, следствие 1.B.8], что минимальные нормальные подгруппы локально нильпотентной группы содержатся в ее центре и являются циклическими группами простого порядка. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Итак, G — локально нильпотентная группа, $a \in G, a \ne 1$, и $|C_G(a) \cap a^G| < \infty$. Рассмотрим множество X всех упорядоченных по включению нормальных подгрупп группы G, имеющих единичное пересечение с множеством $a^{-1}a^G$. Поскольку объединение $\bigcup H_i$ любой возрастающей цепочки $H_1 < H_2 < \dots$ подгрупп H_i из X принадлежит X, по лемме Цорна в X есть максимальный элемент H. По утверждению (1) леммы 4 имеем $H \le C_G(\langle a^G \rangle)$. Если $H \cap \langle a^G \rangle \ne 1$, то центр подгруппы $\langle a^G \rangle$ нетривиален, и для этого случая теорема доказана. Пусть теперь $H \cap \langle a^G \rangle = 1$. Рассмотрим фактор-группу G/H. Тогда $\langle a^G \rangle H$ — неединичная нормальная подгруппа в G/H, согласно лемме 5 содержащая неединичный центральный элемент bH, где $b \in \langle a^G \rangle$. Значит, для любого элемента $g \in G$ имеем $[g,b] \in \langle a^G \rangle \cap H = 1$. Следовательно, b принадлежит центру группы G. Тогда и центр подгруппы $\langle a^G \rangle$ нетривиален, что и требовалось доказать.

Нам потребуется

Лемма 6 [1, лемма 1.6]. *Пусть G — группа, $g \in G$ и множество $C_G(g) \cap g^G$ конечно. Если $x \in G$ и $\langle g, g^x \rangle$ — нильпотентная группа, то коммутатор $[g, g^x]$ есть элемент конечного порядка.*

Доказательство теоремы 2. Из леммы 6 следует, что элемент a перестановочен с каждым сопряженным с ним элементом в группе G. Поэтому $\langle a^G\rangle$ — конечно порожденная абелева группа без кручения. Значит, индекс $|G : C_G(\langle a^G\rangle)|$ конечен. С другой стороны, фактор-группа $G/C_G(\langle a^G\rangle)$ вкладывается в группу энгелевых автоморфизмов группы без кручения $\langle a^G\rangle$. По [4, теорема 7.3.1.1] $G/C_G(\langle a^G\rangle)$ также не имеет кручения. Таким образом, $C_G(\langle a^G\rangle) = G$, т. е. элемент a принадлежит центру группы G. Теорема 2 доказана.

2. Доказательство теоремы 3

Сначала изучим действие элемента a локально нильпотентной группы G на абелевой нормальной подгруппе при условии, что пересечение $C_G(a) \cap a^G$ конечно.

Лемма 7. *Пусть G — группа, B — ее абелева нормальная подгруппа и a — элемент из G. Если $|C_G(a) \cap a^G| = k$, $k \in N$, то $|C_{[a,B]}(a)| \leq k$.*

Доказательство. Поскольку B — абелева группа, каждый элемент из $[a, B]$ имеет вид $[a, b]$, $b \in B$. Если $[a, b] \in C_{[a,B]}(a)$, то элемент $b^{-1}ab$ принадлежит пересечению $C_G(a) \cap a^G$. Лемма доказана.

Напомним стандартные обозначения: $\pi(G)$ — множество простых делителей порядков периодических элементов группы G; $m_p(G)$ — p-ранг группы G, т. е. максимум рангов элементарных абелевых p-подгрупп G.

Лемма 8. *Пусть локально нильпотентная группа G содержит элемент a конечного порядка такой, что $|C_G(a) \cap a^G| = k, k \in N$. Если B — абелева нормальная подгруппа, то справедливы утверждения:*

(1) *$[a, B]$ — черниковская группа и $|\pi([a, B])| \leq k$;*

(2) *сумма p-рангов подгруппы $[a, B]$ по всем $p \in \pi([a, B])$ не превосходит $f(k)$.*

Доказательство. Пусть $H = [a, B]$. Поскольку каждый элемент из подгруппы H представим в виде коммутатора $[a, b]$, где $b \in B$, и содержится в конечной нильпотентной подгруппе $\langle a, a^b\rangle$, то H — периодическая абелева группа.

(1) Итак, $H = \prod\limits_{p\in\pi(H)} O_p(H)$. Поскольку для любого $p \in \pi(H)$ подгруппа $O_p(H)$ является a-инвариантной, из леммы 2 следует, что $C_{O_p(H)}(a) \neq 1$. Значит, $\pi(H) \subseteq \pi(C_H(a))$, и $\pi(H)$ — конечное множество. Докажем теперь конечность p-рангов группы H. Пусть R — нижний слой подгруппы $O_p(H)$. Тогда R — a-инвариантная группа, $C_R(a) \neq 1$ и $R = C_R(a) \times S$, $S \leq H$. Так как $|R : S| < \infty$, то S содержит автоморфно допустимую подгруппу T такую, что $|R : T| \leq k^k$ [5, лемма 21.1.4]. Отсюда получаем $C_T(a) \neq 1$ и $T \cap C_R(a) = 1$. Поэтому $T = 1$ и $|R| \leq k^k$. Приведенные рассуждения справедливы для всех $p \in \pi(H)$. Таким образом, H — черниковская группа, и утверждение (1) леммы доказано.

(2) Из предыдущих рассуждений легко получить неравенство $m_p(H) \leq k^k$ при каждом $p \in \pi(H)$. Поскольку $\pi(H) \subseteq \pi(C_H(a))$, то $|\pi(H)| < k$. Значит, $\sum\limits_{p\in\pi(H)} m_p(H) \leq k^{k+1}$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3 и начнем его со вспомогательных утверждений.

Напомним некоторые понятия, относящиеся к групповым парам [4, гл. 5]. Пусть (G,Γ) — групповая пара. Говорят, что Γ *стабилизирует* некоторый нормальный ряд в G: $G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \dots$, если Γ действует тождественно на факторах этого ряда. Если Γ стабилизирует конечный нормальный ряд в G, то Γ — *финитно стабильная* групповая пара.

Лемма 9. *Пусть (G,Γ) — финитно стабильная групповая пара и $\alpha \in \Gamma$. Если $[G,\alpha]$ — конечная группа, то нормальное замыкание $\langle \alpha^\Gamma \rangle$ стабилизирует конечный нормальный ряд длины $k \le |[G,\alpha]|$:*

$$G = G_0 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq G_k = 1. \tag{1}$$

Доказательство. По условию леммы Γ стабилизирует некоторый конечный нормальный ряд длины s:

$$G = H_0 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq H_s = 1. \tag{2}$$

Если $s \le k$, то лемма верна. Пусть $s \ge k$. Тогда найдутся индексы $0 \le i < j < s$ такие, что $H_i \cap [G,\alpha] = H_j \cap [G,\alpha]$. По условиям леммы $[H_j, \alpha^t] \le H_{j+1}$ для всех $t \in \Gamma$. Тогда $[H_i, \alpha^t] \le H_{j+1}$ для любого $t \in \Gamma$ и группа $\langle \alpha^\Gamma \rangle$ действует на фактор-группе H_i/H_{j+1} тождественно. Поэтому подгруппу H_j мы можем удалить из ряда (2). Повторив такую операцию необходимое число раз и переобозначив оставшиеся члены ряда, получим нормальный ряд вида (1). Лемма доказана.

С помощью леммы 9 доказывается следующее утверждение.

Лемма 10. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа, B — максимальная абелева нормальная подгруппа, a — элемент из G конечного порядка и $|C_G(a) \cap a^G| = k$, $k \in N$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$[a,B]$ — конечная группа и сумма p-рангов $[a,B]$ по всем $p \in \pi([a,B])$ не больше $f(k)$;*

(2) *$\langle a^G \rangle$ — нильпотентная группа класса $\le 2|[a,B]|$.*

Доказательство. 1. По лемме 7 $C_{[a,B]}(a)$ — конечная группа порядка $\le k$. По лемме 8 $[a,B]$ — черниковская группа и сумма p-рангов $[a,B]$ по всем $p \in \pi([a,B])$ не больше $f(k)$. Нетрудно убедиться, что подгруппа $[a,B]$ конечно порожденная и, следовательно, конечна. Первое утверждение леммы доказано.

2. Достаточно рассмотреть случай, когда $a \notin B$. Построим конечный нормальный ряд в B следующим образом. Пусть $B_0 = B$ и $B_i = [G, B_i]$. Ввиду нильпотентности G получим конечный нормальный ряд

$$B = B_0 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq B_n = 1. \tag{3}$$

Ввиду максимальности подгруппы B среди абелевых нормальных подгрупп группы G фактор-группа $\overline{G} = G/B$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(B)$ [5, теорема 16.2.6]. Понятно, что $\overline{G}$ стабилизирует ряд (3) и $(B, \overline{G})$ — финитно стабильная групповая пара. По лемме 9 подгруппа $\langle \bar{a}^{\overline{G}} \rangle$ стабилизирует конечный нормальный ряд длины $l \le |[a,B]|$:

$$B = D_0 \trianglerighteq \dots \trianglerighteq D_l = 1. \tag{4}$$

По [5, лемма 16.3.1] $\langle \bar{a}^{\overline{G}} \rangle$ — нильпотентная группа класса $\le l$ и любой коммутатор веса $l \le |[a,B]|$ от элементов сопряженного класса a^G содержится в абелевой группе $D = \langle a^G \rangle \cap B$. Поскольку $\langle a^G \rangle$ стабилизирует ряд (4), любой коммутатор веса $2l \leq 2|[a,B]|$ от элементов сопряженного класса a^G равен единице. Значит, группа $\langle a^G \rangle$ нильпотентна класса $\leq 2|[a,B]|$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть a — элемент конечного порядка в группе G, $|C_G(a) \cap a^G| = k$, $k \in N$, и порядки коммутаторов $[a,g]$ для всех $g \in G$ ограничены числом $l \in N$. Рассмотрим произвольную конечно порожденную подгруппу H из G, и пусть $a \in H$. По условию теоремы H нильпотентна. Покажем, что класс нильпотентности подгруппы $\langle a^H \rangle$ ограничен некоторой функцией, зависящей только от чисел k, l. Если H абелева, то доказываемое утверждение очевидно. Пусть H — неабелева группа и B — ее максимальная абелева нормальная подгруппа. По лемме 10 $[a,B]$ — конечная группа и класс нильпотентности подгруппы $\langle a^H \rangle$ ограничен числом $2|[a,B]|$. Оценим порядок подгруппы $[a,B]$. Опять по лемме 10 сумма p-рангов $[a,B]$ по всем $p \in \pi([a,B])$ не превышает значения $f(k)$. Поскольку B — абелева группа, каждый элемент из $[a,B]$ является коммутатором вида $[a,b]$, где $b \in B$. По условиям теоремы порядки коммутаторов $[a,b]$ ограничены числом l. Отсюда выводим, что порядок подгруппы $[a,B]$ не превосходит значения функции $l^{f(k)}$. Следовательно, класс нильпотентности подгруппы $\langle a^H \rangle$ ограничен функцией $2l^{f(k)}$. Тогда ввиду произвольности подгруппы H из G подгруппа $\langle a^G \rangle$ нильпотентна и ее класс нильпотентности не превышает того же значения $2l^{f(k)}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кисляков В. Е.* Группы, содержащие элемент, перестановочный с конечным числом сопряженных с ним элементов // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 5. С. 543–551.
2. *Кисляков В. Е.* Группы, содержащие элемент, перестановочный с конечным числом сопряженных с ним элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 637–650.
3. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. Amsterdam: North Holland, 1973.
4. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

Статья поступила 31 мая 2010 г.

Кисляков Валерий Евгеньевич
Сибирский федеральный университет, Институт фундаментальной подготовки,
кафедра «Высшая математика-4»,
пр. Свободный, 82, Красноярск 660041
kislyakov_valeri@mail.ru