Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 515.165.7

О МОМЕНТ–УГОЛ МНОГООБРАЗИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ

Я. В. Базайкин, И. В. Матвиенко

Аннотация. Построены римановы метрики положительной кривизны Риччи на некоторых момент-угол многообразиях. В частности, построено неформальное риманово момент-угол многообразие положительной кривизны Риччи.

Ключевые слова: положительная кривизна Риччи, момент-угол многообразия, квазиторическое многообразие.

1. Введение

Одним из интересных вопросов римановой геометрии является вопрос о топологической сложности многообразий, допускающих римановы метрики положительной кривизны Риччи. Например, в работе Ша и Янга [1] построены метрики положительной кривизны Риччи на связных суммах любого числа $S^n \times S^m$ при фиксированных n, m, что влечет отсутствие априорной оценки на числа Бетти. Рэйт [2] обобщил примеры Ша и Янга, показав существование римановой метрики положительной кривизны Риччи на связных суммах $\#_{i=1}^N S^{n_i} \times S^{m_i}$.

В данной статье мы строим римановы метрики положительной кривизны Риччи на некоторых момент-угол многообразиях. Момент-угол многообразие Z_P строится по полиэдру P, причем на Z_P каноническим образом свободно действует тор T таким образом, что $Z_P/T = P$. Подробно конструкция момент-угол многообразия описана в следующем параграфе. Основным результатом статьи можно считать следующую теорему.

Теорема. *Пусть P — восьмигранник, полученный из трехмерного куба срезанием малых окрестностей двух ребер, лежащих на скрещивающихся прямых. Тогда на одиннадцатимерном момент-угол многообразии Z_P существует риманова метрика положительной кривизны Риччи.*

Кроме этого примера мы рассматриваем также другие момент-угол многообразия с метрикой положительной кривизны Риччи, однако указанное в теореме пространство представляет особый интерес, поскольку обладает достаточно сложной топологией. Например, в [3, 4] показано, что его когомологии содержат нетривиальные произведения Масси и, следовательно, построенное Z_P с метрикой положительной кривизны Риччи является неформальным момент-угол многообразием.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (у первого автора коды проектов 09–01–00598–а, 10–01–92102–ЯФ–а, у второго — 09–01–00142–а), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–7256.2010.1) и совместного гранта СО РАН и УрО РАН № 46.

В заключение вводной части статьи сформулируем два естественных вопроса.

Вопрос 1. *Существуют ли метрики положительной кривизны Риччи на всех момент-угол многообразиях?*

Мы думаем, что ответ на этот вопрос утвердительный. В качестве одной из предпосылок к этому (помимо результатов данной статьи) укажем на следующее: если P — двумерный многоугольник либо получен из многомерного тетраэдра многократным применением операции срезания окрестности некоторой вершины, то, как показано в [5], Z_P диффеоморфно определенной связной сумме произведений сфер различных размерностей, и положительный ответ на вопрос 1 в этом случае дает работа Рэйта [2].

С момент-угол многообразиями тесно связано понятие квазиторического многообразия [4]. Второй вопрос представляется гораздо более сложным и неоднозначным.

Вопрос 2. *Существуют ли метрики положительной кривизны Риччи на всех квазиторических многообразиях?*

В качестве вероятного положительного ответа на этот вопрос укажем лишь, что в [6] построены римановы метрики положительной кривизны Риччи на четырехмерных односвязных квазиторических многообразиях, а в [7] доказано, что эти метрики могут быть выбраны инвариантными относительно любого наперед заданного действия T^2.

Авторы признательны Т. Е. Панову за полезные обсуждения.

2. Момент-угол многообразия

Понятие момент-угол многообразия введено в [8]. Подробное изложение момент-угол многообразий и тесно связанных с ними квазиторических многообразий дано в [4]. Мы приводим здесь лишь необходимые нам в дальнейшем определения и свойства.

Пусть P — n-мерный многогранник в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, заданный системой неравенств

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x^j + b_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

«общего положения». Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — его гиперграни. Для $p \in P$ обозначим через $G(p)$ наименьшую (по включению) грань, в которой содержится точка p. Рассмотрим $X = P \times T^m$, где $T^m = \{(z_1, \ldots, z_m) \mid z_i \in \mathbb{C}, |z_i| = 1\}$ — стандартный m-мерный тор, в котором нумерация координат соответствует нумерации граней P. Обозначим через T^{F_i} окружность $S^1 \subseteq T^m$, отвечающую i-й грани. Теперь для любой грани G многогранника P положим

$$T^G = \prod_{G \subseteq F_i} T^{F_i} \subset T^m.$$

В X проведем отождествление точек по следующему правилу:

$$(p, z_i) \sim (p', z_i'), \text{ если } \ p = p' \text{ и } \ \bar{z}_i z_i' \in T^{G(p)}.$$

Можно показать [4, 8], что на фактор-пространстве $Z_P = (P \times T^m)/\sim$ существует каноническая структура топологического многообразия, причем естественное действие T^m сдвигами на себе индуцирует непрерывное действие на Z_P. При этом стабилизатором точки $(p, z) \in Z_P$ будет подгруппа $T^G(p)$ и $Z_P/T^m = P$. Более того, на Z_P можно ввести структуру гладкого многообразия такую, что естественное действие T^m будет гладким [4]. Многообразие Z_P (с некоторой T^m-инвариантной гладкостью) называется *момент-угол многообразием.*

Если теперь рассмотреть некоторый тор $T^{m-n} \subset T^m$, действие которого свободно на Z_P, то $M = Z_P/T^{m-n}$ будет квазиторическим многообразием и, обратно, любое квазиторическое многообразие может быть построено из некоторого момент-угол многообразия [4, 8]. При этом возникает главное расслоение со структурной группой T^{m-n}: $\pi : Z_P \to M$. Аналогично если фактор-пространство Z_P/T^{m-n} является орбифолдом, то мы будем называть его *квазиторическим орбифолдом.* В этом случае π будет главным торическим расслоением в смысле орбифолдов.

Пример 0. Пусть $P = I = [0, 1]$ — отрезок вещественной прямой. В этом случае нетрудно понять, что $Z_P = S^3 = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid |u|^2 + |v|^2 = 1\}$. Тор $T^2 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| = |z_2| = 1\}$ действует на S^3 стандартным образом:

$$(z_1, z_2) \in T^2 : (u, v) \mapsto (uz_1, vz_2).$$

Пример 1. Пусть $P = I^3$ — трехмерный куб. Тогда $Z_P = S^3 \times S^3 \times S^3$. На Z_P действует $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$. Если рассмотреть диагонально вложенную окружность S^1 в T^2, то $S^1 \times S^1 \times S^1$ действует на Z_P свободно и получаем квазиторическое многообразие $M_1 = S^2 \times S^2 \times S^2$.

Многообразие M_1 можно модифицировать следующим образом. На M_1 действует тор $T^3 = T^6/(S^1 \times S^1 \times S^1)$ (каждая из окружностей этого тора действует вращениями вокруг полюсной оси на своей сфере S^2). Естественно, что $M_1/T^3 = P$. Рассмотрим подгруппу $\Gamma = \mathbb{Z}_3$ в T^3, порожденную элементом $(\omega, \omega, \omega) \in T^3$, где $\omega = e^{2\pi i/3}$. Тогда $M_1' = M_1/\Gamma$ является квазиторическим орбифолдом с восемью особыми точками, окрестности которых устроены как $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$. Если разрешить каждую особенность при помощи операции раздутия (т. е. вырезать некоторую окрестность особой точки и вклеить вместо нее куб канонического комплексного линейного расслоения над $\mathbb{C}P^2$ — подробности этой операции можно найти в следующем параграфе), то мы получим квазиторическое многообразие N_1. При этом полиэдр $Q_1 = N_1/T^3$, отвечающий квазиторическому многообразию N_1, получается из куба P срезанием всех вершин. Приходим к главному T^{11}-расслоению $\pi_1 : Z_{Q_1} \to N_1$.

Пример 2. Рассмотрим полиэдр Q_2, получаемый из куба P срезанием окрестности одной вершины. Чтобы описать Z_{Q_2}, рассмотрим следующую конструкцию. Пусть тор T^3 действует на $Z_P = S^3 \times S^3 \times S^3$ таким образом:

$$(z_1, z_2, z_3) \in T^3 : \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 z_2^2\, u_1 & \bar{z}_1\, v_1 \\ z_2 z_3^2\, u_2 & \bar{z}_2\, v_2 \\ \bar{z}_1 z_3\, u_3 & \bar{z}_3\, v_3 \end{pmatrix},$$

где в строках матриц стоят координаты точки соответствующей сферы S^3.

Лемма 1. *Описанное выше действие будет свободным всюду в Z_P, кроме подмногообразия*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ u_2 & 0 \\ u_3 & 0 \end{pmatrix} \mid |u_1| = |u_2| = |u_3| = 1 \right\} = T^3,$$

Точки подмногообразия F будут иметь стабилизатор $\mathrm{Fix}(F) = \Gamma = \mathbb{Z}_3$, *порождаемый элементом* (ω, ω, ω), *где* $\omega = e^{2\pi i/3}$.

Таким образом, фактор-пространство $M_2' = Z_P/T^3$ является квазиторическим орбифолдом с одной особой точкой $p = F/T^3$, окрестность которой диффеоморфна $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$. Если разрешить особую точку p, то получим квазиторическое многообразие N_2, отвечающее многограннику $N_2/T^3 = Q_2$, и главное T^4-расслоение $\pi_2 : Z_{Q_2} \to N_2$. Топология пространства Z_{Q_2} исследована в [5] (при помощи техники, развитой в [4]). В частности, Z_{Q_2} не может быть представлено как связная сумма произведений сфер. Дальнейшие свойства Z_{Q_2} исследовались в [9].

Пример 3. Рассмотрим полиэдр Q_3, получаемый из куба P срезанием окрестностей двух нескрещивающихся ребер. Чтобы описать Z_{Q_3}, рассмотрим следующую конструкцию. Пусть тор T^3 действует на $Z_P = S^3 \times S^3 \times S^3$ таким образом:

$$(z_1, z_2, z_3) \in T^3 : \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 u_1 & z_1 z_2 \bar{z}_3 v_1 \\ z_2 \bar{z}_3 u_2 & \bar{z}_1 z_2 v_2 \\ \bar{z}_1 z_2 z_3 u_3 & z_3 v_3 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где в строках матриц стоят координаты точки соответствующей сферы S^3.

Лемма 2. *Описанное выше действие будет свободным всюду в Z_P, кроме двух подмногообразий:*

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & 0 \\ u_3 & 0 \end{pmatrix} \mid |u_1|^2 + |v_1|^2 = |u_2|^2 = |u_3|^2 = 1 \right\},$$

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \mid |v_1|^2 = |v_2|^2 = |u_3|^2 + |v_3|^2 = 1 \right\}.$$

Точки подмногообразий F_1 и F_2 будут иметь следующие стабилизаторы:

$$\mathrm{Fix}(F_1) = \Gamma_1 = \{(1, \pm(1,1))\} = \mathbb{Z}_2, \quad \mathrm{Fix}(F_2) = \Gamma_2 = \{(\pm(1,1), 1)\} = \mathbb{Z}_2.$$

Таким образом, фактор-пространство $M_3' = Z_P/T^3$ является квазиторическим орбифолдом с двумя особыми подмногообразиями $F_1/T^3 = S^2$ и $F_2/T^3 = S^2$. При этом трубчатые окрестности F_1/T^3 и F_2/T^3 расслаиваются со слоями, диффеоморфными $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Если разрешить M_3' вдоль особых подмногообразий (раздутием вдоль слоев трубчатых окрестностей), то получим квазиторическое многообразие N_3, которое отвечает многограннику $N_3/T^3 = Q_3$, и главное T^5-расслоение $\pi_3 : Z_{Q_3} \to N_3$. Как отмечалось во введении, многообразие Z_{Q_3} в этом примере не является формальным [4].

Теорема 1. *На момент-угол многообразиях Z_{Q_1}, Z_{Q_2} и Z_{Q_3} из примеров* 1–3 *существуют T^k-инвариантные римановы метрики положительной кривизны Риччи (соответственно $k = 11, 4, 5$) такие, что главные расслоения π_1, π_2 и π_3 являются римановыми субмерсиями.*

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству этой теоремы.

3. Раздутие многообразий положительной кривизны Риччи в особых точках

В комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартным эрмитовым произведением рассмотрим «круглую» $(2n+1)$-сферу S_R^{2n+1} радиуса R с индуцированной римановой метрикой $R^2 ds^2_{2n+1}$. На сфере S_R^{2n+1} свободно действует изометриями окружность S^1: $u \in S^1 : (z_0, \dots, z_n) \mapsto (uz_0, \dots, uz_n)$. Фактор-пространством этого действия является комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n_R$ с метрикой Фубини — Штуди (растянутой в R раз). Как обычно, будем обозначать $\mathbb{C}P^n_1 = \mathbb{C}P^n$.

Напомним (топологическую) конструкцию раздутия комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим каноническое комплексное расслоение над $\mathbb{C}P^{n-1}$ со слоем $\mathbb{C}$. Известно, что сферическое подрасслоение в нем изоморфно расслоению Хопфа $S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$. Пусть E — пространство шарового подрасслоения в каноническом расслоении, т. е. $\partial E = S^{2n-1}$. Можно вырезать в $\mathbb{C}P^n$ некоторый геодезической шар B радиуса ε и отождествить $\mathbb{C}P^n \backslash B$ с E по общему краю. Полученное многообразие наделяется канонической гладкостью и диффеоморфно $\mathbb{C}P^n \# \overline{\mathbb{C}P^n}$. Если теперь рассмотреть орбифолд $\mathbb{C}P^n/\mathbb{Z}_p$, где группа $\mathbb{Z}_p$ действует с изолированной неподвижной точкой p, то предыдущую конструкцию можно повторить, если взять геодезический шар с центром в точке p. В этом случае $\partial((\mathbb{C}P^n/\mathbb{Z}_p)\backslash B) = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$. Поэтому нужно рассмотреть p-ю тензорную степень канонического $\mathbb{C}$-расслоения E^p, $\partial(E^p) = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$ и отождествить $(\mathbb{C}P^n/\mathbb{Z}_p)\backslash B$ и E^p по общему краю. Полученное многообразие M моделирует раздутие особой точки. Заметим, что на $\mathbb{C}P^n/\mathbb{Z}_p$ и на E^p существует действие тора T^n, причем это действие согласовано на отождествляемых краях. Таким образом, на M определено каноническое действие T^n.

Нас будет интересовать следующее конкретное действие группы $\mathbb{Z}_n$ на $\mathbb{C}P^n$. Пусть $\omega = e^{2\pi i/n}$, $\mathbb{Z}_n = \langle \omega \rangle$. Рассмотрим действие на $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\omega : (z_0, \dots, z_n) \mapsto (z_0, \omega z_1, \dots, \omega z_n).$$

Ясно, что это действие индуцирует изометрическое действие $\mathbb{Z}_n$ на $\mathbb{C}P^n$, причем оно свободно вне двух подмножеств: $\bar{p} = [1 : 0 : \dots : 0]$ и $\mathbb{C}P^{n-1} = \{z_0 = 0\}$. Таким образом, $\bar{p}$ является изолированной неподвижной точкой и можно произвести в ее окрестности операцию раздутия. Целью настоящего параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Существует такое $\sigma > 0$, что для любого $\varepsilon > 0$ на многообразии M, полученном из $\mathbb{C}P^n/\mathbb{Z}_n$ раздутием особой точки $\bar{p}$ так, как описано выше, существует риманова метрика g с кривизной Риччи, не меньшей σ, совпадающая с метрикой Фубини — Штуди вне геодезического шара радиуса ε с центром в точке $\bar{p}$. Более того, тор T^n действует на M изометриями.*

Доказательство теоремы 2 начнем с леммы.

Лемма 3. *Метрику Фубини — Штуди на $\mathbb{C}P^n_R$ можно представить следующим образом:*

$$g_R = dt^2 + R^2 \sin^2 \frac{t}{R} \cos^2 \frac{t}{R}\, ds_v^2 + R^2 \sin^2 \frac{t}{R}\, ds_h^2,$$

где $0 \le t \le R\pi/2$ — расстояние до точки $\bar{p}$, а $ds_v^2 = ds^2_{2n-1}|_V$ и $ds_h^2 = ds^2_{2n-1}|_H$ — ограничения стандартной сферической метрики на распределение вертикальных и горизонтальных подпространств для диагонального действия S^1 на сфере S^{2n-1}.

Доказательство. Касательное пространство к сфере в точке $p \in S_R^{2n+1}$ раскладывается на горизонтальное и вертикальное подпространства $T_pS_R^{2n+1} = V_p \oplus H_p$ относительно римановой субмерсии $\pi_n : S_R^{2n+1} \to \mathbb{C}P_R^n$:

$$V_p = \{t \cdot ip \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad H_p = \{u \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \langle u, p\rangle_{\mathbb{C}} = 0\}.$$

Фиксируем точки $p_0 = (R, 0, \dots, 0) \in S_R^{2n+1}$ и $\bar{p}_0 = \pi_n(p_0)$. Положим для $0 \le t \le R\pi/2$

$$S_t = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \mid |z_0| = R\cos(t/R)\} \subset S_R^{2n+1}.$$

Очевидно, что S_0 — S^1-орбита точки p_0, являющаяся замкнутой геодезической на сфере; $S_{R\pi/2}$ — экваториальная сфера в S_R^{2n-1}, отвечающая вложению $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ в качестве комплексной гиперплоскости $\{z_0 = 0\}$. При $0 < t < R\pi/2$ подмногообразие S_t представляет собой трубчатую гиперповерхность радиуса t вокруг S_0 (или, что равносильно, трубчатую гиперповерхность радиуса $R\pi/2 - t$ вокруг $S_{R\pi/2}$) и изометрично произведению $S^1 \times S^{2n-1}$ с метрикой

$$g = R^2\left(\cos^2\frac{t}{R}\,ds_1^2 + \sin^2\frac{t}{R}\,ds_{2n-1}^2\right).$$

Каждая кратчайшая нормальная геодезическая, идущая от S_0 к S_t, проектируется в геодезическую в $\mathbb{C}P_R^n$ той же длины, значит, S_t проектируется в геодезическую сферу $\overline{S}_t$ в $\mathbb{C}P_R^n$ радиуса t с центром в $\bar{p}_0$, которая является фактор-пространством S_t по действию группы S^1. Легко видеть, что $\overline{S}_t$ (при $0 < t < R\pi/2$) диффеоморфно сфере S_R^{2n-1} со «скошенной» метрикой. Если обозначить через $ds_v^2 = ds_{2n-1}^2|_V$ и $ds_h^2 = ds_{2n-1}^2|_H$ ограничения стандартной сферической метрики на распределение вертикальных и горизонтальных подпространств в сфере $\overline{S}_t$, то непосредственно можно проверить, что метрика на $\overline{S}_t$ выглядит так:

$$\bar{g} = R^2\left(\sin^2\frac{t}{R}\ \cos^2\frac{t}{R}\,ds_v^2 + \sin^2\frac{t}{R}\,ds_h^2\right).$$

Итак, мы получили следующее представление метрики Фубини — Штуди на $\mathbb{C}P_R^n$:

$$g_R = dt^2 + R^2\sin^2\frac{t}{R}\cos^2\frac{t}{R}\,ds_v^2 + R^2\sin^2\frac{t}{R}\,ds_h^2,$$

где $0 \le t \le R\pi/2$. Лемма доказана.

Далее будем рассматривать метрики на $\mathbb{R} \times S^{2n-1}$ общего вида:

$$g = dt^2 + h(t)^2\,ds_v^2 + f(t)^2\,ds_h^2. \tag{2}$$

Формулы из следующей леммы хорошо известны и без труда проверяются.

Лемма 4. *Пусть $X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$ — единичный вектор в радиальном направлении, X_1 — единичный вектор в вертикальном направлении (т. е. $X_1 \in V$) и X_2 — единичный вектор в горизонтальном направлении ($X_2 \in H$). Тогда кривизна Риччи может быть вычислена по следующим формулам:*

$$\operatorname{Ric}(X_i, X_j) = 0 \text{ при } i \ne j, \quad \operatorname{Ric}(X_0, X_0) = -\frac{h''}{h} - (2n-2)\frac{f''}{f},$$

$$\operatorname{Ric}(X_1, X_1) = -\frac{h''}{h} - (2n-2)\frac{f'h'}{fh} + (2n-2)\frac{h^2}{f^4}, \tag{3}$$

$$\operatorname{Ric}(X_2, X_2) = -\frac{f''}{f} - \frac{f'h'}{fh} - (2n-3)\frac{(f')^2}{f^2} + \frac{2n}{f^2} - 2\frac{h^2}{f^4}.$$

Доказательство теоремы 2. В первую очередь рассмотрим метрику g, представленную в следующем специальном виде:

$$g = \frac{dr^2}{1-\phi(r)} + r^2(1-\phi(r))\,ds_v^2 + r^2\,ds_h^2, \tag{4}$$

где $\phi(r)$ — некоторая гладкая функция. Формулы (3) преобразуются следующим образом:

$$\mathrm{Ric}(X_0,X_0) = \mathrm{Ric}(X_1,X_1) = \frac{1}{2}\left(\phi'' + (2n+1)\frac{\phi'}{r}\right), \quad \mathrm{Ric}(X_2,X_2) = \frac{\phi'}{r} + 2n\frac{\phi}{r^2}.$$

Например, евклидова метрика в $\mathbb{C}^n$ соответствует $\phi(r) = 0$, а рассмотренная выше метрика g_R на $\mathbb{C}P^n_R$ получается, если взять

$$\phi(r) = \phi_R(r) = \frac{r^2}{R^2}, \quad 0 \le r \le R.$$

Отметим, что метрика g_R является эйнштейновой с космологической постоянной $\frac{2(n+1)}{R^2}$. Положим $\psi(r) = r\phi' + 2n\phi$. Тогда тензор Риччи выглядит особенно просто:

$$\mathrm{Ric}(X_0,X_0) = \mathrm{Ric}(X_1,X_1) = \frac{\psi'}{2r}, \quad \mathrm{Ric}(X_2,X_2) = \frac{\psi}{r^2}.$$

Очевидно, что метрике на $\mathbb{C}P^n_R$ соответствует функция $\psi_R(r) = 2(n+1)\frac{r^2}{R^2}$.

Замечание 1. Если положить $\psi(r) \equiv 0$, то получаем Риччи-плоскую риманову метрику вида

$$g_n = \frac{dr^2}{1-\frac{1}{r^{2n}}} + r^2\left(1-\frac{1}{r^{2n}}\right) ds_v^2 + r^2\,ds_h^2,$$

представляющую собой не что иное, как метрику с группой голономии $SU(n)$, найденную Калаби в [10]. Именно метрика Калаби навела нас на анзац (4).

Положим $r_1 = \sqrt{R}$. Зададим функцию $\psi_n(r)$ для $1 \le r \le R$. Пусть

$$\psi_n(r) = \psi_R(r) \quad \text{при } r_1 \le r.$$

Далее, $\psi_n'(r_1) = 4(n+1)r_1/R^2 > 0$. Поэтому мы можем продолжить функцию ψ_n гладким образом внутри промежутка $[1, r_1]$ так, что она будет удовлетворять на этом промежутке следующим условиям:

$$\psi_n'(r) > \frac{\kappa}{R^2} \text{ при } r \ge 1, \quad \psi_n(r) \ge \kappa\frac{r^2-1}{R^2} \text{ при } 1 \le r \le r_1,$$

$$\psi_n(1) = 0, \quad \int\limits_1^{r_1} \psi_n(s)s^{2n-1}ds = \eta,$$

где $\kappa > 0$ не зависит от R, а η — любое наперед заданное число такое, что

$$\kappa\frac{r_1^{2n}}{R^2}\left(\frac{r_1^2}{2n+2} - \frac{1}{2n}\right) < \eta < \frac{\psi_n(r_1)}{2n}\left(r_1^{2n} - 1\right).$$

Выберем

$$\eta = \frac{r_1^{2(n+1)}}{R^2} - 1.$$

Действительно, неравенства для η в этом случае превращаются в следующие:

$$\kappa R^{n-1}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2nR}\right)<R^{n-1}-1,\quad \left(R^{n-1}-1\right)<\frac{n+1}{n}\left(R^{n-1}-\frac{1}{R}\right).$$

Таким образом, при $R>2$ оба неравенства выполнены, и мы построим функцию ψ_n, удовлетворяющую нужным свойствам. Теперь можем положить

$$\phi_n(r)=\frac{1}{r^{2n}}\int\limits_1^r \psi_n(s)s^{2n-1}\,ds+\frac{1}{r^{2n}}.$$

Метрика g_n, построенная по этой функции, очевидно, имеет неотрицательную кривизну Риччи, строго положительную при $r>1$. Более того, кривизна Риччи в точках $r=1$ обращается в нуль только в направлении векторов X_2. Проверим, что ϕ_n совпадает с ϕ_R на промежутке $r_1\le r\le R$. Действительно, если $r\ge r_1$, то

$$\begin{aligned}\phi_n(r)=\frac{1}{r^{2n}}+\frac{1}{r^{2n}}\int\limits_{r_0}^{r_1}\psi_n(s)s^{2n-1}ds+\frac{1}{r^{2n}}\int\limits_{r_1}^{r}2(n+1)\frac{s^{2n+1}}{R^2}\,ds\\ =\frac{1}{r^{2n}}\left(1+\eta-\frac{r_1^{2(n+1)}}{R^2}\right)+\frac{r^2}{R^2}=\frac{r^2}{R^2}.\end{aligned}$$

Итак, метрика g_n, задаваемая функцией ϕ_n, совпадает с метрикой g_R на $\mathbb{C}P^n_R$ при $r\ge r_1$. Заметим, что

$$\phi_n(1)=1,\quad \phi_n'(1)=-2n.$$

Для того чтобы избавиться от эффекта обращения в нуль кривизны Риччи при $r=1$, рассмотрим модифицированную метрику:

$$g_n'=\frac{dr^2}{1-\phi_n(r)}+r^2(1-\phi_n(r))\,ds_v^2+(1-\delta(r))r^2\,ds_h^2,$$

где $\delta(r)\ge 0$ — некоторая гладкая функция. Зададим достаточно малое $\nu>0$. Выберем невозрастающую функцию $\delta_\nu(r)$, $1\le r\le R$, так, что выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered}\delta_\nu(r)=0 \text{ при } r\ge r_1,\quad \delta_\nu(r)>0 \text{ при } 1\le r<r_1,\\ \delta_\nu(r) \text{ постоянна при } 1\le r\le 2,\quad \|\delta_\nu(r)\|_{C^\infty}\le\nu.\end{gathered}$$

Понятно, что если взять $R>4$, то для любого $\nu>0$ функция $\delta_\nu(r)$ с указанными свойствами существует. Тогда формулы (3) показывают, что при $1\le r\le 2$

$$\mathrm{Ric}'(X_2,X_2)=\frac{\psi_n}{r^2}+\frac{2\delta_\nu(1)}{(1-\delta_\nu(1))r^2}\left(n-\frac{2-\delta_\nu(1)}{1-\delta_\nu(1)}(1-\phi_n)\right).$$

Поскольку функция ϕ_n строго положительна всюду на $[1,R]$, можно считать $\phi_n\ge c(R)>0$. Следовательно, если взять такое $\nu>0$, что

$$\delta_\nu(r)\le\delta_\nu(1)\le\frac{2c(R)}{1+c(R)},$$

то немедленно проверяется, что при $1 \le r \le 2$

$$\mathrm{Ric}'(X_2, X_2) \ge \frac{\psi_n}{r^2} + \frac{2\delta_\nu(1)}{(1-\delta_\nu(1))r^2}(n-2) \ge \frac{2\delta_\nu(1)}{(1-\delta_\nu(1))}\frac{n-2}{4} > 0. \qquad (5)$$

Далее, при $2 \le r \le R$ для кривизны метрики g_n имеем

$$\mathrm{Ric}(X_2, X_2) = \frac{\psi_n}{r^2} \ge \kappa\frac{r^2-1}{R^2} \ge \frac{3\kappa}{R^2}.$$

В силу непрерывности для всех достаточно малых $\nu > 0$ (напомним, что ν выбирается независимо от R) выполнена оценка снизу на кривизну Риччи метрики g'_n при $2 \le r \le R$:

$$\mathrm{Ric}'(X_2, X_2) \ge \frac{2\kappa}{R^2}. \qquad (6)$$

С другой стороны, поскольку кривизна Риччи $\mathrm{Ric}(X_0, X_0) = \mathrm{Ric}(X_1, X_1)$ в метрике g_n ограничена снизу константой $\frac{\kappa}{R^2}$, при всех достаточно малых ν будут также выполнены аналогичные оценки для метрики g'_n:

$$\mathrm{Ric}'(X_0, X_0) = \mathrm{Ric}'(X_1, X_1) \ge \frac{\kappa}{2R^2}. \qquad (7)$$

Итак, фиксировав достаточно малое число ν, из неравенств (5)–(7) выводим общую оценку снизу на кривизну Риччи:

$$\mathrm{Ric}'(X, X) \ge \frac{\sigma}{R^2}, \qquad (8)$$

где $|X| = 1$, а константа $\sigma > 0$ выбрана независимо от $R > 4$. Отметим, что, в частности,

$$\frac{2\delta_\nu(1)}{(1-\delta_\nu(1))}\frac{n-2}{4} \ge \sigma. \qquad (9)$$

Обсудим гладкость метрики g'_n в окрестности $r = 1$. Во-первых, поскольку в начальной точке $r = 1$ функция h обращается в нуль, а функция f строго положительна, интегральные окружности вертикального распределения V (т. е. вертикальные слои субмерсии) затягиваются в точку при $r \to 1$ и метрика g'_n определена на раздутии пространства $\mathbb{C}P^n_R$ в точке $\bar{p}$. Гладкость подобных метрик исследована, например, в [11]. Критерием гладкости являются соотношения

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{r=1} f(t) = 0, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{r=1} h(t) = \pm 1$$

(строго говоря эти соотношения влекут гладкость порядка C^1, однако квазилинейность оператора кривизны Риччи позволяет бесконечно сгладить такую метрику с сохранением качественной оценки (8)). Непосредственное вычисление показывает, что

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{r=1} f(t) = 0, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{r=1} h(t) = -\frac{\phi'(1)}{2} = n.$$

Видим, что для гладкости необходимо сократить вертикальные окружности субмерсии «в n раз», т. е. метрика g'_n является гладкой метрикой положительной кривизны Риччи на пространстве, полученном из $\mathbb{C}P^n_R/\mathbb{Z}_n$ разрешением особенности.

Теперь домножим метрику g'_n на коэффициент $1/R^2$. При этом получим риманову метрику g на $\mathbb{C}P^n/\mathbb{Z}_n$ с раздутой особой точкой, причем раздутие происходит внутри окрестности радиуса

$$\frac{r_1}{R} = \frac{1}{\sqrt{R}} = \varepsilon \to 0$$

при $R \to \infty$. Оценка (8) превращается в оценку $\mathrm{Ric}(X, X) \geq \sigma$, где σ не зависит от ε. Осталось заметить, что при всех операциях с метрикой сохранялась ее T^n-инвариантность. Теорема доказана.

Замечание 2. Пользуясь (9), можно оценить

$$f(1) = \sqrt{1 - \delta_\nu(1)} \leq \sqrt{\frac{n-2}{n-2+2\sigma}}.$$

После сокращения метрики в R^2 раз получаем оценку на «размер» D пространства $\mathbb{C}P^{n-1}$, вклеиваемого вместо особой точки:

$$D \leq \frac{1}{R}\sqrt{\frac{n-2}{n-2+2\sigma}} = \varepsilon^2\sqrt{\frac{n-2}{n-2+2\sigma}}. \tag{10}$$

Эта оценка пригодится в дальнейшем.

4. Построение римановых метрик положительной кривизны Риччи

Нам потребуется несколько известных результатов. Во-первых, нужно поднимать риманову метрику положительной кривизны Риччи с базы на пространство римановой субмерсии с сохранением положительности кривизны Риччи. Подобные конструкции рассматривалось в работах [12–16]. В [14] возможность такого поднятия доказывается для торических главных расслоений (которые только и нужны в нашей статье), однако без утверждения об инвариантности итоговой метрики. Поэтому, чтобы получить инвариантные метрики на момент-угол многообразиях, будем использовать следующий более сильный результат.

Теорема 3 [16]. *Пусть (Y, g_Y) — компактное связное риманово многообразие с положительной кривизной Риччи. Пусть P — главное расслоение над Y с компактной связной структурной группой G такое, что $\pi_1(P)$ конечна. Тогда существует G-инвариантная метрика g_P на P такая, что g_P имеет положительную кривизну Риччи и $\pi : (P, g_P) \to (Y, g_Y)$ — риманова субмерсия.*

Следующая теорема позволяет заменить любую риманову метрику в малой окрестности многообразия некоторой модельной метрикой.

Теорема 4 [16]. *В шаре $U(0, \rho_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \rho_0\}$ рассмотрим две римановы метрики g_0 и g_1 положительной кривизны Риччи с одинаковыми 1-струями $J^1(g_0)$ и $J^1(g_1)$ в точке 0. Тогда в $U(0, \rho_0)$ существуют риманова метрика $\bar{g}$ положительной кривизны Риччи и такие $0 < \rho_2 < \rho_1 < \rho_0$, что $\bar{g} = g_1$ при $|x| < \rho_2$ и $\bar{g} = g_0$ при $|x| > \rho_1$.*

Замечание 3. В [17] теорема 4 доказана для отрицательной кривизны Риччи, но все рассуждения переносятся без труда на положительный случай. Кроме того, для наших целей важно знать чуть больше о конструкции, примененной при доказательстве вышеприведенной теоремы. Во-первых, метрика $\bar{g}$ ищется в виде $\bar{g} = (1 - s)g_0 + sg_1$, где $s = \psi(|x|)$ для некоторой гладкой функции $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$. Это немедленно приводит нас к выводу, что если метрики g_0, g_1 были инвариантны относительно действия группы G, сохраняющей функцию $|x|$, то итоговая метрика $\bar{g}$ также будет инвариантна относительно G. Во-вторых, коэффициенты связности Леви-Чивиты и коэффициенты тензора Риччи метрик $g_1, g_2, \bar{g}$ могут быть выбраны сколь угодно близкими друг к другу независимо от константы ρ_0.

Теперь разберем последовательно примеры из разд. 2.

Примеры 1, 2. Как описано в разд. 2, орбифолды M_1' и M_2' имеют изолированные особые точки, в окрестности которых они устроены как $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_3$. Применяя теорему 4 (к $\mathbb{Z}_3$-накрытию малой окрестности каждой особой точки), можем считать, что окрестность каждой особой точки изометрична геодезическому шару в $\mathbb{C}P^3/\mathbb{Z}_3$. Используя теорему 2, приходим к инвариантной метрике положительной кривизны Риччи на N_1 и N_2, получающихся раздутием особых точек. Наконец, применение теоремы 3 дает искомые метрики на Z_{Q_1} и Z_{Q_2}.

Пример 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Построим гладкую функцию $f(t)$ на отрезке $[0,\pi/2]$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$f(t) = 1 \text{ при } 0 \le t \le \varepsilon, \quad f(t) = \cos t \text{ при } \pi/2 - \varepsilon \le t \le \pi/2,$$

$$f'(t) < 0, f''(t) < 0 \text{ при } \varepsilon < t < \pi/2 - \varepsilon.$$

Очевидно, что такая функция существует для всех достаточно малых ε. На пространстве $[0,\pi/2]^3 \times (S^1)^6$ с координатами $(t_1, t_2, t_3, \phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2, \phi_3, \psi_3)$ рассмотрим следующую риманову метрику:

$$g = dt_1^2 + \cos(t)^2\, d\phi_1^2 + f(\pi/2 - t_1)^2\, d\psi_1^2 + +dt_2^2 + f(t_2)^2\, d\phi_2^2 \\ + f(\pi/2 - t_2)^2\, d\psi_2^2 + dt_3^2 + f(t_3)^2\, d\phi_3^2 + \sin(t_3)^2\, d\psi_3^2.$$

Нетрудно видеть, что для каждого $i = 1, 2, 3$ координаты (t_i, ϕ_i, ψ_i) определены на соответствующей сфере S^3, g является гладкой метрикой на $Z_P = S^3 \times S^3 \times S^3$ и имеет неотрицательную секционную кривизну в силу ограничений на $f(t)$.

В выбранных координатах подмножества F_1 и F_2 задаются уравнениями $t_2 = t_3 = 0$ и $t_1 = t_2 = \pi/2$ соответственно.

Замечание 4. Ясно, что преобразование $(t_1, t_2, t_3, \phi_1, \psi_1, \phi_2, \psi_2, \phi_3, \psi_3) \mapsto (\pi/2 - t_3, \pi/2 - t_2, \pi/2 - t_1, \psi_3, \phi_3, \psi_2, \phi_2, \psi_1, \phi_1)$ является изометрией Z_P, которая меняет местами F_1 и F_2. Поэтому дальнейшие рассуждения (в силу их локальности) достаточно провести только для F_1.

Зададим окрестность $U \subset Z_P$ множества F_1 соотношениями $t_2 < \varepsilon$ и $t_3 < \varepsilon$. Очевидно, что окрестность U изометрична прямому произведению $S^3 \times S^1 \times S^1 \times D^2 \times D^2$ с метрикой

$$g|_U = \left(dt_1^2 + \cos(t)^2\, d\phi_1^2 + f(\pi/2 - t_1)^2\, d\psi_1^2\right) + \left(d\phi_2^2 + d\phi_3^2\right) \\ + \left(dt_2^2 + \sin(t_2)^2\, d\psi_2^2\right) + \left(dt_3^2 + \sin(t_3)^2\, d\psi_3^2\right)$$

(таким образом, каждый диск D^2 изометричен геодезическому кругу на единичной двумерной сфере). Положим $S = D^2 \times D^2$ с индуцированной метрикой. В дальнейшем в S также будем рассматривать координаты (t, θ, ψ, ϕ) такие, что $t_2 = t\cos\bigl(\frac{\theta}{2}\bigr)$, $t_3 = \sin\bigl(\frac{\theta}{2}\bigr)$, $\psi_2 = \frac{\psi+\phi}{2}$, $\psi_3 = \frac{\psi-\phi}{2}$.

Ясно, что S имеет неотрицательную секционную кривизну и строго положительную кривизну Риччи (если быть точным, кривизна Риччи S равна единице). По теореме 4 можно деформировать метрику на S таким образом, что она не изменится вне $\varepsilon/2$-окрестности точки $p = \{t = 0\} \in S$ и внутри $\varepsilon/4$-окрестности станет изометрична геодезическому шару радиуса $\varepsilon/4$ в пространстве $\mathbb{C}P^2$ с сохранением положительности кривизны Риччи. По теореме 2 мы можем выполнить раздутие $S/\mathbb{Z}_2$ внутри окрестности радиуса $\varepsilon/4$ без потери положительности кривизны Риччи: получим многообразие S'. Заменим каждый «прямой» множитель S в U двулистным накрытием над S' (разветвленное вдоль вертикальных окружностей расслоения Хопфа), получим $U' = S^3 \times S^1 \times S^1 \times S'$. Поскольку вне окрестности радиуса $\varepsilon/2$ римановы многообразия S и двулистное накрытие над S' изометричны, вклеим U' вместо U в Z_P, получив Z'_P. Строго говоря, U' двулистно разветвлено над F_1, однако после факторизации по действию (1) группы T^3 получим гладкое многообразие. Отметим, что вся эта конструкция может быть проделана при сколь угодно малом ε.

Лемма 4. *Фактор-пространство $\widetilde{U} = U'/T^3$ с индуцированной римановой метрикой имеет строго положительную кривизну Риччи при достаточно малом ε.*

Доказательство. Индуцированная на пространстве $\widetilde{U}$ метрика характеризуется тем свойством, что отображение факторизации $U' \to \widetilde{U}$ является римановой субмерсией. Воспользуемся аналогом формул О'Нила для кривизны Риччи [18]:

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) = R(X, X) + 2(AX, AX) + (TX, TX) - (D_X N, X).$$

Здесь $\widetilde{R}$ и R — тензоры Риччи $\widetilde{U}$ и U'; A и T — фундаментальные тензоры, связанные с римановой субмерсией; $\widetilde{X}$ — касательное векторное поле в $\widetilde{U}$, X — его горизонтальное поднятие в U'; N — вектор средней кривизны слоев субмерсии, т. е. $N = \sum_i T_{U_i} U_i$, где U_i — ортонормированный базис в вертикальном пространстве субмерсии. В качестве базиса (не ортонормированного) вертикальных векторных полей можно выбрать следующий:

$$V_1 = \partial_{\phi_1} + 2\partial_{\psi_1} + \partial_{\phi_2}, \quad V_2 = \partial_{\psi_1} + \partial_{\phi_2} + \partial_{\phi_3} + \partial_{\psi_2}, \quad V_3 = -\partial_{\psi_1} - \partial_{\phi_2} + \partial_{\phi_3} + \partial_{\psi_3}.$$

Таким образом,

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) \geq R(X, X) - (D_X N, X). \tag{11}$$

Сначала заметим, что Z_P имеет неотрицательную кривизну Риччи. При этом $R(X, X) = 0$ в точности в двух случаях: 1) $t_2 \leq \varepsilon$, $t_3 \leq \varepsilon$, при этом $X = \alpha\partial_{\phi_2} + \beta\partial_{\phi_3}$; 2) $t_1 \geq \pi/2 - \varepsilon$, $t_2 \geq \pi/2 - \varepsilon$, при этом $X = \alpha\partial_{\psi_1} + \beta\partial_{\psi_2}$, где α, β — некоторые коэффициенты. Непосредственно проверяется, что ненулевые векторы X в пп. 1, 2 не могут быть горизонтальными. Следовательно, существует константа $\sigma > 0$ такая, что кривизна Риччи пространства Z_P в горизонтальном направлении не меньше чем σ. В силу замечания 3 после применения теоремы 4 для деформации метрики можно добиться того, чтобы кривизна Риччи полученной метрики в горизонтальном направлении была не менее чем $\sigma/2$, причем независимо от малости ε. Наконец, в силу теоремы 2 после применения конструкции раздутия кривизна Риччи полученной метрики в горизонтальном направлении снова ограничена снизу некоторой константой $\kappa > 0$, не зависящей от ε. Итак, первое слагаемое в формуле (11) можно оценить снизу:

$$R(X, X) \geq \kappa. \tag{12}$$

Пусть теперь в пространстве вертикальных векторных полей субмерсии выбран ортонормированный базис $V_i' = Y_i + Z_i$, где Y_i, Z_i — поля, касательные $S^3 \times T^2$ и S' соответственно, $i = 1, 2, 3$. Тогда

$$N = \sum_{i=1}^{3} \bigl(T_{Y_i} Y_i + T_{Z_i} Z_i\bigr) = N_1 + N_2$$

— соответствующее разложение вектора средней кривизны. Видим, что квадратичная форма $R(X, X) - (D_X N, X)$ распалась на три блока, отвечающие подпространствам касательным к S^3, T^2 (плоский тор) и S.

При применении конструкции теоремы 4, в силу замечания 3 полученная на S метрика $\bar{g}$ является «линейной интерполяцией» метрик g_0 и g_1. Поэтому в нашем случае она будет иметь вид

$$\bar{g} = (dt^2 + f(t)^2 d\theta^2) + \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(t, \theta)\, d\xi^i d\xi^j,$$

где $\psi = \xi^1, \phi = \xi^2$. Несложное вычисление показывает, что

$$D_{\xi^i} \xi^j = -\frac{1}{2} \operatorname{grad}(g_{ij})$$

(градиент берется относительно метрики $dt^2 + h^2 d\theta^2$). Положим

$$Z_i = \sum_{j=1}^{2} \alpha_i^j \partial_{\xi^j}.$$

Поскольку тор T^3 действует неподвижно на полюсе $p \in S$, поля Z_i обращаются в нуль при $t = 0$. Следовательно, $\alpha_i^j(p) = 0$ при всех i, j. Далее,

$$N_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j,k=1}^{2} \alpha_i^j \alpha_i^k \operatorname{grad}(g_{jk}).$$

Значит,

$$\begin{aligned} -(D_X N_2, X)|_{t=0} &= (-X(N_2, X) + (N_2, D_X X))_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j,k=1}^{2} \bigl(2\alpha_i^j g_{jk} X\bigl(\alpha_i^k\bigr) + \alpha_i^j \alpha_i^k X(g_{jk})\bigr)_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Тем самым, взяв достаточно малое $\varepsilon > 0$, можно добиться того, чтобы во всей области U для метрики $\bar{g}$ было выполнено неравенство

$$|(D_X N_2, X)| \le \kappa/2. \tag{13}$$

Проследим, что будет происходить с величиной $(D_X N_2, X)$ при выполнении операции раздутия, как описано в теореме 2. Метрика при этом деформируется в классе метрик более конкретного вида

$$\bar{g} = dt^2 + \frac{1}{4} h(t)^2 (d\psi + \cos(\theta)\, d\phi)^2 + \frac{1}{4} f(t)^2 (d\theta^2 + \sin(\theta)^2\, d\phi^2)$$

(данная метрика не что иное, как метрика (2) при $n = 2$, записанная в координатах (t, θ, ψ, ϕ)). Напомним, что здесь $h(0) = 0$, $f'(0) = 0$ и $f(0) = f_0 > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым при уменьшении ε (см. (10) и замечание 2). Кроме того, координаты поля V_i' при ∂_ψ обращаются в нуль при $t = 0$, так как сфера $\{t = 0\}$ остается неподвижной под действием ∂_ψ. Таким образом, $\alpha_i^1(p) = 0$. Далее, поскольку радиус сферы $t = 0$ равен f_0, сфера также может быть сделана сколь угодно малой, а значит, и α_i^2 при $t=0$ может быть сделан сколь угодно малым при уменьшении ε. Итак, в этом случае

$$\begin{aligned}
-(D_X N_2, X)|_{t=0} &= (-X(N_2,X) + (N_2, D_X X))_{t=0} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j,k=1}^{2}\big(2\alpha_i^j g_{jk} X\big(\alpha_i^k\big) + \alpha_i^j\alpha_i^k X(g_{ij}) + \alpha_i^j\alpha_i^k(\operatorname{grad}(g_{jk}), D_X X)\big)_{t=0}.
\end{aligned}$$

Поскольку все производные функций $f(t), h(t)$ заведомо ограничены независимо от ε, ограничены и все производные коэффициентов g_{ij} вдоль единичных полей. Значит, уменьшая ε, можно и в этом случае добиться оценки (13).

Теперь рассмотрим компоненту N_1 вектора средней кривизны. Выберем следующий базис в пространстве вертикальных полей:

$$V_1 = 2\partial_{\phi_3} + \partial_{\psi_2} + \partial_{\psi_3}, \quad V_2 = \partial_{\psi_1} + \partial_{\phi_2} + \partial_{\phi_3} + \partial_{\psi_2}, \quad V_3 = \partial_{\phi_1} - \partial_{\phi_2} - 2\partial_{\phi_3} - 2\partial_{\psi_2}.$$

Стандартным методом ортогонализации переходим к ортонормированному в каждой точке базису из вертикальных векторных полей V_1', V_2', V_3', причем

$$V_1' = Z_1', \quad V_2' = y_1\partial_{\psi_1} + Z_2', \quad V_3' = z_1\partial_{\phi_1} + z_2\partial_{\psi_1} + Z_3',$$

где поля Z_i' касательны к $T^2 \times S'$, а коэффициенты y_1, z_1, z_2 являются функциями от (t_1, t_2, t_3). Следовательно,

$$N_1 = \big(z_1^2\sin(t_1)\cos(t_1) + w^2 f(\pi/2 - t_1) f'(\pi/2 - t_1)\big)\partial_{t_1}$$

для некоторого w, явно выражаемое через y_1, z_1, z_2. Как и выше, видим, что $(D_X N_1, X) \neq 0$, только если $X = \partial_{t_1}$. Таким образом, положительность кривизны Риччи осталось проверить лишь для $X = \partial_{t_1}$. Однако для всех горизонтальных векторов Y, ортогональных вектору ∂_{t_1}, секционная кривизна $K(\partial_{t_1}, Y)$ неотрицательна, причем $K(\partial_{t_1}, \partial_{\phi_1}) = 1$. Значит, по формуле О'Нила

$$\widetilde{R}(\tilde\partial_{t_1}, \tilde\partial_{t_1}) = \sum_{\widetilde{Y}\perp\tilde\partial_{t_1}} K(\tilde\partial_{t_1}, \widetilde{Y}) \geq \sum_{Y\perp\partial_{t_1}, V_1, V_2, V_3} K(\partial_{t_1}, Y) > 0, \tag{14}$$

так как существуют горизонтальные векторы Y с всюду ненулевой координатой по ∂_{ϕ_1}.

Для завершения доказательства леммы рассмотрим произвольный горизонтальный вектор

$$X = \alpha_1\partial_{t_1} + \alpha_2\partial_{\phi_1} + \alpha_3\partial_{\psi_1} + \alpha_4\partial_{\phi_2} + \alpha_5\partial_{\phi_3} + X_2,$$

где X_2 — касательный вектор к S'. Используя (11)–(14), получаем

$$\widetilde{R}(\widetilde{X}, \widetilde{X}) \geq \alpha_1^2\widetilde{R}(\tilde\partial_{t_1}, \tilde\partial_{t_1}) + R(\alpha_2\partial_{\phi_1} + \alpha_3\partial_{\psi_1} + \alpha_4\partial_{\phi_2}, \alpha_2\partial_{\phi_1} + \alpha_3\partial_{\psi_1} + \alpha_4\partial_{\phi_2}) + |\widetilde{X_2}|^2\frac{\kappa}{2}.$$

Ясно, что если $\alpha_1 = 0$ и $X_2 = 0$, то $\alpha_2\partial_{\phi_1} + \alpha_3\partial_{\psi_1} + \alpha_4\partial_{\phi_2}$ является горизонтальным вектором и средний член последнего неравенства ограничен снизу величиной σ. Если же величина α_1 (соответственно $|X_2|$) не равна нулю, то средний член по крайней мере неотрицателен, а первый (соответственно второй) член последнего неравенства строго положителен. Лемма доказана.

Выполнив описанную нами конструкцию также для окрестности F_2, получим квазиторическое многообразие N_3 с положительной кривизной Риччи. Применение теоремы 3 завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 5. Авторам удалось построить и другие действия T^3 на Z_P, отвечающие срезанию различных комбинаций вершин. Ясно, что во всех случаях можно аналогичными рассуждениями добиться построения римановых метрик положительной кривизны Риччи на соответствующих момент-угол многообразиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sha J., Yang D.* Positive Ricci curvature on the connected sums of $S^n \times S^m$ // J. Differ. Geometry. 1991. V. 33, N 1. P. 127–137.
2. *Wraith D. J.* New connected sums with positive Ricci curvature // Ann. Global Anal. Geometry. 2007. V. 32, N 4. P. 343–360.
3. *Баскаков И. В.* Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, № 5. С. 199–200.
4. *Бухштабер В. М., Панов Т. Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
5. *Bosio F., Meersseman L.* Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes // Acta Math. 2006. V. 197, N 1. P. 53–127.
6. *Sha J., Yang D.* Positive Ricci curvature on compact simply connected 4-manifolds // Differential geometry. Part 3: Riemannian geometry. Proc. Symp. Pure Math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. V. 54, Part 3. P. 529–538.
7. *Базайкин Я. В., Матвиенко И. В.* О четырехмерных T^2-многообразиях положительной кривизны Риччи // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 973–980.
8. *Davis M. W., Januszkiewicz T.* Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. V. 62, N 2. P. 417–451.
9. *Gitler S., Lopez de Medrano S.* Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums. At: arXiv:0901.2580v2 [math.GT]
10. *Calabi E.* Metriques kahleriennes et fibres holomorphes // Annales Sci. Éc. Norm. Supér. IV Sér. 1979. V. 12, N 2. P. 269–294.
11. *Базайкин Я. В.* О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии Spin(7) // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.
12. *Cheeger J.* Some examples of manifolds of nonnegative curvature // J. Differ. Geometry. 1973. V. 8, N 4. P. 623–628.
13. *Poor W. A.* Some exotic spheres with positive Ricci curvature // Math. Ann. 1975. Bd 216, Hetz 3. S. 245–252.
14. *Bérard-Bergery L.* Certains fibre's á courbure de Ricci positive // C. R. Math., Sci. Acad. Sci. Paris. Sér. A, B. 1978. V. 286, N 20. P. 929–931.
15. *Nash J. C.* Positive Ricci curvature on fibre bundles // J. Differ. Geometry. 1979. V. 14, N 2. P. 241–254.
16. *Gilkey P. B., Park J., Tuschmann W.* Invariant metrics of positive Ricci curvature on principal bundles // Math. Z. 1998. Bd 227, Heft 3. S. 455–463.
17. *Gao L. Zh.* The construction of negatively Ricci curved manifolds // Math. Ann. 1985. Bd 271, Heft 2. S. 185–208.
18. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

Статья поступила 7 октября 2010 г.

Базайкин Ярослав Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bazaikin@math.nsc.ru

Матвиенко Иван Викторович
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
ivan.matvienko@gmail.com