*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1*

*УДК 517.51*

# ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ ЧИСЕЛ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТИПА СТИЛТЬЕСА

**Е. П. Ушакова**

**Аннотация.** Получены двусторонние оценки норм Шаттена — фон Неймана для самосопряженного преобразования типа Стилтьеса в пространстве суммируемых с квадратом функций.

**Ключевые слова:** интегральный оператор, пространство Лебега, ограниченность, компактность, сингулярные числа.

## Введение

Пусть оператор $T : H \to H$, где $H$ — сепарабельное гильбертово пространство, компактен. Собственные значения преобразования $|T| = (T^*T)^{1/2}$ называются *сингулярными числами* (или $s$-*числами*) оператора $T$ и обозначаются через $s_n(T)$ (см. [1, гл. 2, § 2] или [2, гл. 1, § 1.b]). Известно [1, гл. 2, § 2], что $s$-числа самосопряженного оператора $T : H \to H$ совпадают с абсолютными значениями его собственных чисел.

Компактные операторы $T : H \to H$, удовлетворяющие условию

$$\|T\|_{\mathbf{S}_p} := \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n^p(T)\Big)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty,$$

образуют идеалы Шаттена — фон Неймана $\mathbf{S}_p$. При этом величина $\|T\|_{\mathbf{S}_p}$ является (квази)нормой симметрического идеала $\mathbf{S}_p$. Символом $\mathbf{S}_\infty$ принято обозначать идеал всех компактных в $H$ операторов.

Пусть $v \geq 0$ — локально интегрируемая на $[0, \infty)$ весовая функция и $H$ совпадает с пространством $L^2 := L^2[0, \infty)$ всех измеримых по Лебегу функций $f$ на $[0, \infty)$ таких, что

$$\|f\|_2 := \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < \infty.$$

В настоящей работе в качестве $T$ рассматривается самосопряженный интегральный оператор типа преобразования Стилтьеса:

$$\mathscr{S}_\lambda f(x) := v(x)\int\limits_0^\infty \frac{f(y)v(y)\,dy}{x^\lambda + y^\lambda}, \quad x > 0, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 07–01–00054, 09–01–98516–р_восток_а) и ДВО РАН (код проекта 09–II–СО–01–003).

действующий из $L^2$ в $L^2$. Не ограничивая общности, мы полагаем $\lambda \geq 0$ в определении $\mathscr{S}_\lambda$, так как случай $\lambda \leq 0$ сводится к (1) заменой $\tilde{v}(x) = x^\lambda \cdot v(x)$.

Операторы типа $\mathscr{S}_\lambda$ изучались в работах [3–7], где найдены различные по форме необходимые и достаточные условия их ограниченности в пространствах суммируемых функций. Один из первых критериев ограниченности для $\mathscr{S}_\lambda$ получен Андерсеном [3]. Из него, в частности, следует двусторонняя оценка

$$\alpha_{\mathscr{S}} \cdot A_{\mathscr{S}} \leq \|\mathscr{S}_\lambda\|_{L^2\to L^2} \leq \beta_{\mathscr{S}} \cdot A_{\mathscr{S}} \tag{2}$$

нормы $\|\mathscr{S}_\lambda\|_{L^2\to L^2}$ функционалом

$$A_{\mathscr{S}} := \sup_{t>0} t^\lambda \left( \int_0^\infty \frac{v^2(y)\,dy}{(t^\lambda + y^\lambda)^2} \right)$$

с некоторыми константами $\alpha_{\mathscr{S}}$ и $\beta_{\mathscr{S}}$, зависящими, быть может, только от параметра $\lambda$.

На конусе неотрицательных функций $\mathscr{S}_\lambda$ эквивалентен сумме $\mathscr{H} + \mathscr{H}^*$ интегрального оператора Харди

$$\mathscr{H} f(x) := \frac{v(x)}{x^\lambda} \int_0^x f(y)v(y)\,dy \tag{3}$$

и двойственного к нему преобразования

$$\mathscr{H}^* f(x) := v(x) \int_x^\infty \frac{f(y)v(y)\,dy}{y^\lambda}.$$

Поэтому некоторые из свойств (1) могут быть исследованы через оператор (3), который по сравнению с $\mathscr{S}_\lambda$ изучен намного лучше. Ниже приведены критерии ограниченности и компактности $\mathscr{S}_\lambda$ в $L^2$, вытекающие из аналогичных свойств оператора $\mathscr{H}$.

**Теорема 1** [8, 9]. *Оператор $\mathscr{S}_\lambda$ ограничен из $L^2$ в $L^2$, если и только если*

$$A_{\mathscr{H}} := \sup_{t>0} A_{\mathscr{H}}(t) := \sup_{t>0} \left( \int_t^\infty \frac{v^2(x)\,dx}{x^{2\lambda}} \right)^{1/2} \left( \int_0^t v^2(y)\,dy \right)^{1/2} < \infty,$$

*где*

$$\alpha_{\mathscr{H}} \cdot A_{\mathscr{H}} \leq \|\mathscr{S}_\lambda\|_{L^2\to L^2} \leq \beta_{\mathscr{H}} \cdot A_{\mathscr{H}}$$

*с некоторыми константами $\alpha_{\mathscr{H}} = \alpha_{\mathscr{H}}(\lambda)$ и $\beta_{\mathscr{H}} = \beta_{\mathscr{H}}(\lambda)$. Кроме того, $\mathscr{S}_\lambda$ компактен из $L^2$ в $L^2$ в том и только в том случае, если $A_{\mathscr{H}} < \infty$ и $\lim\limits_{t\to 0} A_{\mathscr{H}}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} A_{\mathscr{H}}(t) = 0$.*

С другой стороны, оператор $\mathscr{S}_\lambda$ можно представить в виде композиции

$$\mathscr{S}_\lambda = \mathscr{L}^* \mathscr{L} \tag{4}$$

двойственных друг другу интегральных преобразований типа Лапласа

$$\mathscr{L} f(x) := \int_0^\infty e^{-xy^\lambda} f(y)v(y)\,dy \tag{5}$$

и

$$\mathscr{L}^* g(y) := v(y) \int_0^\infty e^{-xy^\lambda} g(x)\, dx.$$

Необходимые и достаточные условия выполнения $(L^2 - L^2)$-неравенства для $\mathscr{L}$ на подклассе $f \geq 0$ получены в [7, теорема 3] (см. также [10]). Вместе с результатом (2) в силу (4) они влекут следующий критерий $(L^2 - L^2)$-ограниченности для $\mathscr{L}$.

**Теорема 2.** *Оператор $\mathscr{L} : L^2 \to L^2$ ограничен тогда и только тогда, когда $A_{\mathscr{L}} < \infty$, где*

$$A_{\mathscr{L}} := \sup_{t>0} A_{\mathscr{L}}(t) := \sup_{t>0} t^{-\lambda/2} \left( \int_0^t v^2(y)\, dy \right)^{1/2}$$

*и*

$$\alpha_{\mathscr{L}} \cdot A_{\mathscr{L}} \leq \|\mathscr{L}\|_{L^2 \to L^2} \leq \beta_{\mathscr{L}} \cdot A_{\mathscr{L}}$$

*с некоторыми константами $\alpha_{\mathscr{L}} = \alpha_{\mathscr{L}}(\lambda)$, $\beta_{\mathscr{L}} = \beta_{\mathscr{L}}(\lambda)$.*

В силу двойственности и (4), а также на основе результатов теоремы 2 ограниченность оператора (1) может быть гарантирована конечностью более простого, чем $A_{\mathscr{S}}$ или $A_{\mathscr{H}}$, функционала $A_{\mathscr{L}}$.

**Следствие 1.** *Оператор $\mathscr{S}_\lambda$ действует из $L^2$ в $L^2$ тогда и только тогда, когда $A_{\mathscr{L}} < \infty$, где $\|\mathscr{S}_\lambda\|_{L^2 \to L^2} \approx A^2_{\mathscr{L}}$.*

Представление (4) позволяет изучить и некоторые другие свойства $\mathscr{S}_\lambda$, используя свойства $\mathscr{L}$. А именно, в § 1 настоящей работы найден новый по сравнению с результатом теоремы 1 критерий компактности для $\mathscr{S}_\lambda$ (следствие 2). Основной результат работы представлен в § 2 (теорема 5). Он содержит необходимые и достаточные условия принадлежности (1) идеалам Шаттена — фон Неймана $\mathbf{S}_p$ для $0 < p < \infty$. Доказательства утверждений опираются на оригинальные методы и приемы из известных работ [11–14].

Краткий анонс результатов статьи опубликован в [15].

На протяжении всей работы произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношения типа $A \ll B$ подразумевают неравенство $A \leq cB$, выполненное с некоторой константой $c$, зависящей, возможно, только от параметра $\lambda$. Будем писать $A \approx B$ вместо $A \ll B \ll A$ или $A = cB$. Символ $\mathbb{Z}$ применяется для обозначения множества целых, $\mathbb{N}$ — натуральных чисел, а $\chi_E$ — характеристическая функция (индикатор) множества $E \subset [0, \infty)$. Кроме того, мы используем символы $:=$ и $=:$ для определения новых величин.

## § 1. Компактность

Нам потребуется следующее утверждение, вытекающее из [16, теорема 5.10] для линейных регулярных интегральных операторов.

**Предложение 1.** *Пусть функция $k(x, y) \geq 0$ измерима на $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Предположим, что интегральный оператор*

$$Kf(x) := \int_0^\infty k(x, y) f(y)\, dy$$

*компактен из* $L^2$ *в* $L^2$, *а оператор*

$$K_1 f(x) := \int_0^\infty k_1(x,y) f(y)\, dy$$

*такой, что выполнено неравенство*

$$\bigl|K_1 f(x)\bigr| \le K|f|(x).$$

*Тогда* $K_1 : L^2 \to L^2$ *тоже компактен.*

Критерий компактности для оператора $\mathscr{L} : L^2 \to L^2$ представлен в следующей теореме.

**Теорема 3.** *Пусть* $v \in L^2_{\mathrm{loc}}$. *Оператор* $\mathscr{L} : L^2 \to L^2$ *компактен, если и только если* $A_{\mathscr{L}} < \infty$ *и* $\lim\limits_{t\to 0} A_{\mathscr{L}}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} A_{\mathscr{L}}(t) = 0$.

Доказательство. Обозначим

$$\mathbb{A}^2_{\mathscr{L}} := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k^2 := \sup_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-\lambda k} \int_{2^{k-1}}^{2^k} v^2(y)\, dy. \tag{6}$$

Заметим, что $A_{\mathscr{L}} \approx \mathbb{A}_{\mathscr{L}}$. Действительно, если $2^{k-1} \le t \le 2^k$, то

$$\begin{aligned} A_{\mathscr{L}}(t)^2 \le 2^{-\lambda(k-1)} \int_0^{2^k} v^2(y)\, dy = 2^\lambda \cdot 2^{-\lambda k} \sum_{m\le k} \int_{2^{m-1}}^{2^m} v^2(y)\, dy \\ \le 2^\lambda \cdot \sup_{m\le k} \sigma_m^2 \cdot \sum_{m\le k} 2^{\lambda(m-k)} \le \frac{2^{2\lambda}}{2^\lambda - 1}\, \mathbb{A}^2_{\mathscr{L}}. \end{aligned}$$

Отсюда $A_{\mathscr{L}} \ll \mathbb{A}_{\mathscr{L}}$. Обратно, для любого $k$

$$\sigma_k^2 \le 2^{-\lambda k} \int_0^{2^k} v^2(y)\, dy \le A^2_{\mathscr{L}}$$

и, следовательно, $\mathbb{A}_{\mathscr{L}} \le A_{\mathscr{L}}$. Кроме того, условия $\lim\limits_{t\to 0} A_{\mathscr{L}}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} A_{\mathscr{L}}(t) = 0$ эквивалентны $\lim\limits_{|k|\to\infty} \sigma_k = 0$.

Необходимость. Если $\mathscr{L}$ компактен, то он ограничен из $L^2$ в $L^2$ и $\mathbb{A}_{\mathscr{L}} < \infty$ (см. теорему 2). В силу условий настоящей теоремы $\int_{2^{k-1}}^{2^k} v^2(z)\, dz < \infty$ для всех $|k| \le N < \infty$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\int_{2^{k-1}}^{2^k} v^2(z)\, dz > 0$. Положим

$$f_k(y) = \chi_{(2^{k-1},2^k)} v(y) \left( \int_{2^{k-1}}^{2^k} v^2(z)\, dz \right)^{-1/2}.$$

Согласно неравенству Гёльдера для любой фиксированной функции $g \in L^2$ выполнено

$$\left|\int_0^\infty f_k(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \to 0, \quad |k| \to \infty,$$

т. е. последовательность $\{f_k\}$ слабо сходится к 0. В силу того, что $\mathscr{L}$ компактен, имеем

$$\lim_{|k|\to\infty} \|\mathscr{L} f_k\|_2 = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{|k|\to\infty} \sigma_k = 0$, так как

$$\begin{aligned}\|\mathscr{L} f_k\|_2^2 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy^\lambda} f_k(y)v(y)\,dy\right)^2 dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} e^{-xy^\lambda}\; v^2(y)\left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} v^2(z)\,dz\right)^{-1/2} dy\right)^2 dx \\ &\ge \int_0^\infty e^{-x\cdot 2^{\lambda k}}\,dx \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} v^2(y)\,dy\right) = \sigma_k^2.\end{aligned}$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Отметим, что условий настоящей теоремы ($A_{\mathscr{L}} < \infty$ и $\lim\limits_{t\to 0} A_{\mathscr{L}}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} A_{\mathscr{L}}(t) = 0$) достаточно для $(L^2 - L^2)$-компактности оператора

$$Hf(x) := x^{-\frac{\lambda+1}{2}} \int_0^x f(y)v(y)\,dy.$$

Тогда по теореме Шаудера двойственный оператор

$$H^*g(y) := v(y)\int_x^\infty x^{-\frac{\lambda+1}{2}} g(x)\,dx$$

тоже компактен из $L^2$ в $L^2$. Это, в свою очередь, влечет компактность $H^*H : L^2 \to L^2$. Имеем

$$\begin{aligned}(H^*H)|f|(x) &= v(x)\int_x^\infty \frac{dt}{t^{\lambda+1}} \int_0^t |f(y)|v(y)\,dy = \frac{v(x)}{\lambda\cdot x^\lambda}\int_0^x |f(y)|v(y)\,dy \\ &+ \frac{v(x)}{\lambda}\int_x^\infty \frac{|f(y)|v(y)\,dy}{y^\lambda} \ge \frac{1}{\lambda}\mathscr{S}_\lambda|f|(x) \ge \frac{1}{\lambda}|\mathscr{S}_\lambda f(x)|.\end{aligned}$$

Отсюда согласно предложению 1 оператор $\mathscr{S}_\lambda : L^2 \to L^2$ тоже компактен.

Пусть $\{f_n\} \subset L^2$ — произвольная последовательность, слабо сходящаяся к 0. В силу компактности $\mathscr{S}_\lambda$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathscr{S}_\lambda f_n\|_2 = 0$. Тогда (4) влечет

$$\langle \mathscr{S}_\lambda f_n, f_n\rangle = \|\mathscr{L} f_n\|_2^2 \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $L^2$. Так как последовательность $\{f_n\}$ произвольна, получаем, что $\mathscr{L}\colon L^2 \to L^2$ компактен. Доказательство завершено.

Из теоремы 3 вытекает критерий компактности для оператора $\mathscr{S}_\lambda$.

**Следствие 2.** *Пусть $v \in L^2_{\mathrm{loc}}$. Оператор $\mathscr{S}_\lambda : L^2 \to L^2$ компактен тогда и только тогда, когда $A_{\mathscr{L}} < \infty$ и $\lim\limits_{t\to 0} A_{\mathscr{L}}(t) = \lim\limits_{t\to\infty} A_{\mathscr{L}}(t) = 0$.*

## § 2. Идеалы Шаттена — фон Неймана

В силу представления (4) оператор $\mathscr{S}_\lambda$ положителен. Следовательно, его собственные числа неотрицательны и совпадают с $s_n(\mathscr{S}_\lambda)$. Кроме того,

$$s_n^2(\mathscr{L}) = \lambda_n(\mathscr{S}_\lambda). \tag{7}$$

Определение 1. Пусть $0 < p < \infty$. К классу $X_p$ отнесем все измеримые весовые функции $v$ на $[0, \infty)$ такие, что

$$\|v\|_{X_p} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k^p\Big)^{1/p} < \infty,$$

где $\sigma_k$ определено в (6). Если $p = \infty$, то $X_\infty$ — множество функций $v$ таких, что $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k < \infty$.

Известно [11], что $X_p$ является (квази)банаховым пространством с (квази)нормой $\|v\|_{X_p}$, причем

$$\|v\|_{X_p} \approx \left( \int_0^\infty x^{-(\lambda p/2+1)} \left( \int_0^x |v(y)|^2\,dy \right)^{p/2} dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Следующий результат связывает принадлежность весовой функции $v \in X_p$ с включением $\mathscr{L} \in \mathbf{S}_p$.

**Теорема 4.** *Пусть оператор $\mathscr{L} : L^2 \to L^2$ компактен.*
(i) *Если $\mathscr{L} \in \mathbf{S}_p$, $2 \le p \le \infty$, то $v \in X_p$, $2 \le p \le \infty$.*
(ii) *Если $\mathscr{L} \in \mathbf{S}_p$ для $0 < p \le 2$, то $v \in X_2$.*
(iii) *Если $v \in X_p$, $0 < p \le \infty$, то $\mathscr{L} \in \mathbf{S}_p$.*

Доказательство. (i) Предположим, что $\mathscr{L} \in \mathbf{S}_p$. В силу (7) справедливо равенство

$$\|\mathscr{L}\|^2_{\mathbf{S}_p} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n^p(\mathscr{L})\Big)^{2/p} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n^{p/2}(\mathscr{S}_\lambda)\Big)^{2/p} = \|\mathscr{S}_\lambda\|_{\mathbf{S}_{p/2}}.$$

Далее, в силу [1, гл. 3, § 7.5] имеем

$$\|\mathscr{S}_\lambda\|^{p/2}_{\mathbf{S}_{p/2}} \ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle \mathscr{S}_\lambda f_k, f_k\rangle|^{p/2}, \quad 1 \le p/2 < \infty, \tag{8}$$

где $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — ортонормированная система в $L^2$. Подставляя функцию

$$f_k(y) = \left( \int_{2^{k-1}}^{2^k} |v(z)|^2\,dz \right)^{-1/2} v(y)\chi_{[2^{k-1},2^k]}(y)$$

в правую часть неравенства (8), получаем утверждение (i):

$$\|\mathscr{S}_\lambda\|^{p/2}_{\mathbf{S}_{p/2}} \ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( \int_{2^{k-1}}^{2^k} f_k(x)v(x) \int_{2^{k-1}}^{2^k} \frac{f_k(y)v(y)\,dy}{x^\lambda + y^\lambda}\,dx \right)^{p/2}$$
$$= 2^{p/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left( \int_{2^{k-1}}^{2^k} f_k(x)v(x) \int_{2^{k-1}}^{x} \frac{f_k(y)v(y)\,dy}{x^\lambda + y^\lambda}\,dx \right)^{p/2} \ge 2^{-p/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k^p.$$

Утверждение (ii) является следствием (i) и [1, гл. 3, § 7.2].

(iii) Пусть $v \in X_p$, $0 < p \le \infty$. Для $0 < p \le 1$ справедливо неравенство

$$\|\mathscr{L}\|^p_{\mathbf{S}_p} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\mathscr{L}_{D_k}\|^p_{\mathbf{S}_p}, \tag{9}$$

где $D_k := \{(x,y) : x \in (0,\infty),\ 2^{k-1} \le y \le 2^k\}$ и $\mathscr{L}_{D_k} f := \mathscr{L}(f\chi_{D_k})$ (см. [17, теорема 2.8]). Запишем

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{D_k} f(x) &= \int_{2^{k-1}}^{2^k} f(y)v(y)\left(\int_y^\infty d_z(-e^{-xz^\lambda})\right) dy \\
&= \int_{2^{k-1}}^{2^k} f(y)v(y)\left(\int_y^{2^k} d_z(-e^{-xz^\lambda})\right) dy + \int_{2^{k-1}}^{2^k} f(y)v(y)\left(\int_{2^k}^{\infty} d_z(-e^{-xz^\lambda})\right) dy \\
&= \int_{2^{k-1}}^{2^k} d_z(-e^{-xz^\lambda})\left(\int_{2^{k-1}}^{z} f(y)v(y)\,dy\right) + e^{-x2^{k\lambda}}\int_{2^{k-1}}^{2^k} f(y)v(y)\,dy \\
&= \lambda x\int_{2^{k-1}}^{2^k} z^{\lambda-1}e^{-xz^\lambda}\left(\int_{2^{k-1}}^{z} f(y)v(y)\,dy\right) dz + e^{-x2^{k\lambda}}\int_{2^{k-1}}^{2^k} f(y)v(y)\,dy \\
&=: R_kP_kf(x) + Q_kf(x).
\end{aligned} \tag{10}$$

Для нормы оператора $R_k : L^2(2^{k-1}, 2^k) \to L^2$ вида

$$R_kf(x) := \lambda x \int_{2^{k-1}}^{2^k} z^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-xz^\lambda} f(z)\,dz$$

в силу [7, теорема 1] справедлива оценка

$$\|R_k\| := \|R_k\|_{L^2(2^{k-1},2^k)\to L^2} \approx \sup_{2^{k-1}<t<2^k} \sqrt{2\lambda}\,t^{-\lambda} = 2^\lambda\sqrt{2\lambda}\cdot 2^{-k\lambda}. \tag{11}$$

Отображения $P_k : L^2(2^{k-1}, 2^k) \to L^2(2^{k-1}, 2^k)$ и $Q_k : L^2(2^{k-1}, 2^k) \to L^2$ в (10) заданы следующими формулами:

$$P_kf(z) := z^{\frac{\lambda-1}{2}} \int_{2^{k-1}}^{z} f(y)v(y)\,dy, \quad Q_kf(x) := e^{-x2^{k\lambda}} \int_{2^{k-1}}^{2^k} f(y)v(y)\,dy.$$

При этом $Q_k$ является оператором ранга 1 с нормой

$$\|Q_k\|_{L^2(2^{k-1},2^k)\to L^2} \approx \left(\int_0^\infty e^{-x2^{k\lambda+1}}\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} |v(y)|^2\,dy\right)^{1/2} \approx \sigma_k. \tag{12}$$

Рассмотрим $P_k$. Пусть $T_k$ — интегральный оператор вида

$$T_kf(z) := \chi_{[2^{k-1},2^k]}(z) z^{\frac{\lambda-1}{2}} \int_{2^{k-1}}^{2^k} f(y)v(y)\,dy.$$

Ранг $T_k$ равен 1, и $\|T_k\|_{\mathbf{S}_p} = \|T_k\|_{L^2(2^{k-1},2^k)\to L^2(2^{k-1},2^k)} \approx 2^{k\lambda}\cdot\sigma_k$. Кроме того, $P_k = T_k\mathscr{P}$, где

$$\mathscr{P}f(z) := \chi_{[2^{k-1},z]}f$$

для $2^{k-1}\le z\le 2^k$ и

$$\|\mathscr{P}\| := \|\mathscr{P}\|_{L^2(2^{k-1},2^k)\to L^2(2^{k-1},2^k)} = 1.$$

Отсюда

$$s_n(R_kP_k) = s_n(R_kT_k\mathscr{P}) \le \|R_k\|_{L^2(2^{k-1},2^k)\to L^2} s_n(T_k)\|\mathscr{P}\|_{L^2(2^{k-1},2^k)\to L^2(2^{k-1},2^k)} \tag{13}$$

и в силу (11) имеем

$$\|R_kP_k\|_{\mathbf{S}_p} = \|R_kT_k\mathscr{P}\|_{\mathbf{S}_p} \le \|R_k\|\|T_k\|_{\mathbf{S}_p}\|\mathscr{P}\| \approx \sigma_k. \tag{14}$$

Из (9)–(14) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|\mathscr{L}\|^p_{\mathbf{S}_p} \le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n^p(\mathscr{L}_{D_k}) &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n^p(R_kP_k) + \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n^p(Q_k)\Big)\\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\|R_k\|^p\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n^p(T_k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n^p(Q_k) \ll \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k^p.\end{aligned}$$

Последняя оценка влечет $\mathscr{L}\in\mathbf{S}_p$ для $0<p\le 1$.

Осталось доказать утверждение (iii) в случае $1<p\le\infty$. Так как $v\in X_\infty$ и $\mathscr{L}\in\mathbf{S}_\infty$, то $\|\mathscr{L}\|_{X_\infty\to\mathbf{S}_\infty}<\infty$ (см. теорему 2). С другой стороны, мы показали, что оператор $\mathscr{L}: L^2\to L^2$ ограничен из $X_1$ в $\mathbf{S}_1$. Таким образом, требуемый результат следует по интерполяционной теореме Рисса — Торина. Теорема доказана.

Теперь в силу (4) получаем основной результат работы.

**Теорема 5.** *Пусть оператор $\mathscr{S}_\lambda$ компактен из $L_2$ в $L_2$.*
(i) *Если $\mathscr{S}_\lambda$ принадлежит классу $\mathbf{S}_p$ для $1\le p\le\infty$, то $v\in X_p$.*
(ii) *Если $\mathscr{S}_\lambda$ является оператором класса $\mathbf{S}_p$ для $0<p\le 1$, то $v\in X_1$.*
(iii) *Если $v\in X_p$, $0<p\le\infty$, то $\mathscr{S}_\lambda$ принадлежит $\mathbf{S}_p$.*

Автор благодарен рецензенту за ценные замечания, позволившие устранить некоторые неточности и улучшить изложение материала статьи.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
2. *König H.* Eigenvalue distribution of compact operators. Basel; Boston; Stuttgart: Birkhäuser, 1986.
3. *Andersen K. F.* Weighted inequalities for the Stieltjes transformation and Hilbert's double series // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A. 1980. V. 86, N 1–2. P. 75–84.
4. *Erdélyi A.* The Stieltjes transformation on weighted $L^p$ spaces // Appl. Anal. 1978. V. 7. P. 213–219.
5. *Перссон Л. Е., Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с монотонными ядрами // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 1. С. 11–14.
6. *Sinnamon G.* A note on the Stieltjes transformation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A. 1988. V. 110, N 1–2. P. 73–78.
7. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Весовые оценки для интегральных операторов на полуоси с монотонными ядрами // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1378–1390.
8. *Muckenhoupt B.* Hardy's inequality with weights // Studia Math. 1972. V. 44. P. 31–38.

**9.** *Riemenschneider S. D.* Compactness of a class of Volterra operators // Tohoku Math. J. 1974. V. 26. P. 385–387.
**10.** *Bloom S.* Hardy integral estimates for the Laplace transform // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116, N 2. P. 417–426.
**11.** *Aleksandrov A. B., Janson S., Peller V. V., Rochberg R.* An interesting class of operators with unusual Schatten–von Neumann behavior // Function spaces, interpolation theory and related topics: Proc. Int. Conf. in honor of Jaak Peetre on his 65th birthday (Lund, Sweden, 17–22 Aug. 2000). Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2002. P. 61–149.
**12.** *Edmunds D. E., Stepanov V. D.* On the singular numbers of certain Volterra integral operators // J. Funct. Anal. 1995. V. 134, N 1. P. 222–246.
**13.** *Nowak K.* Schatten ideal behavior of a generalized Hardy operator // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118, N 2. P. 479–483.
**14.** *Stepanov V. D.* On the lower bounds for Schatten–von Neumann norms of certain Volterra integral operators // J. London Math. Soc. 2000. V. 61, N 2. P. 905–922.
**15.** *Ушакова Е. П.* О сингулярных числах обобщенного преобразования Стилтьеса // Докл. РАН. 2010. Т. 431, № 2. С. 175–176.
**16.** *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
**17.** *McCarthy C. A.* $C_p$ // Israel J. Math. 1967. V. 5. P. 249–271.

*Статья поступила 17 марта 2010 г.*

Ушакова Елена Павловна
Вычислительный центр Дальневосточного отд-ния РАН,
ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск 680000
elenau@inbox.ru