Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 517.968

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА — ХОПФА

М. С. Сгибнев

Аннотация. Рассматривается однородное обобщенное уравнение Винера — Хопфа

$$S(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} S(x-y)\,F(dy), \quad x \geq 0,$$

где F — распределение вероятностей в $\mathbb{R}$ с нулевым средним, конечной дисперсией и бесконечным моментом $\int\limits_0^\infty x^3 F(dy)$. Его P^*-решение $S(x)$ обладает свойством

$$S(x) - ax \sim b\int\limits_0^x \int\limits_y^\infty \int\limits_v^\infty F((u,\infty))\,dudvdy, \quad x \to \infty,$$

где a и b — положительные константы, выражаемые в явном виде.

Ключевые слова: интегральное уравнение, однородное уравнение, уравнение Винера — Хопфа, решение, асимптотика.

Рассмотрим однородное обобщенное уравнение Винера — Хопфа

$$S(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} S(x-y)F(dy), \quad x \geq 0, \tag{1}$$

где F — распределение вероятностей в $\mathbb{R}$. Считаем, что верхний предел x интегрирования включен в область интегрирования. Если F — абсолютно непрерывное распределение с плотностью k, то уравнение (1) эквивалентно классическому однородному уравнению Винера — Хопфа

$$S(x) = \int\limits_0^\infty k(x-y)S(x)\,dy, \quad x \geq 0,$$

изучавшемуся в известных работах [1, 2].

Определение 1. Неубывающая функция $S(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), называется P^*-*решением* уравнения (1), если она непрерывна справа и не обращается всюду в нуль (см. [1, 3]).

Если ν и $\varkappa$ — меры, определенные на σ-алгебре $\mathscr{B}$ борелевских подмножеств прямой $\mathbb{R}$, то их *сверткой* называется мера

$$\nu * \varkappa(A) := \iint\limits_{\{x+y\in A\}} \nu(dx)\varkappa(dy) = \int\limits_{\mathbb{R}} \nu(A-y)\varkappa(dy), \quad A \in \mathscr{B};$$

здесь $A - y := \{x \in \mathbb{R} : x + y \in A\}$. Обозначим через F^{n*} n-кратную свертку распределения F: $F^{1*} := F$, $F^{(n+1)*} := F^{n*} * F$, $n \geq 1$, и $F^{0*} := \delta_0$ (атомическая мера единичной массы, сосредоточенная в нуле).

Для произвольной комплекснозначной меры ν определим ее преобразование Лапласа как $\hat{\nu}(s) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{sx}\nu(dx)$ для тех значений $s \in \mathbb{C}$, при которых данный интеграл сходится абсолютно относительно полной вариации $|\nu|$ меры ν.

Пусть X_k, $k \geq 1$, — независимые случайные величины с одним и тем же распределением F, не сосредоточенным в нуле. Эти величины порождают случайное блуждание $Y_0 = 0$, $Y_n = X_1 + \dots + X_n$, $n \geq 1$. Положим $\mathscr{T}_- := \inf\{k \geq 1 : Y_k \leq 0\}$ и $\mathscr{T}_+ := \inf\{k \geq 1 : Y_k > 0\}$. Обозначим через $F_\pm$ распределения случайных величин $\mathscr{H}_\pm := Y_{\mathscr{T}_\pm}$ соответственно. По теореме о факторизации (см. [4, § XVIII.3])

$$1 - \widehat{F}(s) = [1 - \widehat{F}_-(s)][1 - \widehat{F}_+(s)], \quad \operatorname{Re} s = 0. \tag{2}$$

Пусть $U_+ := \sum\limits_{k=0}^{\infty} F_+^{k*}$ — мера восстановления, порожденная распределением F_+. По теореме 1 из [3], если F — распределение вероятностей осциллирующего типа (см. [3]), то функция восстановления $U_+([0,x]) =: S(x)$, $x \geq 0$, порожденная распределением F_+, является P^*-решением уравнения (1), удовлетворяющим нормировке $S(0) = 1$. Здесь мы не будем останавливаться на понятии распределения осциллирующего типа (см. [3]); заметим только, что таковыми являются невырожденные распределения вероятностей с нулевым средним, которые и рассматриваются далее в настоящей работе. (Распределение вероятностей G называется *вырожденным*, если оно сосредоточено в одной точке: $G(\{a\}) = 1$ при некотором $a \in \mathbb{R}$.) Из теоремы 5 в [5] вытекает, что если $\mathsf{E}\mathscr{H}_+ < \infty$, но $\mathsf{E}\big(\mathscr{H}_+^2\big) = \infty$, то

$$S(x) - \frac{x}{\mathsf{E}\mathscr{H}_+} \to \infty, \quad x \to \infty. \tag{3}$$

В частном случае, когда F — абсолютно непрерывное распределение с симметричной плотностью, конечной дисперсией σ^2 и бесконечным третьим моментом, соотношение (3) совпадает со следующим утверждением:

$$\lim_{x\to\infty} [S(x) - x\sqrt{2}/\sigma] = \infty,$$

установленным в работе [2].

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить точную оценку скорости стремления к бесконечности в соотношении (3) в терминах исходного распределения F при максимально общих предположениях.

Пусть X — случайная величина, имеющая невырожденное распределение F, и $\mathsf{E}X = 0$. Справедливы следующие результаты, устанавливающие связь между существованием моментов исходного распределения F и конечностью моментов распределения F_+ первой лестничной высоты $\mathscr{H}_+$ случайного блуждания $\{Y_n\}$, порожденного распределением F. Положим $X^+ := \max(0, X)$ и

$X^- := -\min(0, X)$. Тогда из существования момента $\mathsf{E}[(X^+)^\beta] = \int\limits_0^\infty x^\beta F(dx)$ при $\beta > 1$ вытекает существование $\mathsf{E}\big(\mathscr{H}_+^{\beta-1}\big)$ и, наоборот, если математическое ожидание $\mathsf{E}|\mathscr{H}_-|$ конечно (это так, если $\mathsf{E}[(X^-)^2] = \int\limits_{-\infty}^0 x^2 F(dx) < \infty$ [6]), то из существования момента $\mathsf{E}\big(\mathscr{H}_+^{\beta-1}\big)$ при $\beta > 1$ вытекает существование $\mathsf{E}[(X^+)^\beta]$ [6, следствие 1]. При $\mathsf{E}X = 0$ и $\mathsf{E}(X^2) < \infty$ условия $\mathsf{E}\big(\mathscr{H}_+^2\big) = \infty$ и $\mathsf{E}[(X^+)^3] = \infty$ эквивалентны. Это вытекает из цитированных результатов работы [6].

Пусть ν — конечная комплекснозначная мера. Обозначим через $T\nu$ σ-конечную меру с плотностью

$$v(x;\nu) := \begin{cases} \nu((x,\infty)), & x \le 0, \\ -\nu((-\infty, x]), & x < 0. \end{cases}$$

Если $\int\limits_{\mathbb{R}} |x|\,|\nu|(dx) < \infty$, то $T\nu$ — конечная комплекснозначная мера и ее преобразование Лапласа имеет вид $(T\nu)\hat{}(s) = [\hat{\nu}(s) - \hat{\nu}(0)]/s$, $\operatorname{Re} s = 0$, значение $(T\nu)\hat{}(0)$ определяется по непрерывности как $\int\limits_{\mathbb{R}} x\nu(dx)$.

Сформулируем основной результат. Соотношение $f(x) \sim g(x)$ при $x \to \infty$ означает, что $f(x)/g(x) \to 1$ при $x \to \infty$.

Теорема 1. *Предположим, что F — распределение вероятностей в $\mathbb{R}$ и X — случайная величина с распределением F. Допустим, что $\mathsf{E}X = 0$, $\sigma^2 = \mathsf{E}(X^2) < \infty$, но $\mathsf{E}[(X^+)^3] = \infty$. Тогда для P^*-решения $S(x) = U_+([0, x])$ однородного обобщенного уравнения Винера — Хопфа* (1) *справедливо соотношение*

$$S(x) - \frac{x}{\mathsf{E}\mathscr{H}_+} \sim \frac{2}{\sigma^2 \mathsf{E}\mathscr{H}_+} \int\limits_0^x \int\limits_y^\infty \int\limits_v^\infty [1 - F(u)]\, du dv dy, \quad x \to \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Из условий теоремы и цитированных выше результатов работы [6] вытекает, что $\mathsf{E}(\mathscr{H}_+) < \infty$, а $\mathsf{E}\big(\mathscr{H}_+^2\big) = \infty$. Поэтому справедливо следующее соотношение (см. [5, теорема 5]):

$$U_+(t) - \frac{t}{\mathsf{E}\mathscr{H}_+} \sim \frac{1}{(\mathsf{E}\mathscr{H}_+)^2} \int\limits_0^t \int\limits_x^\infty [1 - F_+(y)]\, dy dx, \quad t \to \infty. \tag{5}$$

Положим $\varrho(t) := 1 + \int\limits_0^t \int\limits_x^\infty [1 - F_+(y)]\, dy dx$. При $x \to \infty$ имеем $\varrho(x) \to \infty$ и $\varrho(x + y)/\varrho(x) \to 1$ для любого фиксированного $y \in \mathbb{R}$. Кроме того, справедливо неравенство $\sup\limits_{x \ge 0} \varrho(x + 1)/\varrho(x) < \infty$.

Если ν и θ — любые две конечные вещественнозначные меры такие, что

$$\sup_{t \ge 0} \frac{1}{\varrho(t)} \int\limits_0^t |\nu|((x, \infty))\, dx < \infty, \quad \sup_{t \ge 0} \frac{1}{\varrho(t)} \int\limits_0^t |\theta|((x, \infty))\, dx < \infty$$

и существуют пределы

$$\mathscr{L}(\nu) := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\varrho(t)} \int\limits_0^t \nu((x, \infty))\, dx, \quad \mathscr{L}(\theta) := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{\varrho(t)} \int\limits_0^t \theta((x, \infty))\, dx,$$

то (см. [5, предложение 2]) свертка $\nu * \theta$ обладает теми же самыми свойствами и

$$\mathscr{L}(\nu * \theta) = \mathscr{L}(\nu)\theta(\mathbb{R}) + \mathscr{L}(\theta)\nu(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Разделим обе части тождества (2) на s^2. Получим

$$(T^2F)^\wedge(s) = -(TF_-)^\wedge(s)(TF_+)^\wedge(s), \quad \operatorname{Re} s = 0.$$

Положим $\nu := -TF_-$ и $\theta := TF_+$. Меры ν и θ удовлетворяют перечисленным выше требованиям, причем $\mathscr{L}(\nu) = 0$, а $\mathscr{L}(\theta) = 1$. Следовательно, согласно (6)

$$\mathscr{L}(T^2F) = \mathscr{L}(\nu * \theta) = \mathscr{L}(\theta)\nu(\mathbb{R}) = -(TF_-)(\mathbb{R}) = \mathsf{E}|\mathscr{H}_-|.$$

Это означает, что

$$\int\limits_0^x \int\limits_y^\infty \int\limits_v^\infty [1 - F(u)]\,du dv dy \sim \mathsf{E}|\mathscr{H}_-|\varrho(x) \sim \mathsf{E}|\mathscr{H}_-| \int\limits_0^x \int\limits_v^\infty [1 - F_+(u)]\,du dv, \quad x \to \infty. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), получаем соотношение

$$S(x) - \frac{x}{\mathsf{E}\mathscr{H}_+} \sim \frac{1}{\mathsf{E}|\mathscr{H}_-|(\mathsf{E}\mathscr{H}_+)^2} \int\limits_0^x \int\limits_y^\infty \int\limits_v^\infty [1 - F(u)]\,du dv dy, \quad x \to \infty,$$

из которого ввиду равенства $\mathsf{E}|\mathscr{H}_-|\mathsf{E}\mathscr{H}_+ = \sigma^2/2$ вытекает утверждение теоремы. В справедливости последнего равенства нетрудно убедиться, разделив обе части тождества (2) на s^2 при $\operatorname{Re} s = 0$ и устремив s к нулю, что дает $-\sigma^2/2 = (-\mathsf{E}\mathscr{H}_-)(-\mathsf{E}\mathscr{H}_+)$.

Распределение вероятностей G называется *симметричным*, если его функция распределения $G(x) := G((-\infty, x])$ равна своей сопряженной функции распределения $\widetilde{G}(x) := 1 - G(-x - 0)$ [7, § 3.1]. Распределение G называется *непрерывным*, если его функция распределения непрерывна.

Для симметричных распределений F утверждение теоремы 1 можно еще нагляднее выразить в терминах исходного распределения.

Следствие 1. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1, *и пусть F — симметричное распределение вероятностей. Тогда*

$$S(x) - \frac{x\sqrt{2\gamma_0}}{\sigma} \sim \frac{2\sqrt{2\gamma_0}}{\sigma^3} \int\limits_0^x \int\limits_y^\infty \int\limits_v^\infty [1 - F(u)]\,du dv dy, \quad x \to \infty,$$

где $\gamma_0 := \exp\left[-\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\mathsf{P}(S_n = 0)\right]$.

Если дополнительно F — непрерывное симметричное распределение вероятностей, то

$$S(x) - \frac{x\sqrt{2}}{\sigma} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sigma^3} \int\limits_0^x \int\limits_y^\infty \int\limits_v^\infty [1 - F(u)]\,du dv dy, \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Согласно лемме 2 из работы [3] $\mathsf{E}\mathscr{H}_+ = \sigma/\sqrt{2\gamma_0}$. Осталось подставить это выражение в соотношение (4). Для непрерывного распределения F величина γ_0 равна единице.

Для того чтобы представить себе порядок роста правой части соотношения (4), уместно рассмотреть случай, когда «хвост» $1 - F(x) =: R(x)$ распределения F правильно меняется на бесконечности с показателем $\alpha \in (-3, -2)$, т. е. когда $R(tx)/R(x) \to t^\alpha$ при $x \to \infty$, $t > 0$ фиксировано (см. [4, § VIII.8]).

Следствие 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1, *и пусть функция* $1 - F(x)$ *правильно меняется на бесконечности с показателем* $\alpha \in (-3, -2)$. *Тогда*

$$S(x) - \frac{x}{\mathsf{E}\mathscr{H}_+} \sim \frac{2x^3[1 - F(x)]}{\sigma^2 \mathsf{E}\mathscr{H}_+(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}, \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из свойств правильно меняющихся функций (см. [4, § VIII.9, теорема 1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Spitzer F.* The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density // Duke. Math. J. 1957. V. 24. P. 327–343.
2. *Spitzer F.* The Wiener–Hopf equation whose kernel is a probability density. II // Duke. Math. J. 1960. V. 27. P. 363–372.
3. *Сгибнев М. С.* Об однородном консервативном уравнении Винера — Хопфа // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 9. С. 123–132.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 2.
5. *Сгибнев М. С.* О теореме восстановления в случае бесконечной дисперсии // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 5. С. 178–189.
6. *Doney R. A.* Moments of ladder heights in random walks // J. Appl. Probab. 1980. V. 17. P. 242–252.
7. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979.

Статья поступила 1 декабря 2009 г.

Сгибнев Михаил Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sgibnev@math.nsc.ru