Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 517.984

О ЧИСЛЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА

Т. Х. Расулов

Аннотация. Рассматривается матричный оператор H в пространстве Фока. Доказана конечность числа отрицательных собственных значений оператора H, если соответствующая обобщенная модель Фридрихса имеет нулевое собственное значение ($0 = \min \sigma_{\text{ess}}(H)$). Доказано также, что оператор H имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, накапливающихся вблизи нуля (эффект Ефимова), если обобщенная модель Фридрихса имеет резонанс с нулевой энергией. Получена асимптотика для числа отрицательных собственных значений оператора H, лежащих ниже z, при $z \to -0$.

Ключевые слова: эффект Ефимова, пространство Фока, резонанс с нулевой энергией, класс Гильберта — Шмидта, принцип Бирмана — Швингера, дискретный спектр.

1. Введение

Исследование дискретных спектров операторов Шредингера и гамильтонианов (матричных операторов) в пространстве Фока является наиболее интенсивно изучаемым объектом в теории операторов. Одним из важных вопросов в спектральном анализе таких операторов является изучение бесконечности множества собственных значений, лежащих вне существенного спектра, т. е. существование эффекта Ефимова. Этот эффект впервые обнаружен В. Н. Ефимовым [1] для трехчастичного непрерывного оператора Шредингера. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова в непрерывном случае проведено в работе [2], затем в работах [3, 4] и др.

Основным результатом работы [3] (см. также [4]) является асимптотика вида $\mathscr{U}_0|\ln|z||$ для числа собственных значений трехчастичного непрерывного оператора Шредингера, лежащих левее z, $z < 0$, где коэффициент $\mathscr{U}_0$ не зависит от двухчастичных потенциалов v_α и является положительной функцией частных $m_1/m_2, m_2/m_3$ масс трех частиц.

Для системы трех частиц на решетке существование эффекта Ефимова обнаружено в работах [5, 6], строгое доказательство изложено в работах [7, 8], а затем в работах [9–12], причем в статьях [10–12] получена аналогичная непрерывному случаю асимптотика дискретного спектра системы трех частиц на решетке.

Отметим, что в упомянутых работах изучено наличие эффекта Ефимова для системы с сохраняющимся ограниченным числом частиц. Однако в задачах физики твердого тела, квантовой теории поля, статистической физики

Работа поддержана Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), грант N TR368/6–2.

и теории химических реакций возникают системы с несохраняющимся ограниченным числом частиц. Изучение спектральных свойств таких систем сводится к изучению спектральных свойств самосопряженных матричных операторов, действующих в «N-частичном обрезанном» подпространстве $\mathscr{H}^{(N)}$ фоковского пространства [13–15].

В настоящей работе рассматривается матричный оператор H, действующий в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}^{(3)}$, в случае специального вида функции w_2, являющейся параметром оператора H_{22} (см. формулы (2.2), (2.3)).

Получены следующие результаты.

1. Доказана конечность множества отрицательных собственных значений оператора H, если обобщенная модель Фридрихса имеет нулевое собственное значение, при этом $0 = \min \sigma_{\text{ess}}(H)$.

2. Доказана бесконечность множества отрицательных собственных значений оператора H, накапливающихся вблизи нуля (эффект Ефимова), если обобщенная модель Фридрихса имеет резонанс с нулевой энергией, и получена асимптотика дискретного спектра оператора H в зависимости от числа точек $n > 1$, в которых параметр-функция w_2 имеет невырожденный минимум.

Следует отметить, что в работах [16–18] доказано существование эффекта Ефимова для оператора H в случае, когда параметр-функция w_2 имеет единственный невырожденный минимум, причем в статье [16] получена аналогичная непрерывному и решеточному оператору Шредингера асимптотика дискретного спектра оператора H.

2. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $\mathbf{T}^3$ — трехмерный тор, т. е. куб $(-\pi, \pi]^3$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе $\mathbf{T}^3$ рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в $\mathbf{R}^3$ по модулю $(2\pi\mathbf{Z})^3$, где $\mathbf{R}$ и $\mathbf{Z}$ — множества вещественных и целых чисел соответственно.

Пусть $\mathbf{C}$ — одномерное комплексное пространство, $L_2(\mathbf{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $\mathbf{T}^3$, $L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbf{T}^3)^2$ и симметричных относительно перестановки двух переменных.

Обозначим через $\mathscr{H}^{(3)}$ прямую сумму пространств $\mathscr{H}_0 = \mathbf{C}$, $\mathscr{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^3)$ и $\mathscr{H}_2 = L_2^{\mathrm{s}}((\mathbf{T}^3)^2)$, т. е. $\mathscr{H}^{(3)} = \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$.

Рассмотрим матричный оператор H, действующий в $\mathscr{H}^{(3)}$ как

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где матричные элементы $H_{kl} : \mathscr{H}_l \to \mathscr{H}_k$, $k, l = 0, 1, 2$, определяются по формулам

$$(H_{00}f_0)_0 = w_0 f_0, \quad (H_{01}f_1)_0 = \int v_1(t) f_1(t)\, dt, \quad (H_{10}f_0)_1(p) = v_1(p) f_0,$$

$$(H_{11}f_1)_1(p) = w_1(p) f_1(p), \quad (H_{12}f_2)_1(p) = \int v_2(t) f_2(p, t)\, dt,$$

$$(H_{21}f_1)_2(p,q) = \frac{1}{2}(v_2(p)f_1(q) + v_2(q)f_1(p)), \quad (H_{22}f_2)_2(p,q) = w_2(p,q)f_2(p,q).$$

Здесь $f_k \in \mathscr{H}_k$, $k = 0, 1, 2$, w_0 — фиксированное вещественное число, $v_k(\cdot)$, $k = 1, 2$, — вещественнозначные аналитические функции на $\mathbf{T}^3$, функция $v_2(\cdot)$ четна по каждой переменной в отдельности на $\mathbf{T}^1$, а функции $w_1(\cdot)$ и $w_2(\cdot,\cdot)$ определены по формулам

$$w_1(p) = \varepsilon(p) + \lambda, \quad w_2(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p+q) + \varepsilon(q), \tag{2.2}$$

$$\varepsilon(p) = \sum_{k=1}^{3}(1 - \cos mp^{(k)}), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbf{T}^3, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{2.3}$$

где λ — фиксированное положительное число, а $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

Операторы H_{01} и H_{12} называются *операторами уничтожения*, а операторы H_{10} и H_{21} — *операторами рождения.*

Подчеркнем, что в данной работе рассматривается случай, когда число рождений и уничтожений частиц равно единице. Это, в свою очередь, означает, что $H_{kl} = 0$ при $|k - l| > 1$.

Можно легко проверить, что матричный оператор H, определенный по формуле (2.1), является ограниченным и самосопряженным в $\mathscr{H}^{(3)}$.

Известно, что в импульсном представлении трехчастичный дискретный оператор Шредингера $\widehat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^3)$. После выделения полного квазиимпульса системы $K \in \mathbf{T}^3$ оператор $\widehat{H}$ разлагается в прямой операторный интеграл (см., например, [7–12])

$$\widehat{H} = \int \oplus \widehat{H}(K)\, dK,$$

где ограниченный самосопряженный оператор $\widehat{H}(K)$, $K \in \mathbf{T}^3$, действует в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma_K)$ ($\Gamma_K \subset (\mathbf{T}^3)^2$ — некоторое многообразие).

Отметим, что матричный оператор H обладает основными спектральными свойствами трехчастичного дискретного оператора Шредингера $\widehat{H}(0)$, где роль двухчастичного дискретного оператора Шредингера играет обобщенная модель Фридрихса [16, 17]. По этой причине гильбертово пространство $\mathscr{H}^{(3)}$ называется *трехчастичным обрезанным подпространством* фоковского пространства, а матричный оператор H — *гамильтонианом системы* с не более чем тремя частицами на решетке.

Для формулировки основного результата введем обобщенную модель Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, действующую в $\mathscr{H}^{(2)} \equiv \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1$ по правилу

$$h(p) = \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{10} & h_{11}(p) \end{pmatrix},$$

где операторы $h_{kk}(p) : \mathscr{H}_k \to \mathscr{H}_k$, $k = 0, 1$, $p \in \mathbf{T}^3$, и $h_{kl} : \mathscr{H}_l \to \mathscr{H}_k$, $k, l = 0, 1$, $k \neq l$, определяются по формулам

$$(h_{00}(p)f_0)_0 = w_1(p)f_0, \quad (h_{01}f_1)_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int v_2(t)f_1(t)\, dt,$$

$$(h_{10}f_0)_1(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2(q)f_0, \quad (h_{11}(p)f_1)_1(q) = w_2(p,q)f_1(q).$$

Очевидно, что оператор $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, ограничен и самосопряжен в $\mathscr{H}^{(2)}$.

Обозначим через $n \equiv n(m)$ число точек $(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $p_i = \bigl(p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, p_i^{(3)}\bigr)$, $q_j = \bigl(q_j^{(1)}, q_j^{(2)}, q_j^{(3)}\bigr)$, для которых

$$p_i^{(k)}, q_j^{(k)} \in \left\{0, \pm\frac{2}{m}\pi; \pm\frac{4}{m}\pi; \dots; \pm\frac{m'}{m}\pi\right\}, \quad k = 1, 2, 3,$$

причем $p_i \neq p_j$ и $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$; здесь

$$m' = \begin{cases} m-2, & \text{если } m \text{ четное,} \\ m-1, & \text{если } m \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Можно легко проверить, что функция $w_2(\cdot,\cdot)$ (соответственно $w_1(\cdot)$) имеет невырожденный минимум в точках $(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$ (соответственно $p_i \in \mathbf{T}^3$) и $n = (m'+1)^6$. Дополнительно будем предполагать, что $m \geq 3$ (если $m = 1, 2$, то $n = 1$, а в настоящей работе нам интересен случай $n > 1$).

Также можно показать, что функция $w_2(\cdot,\cdot)$ имеет максимум в точках вида $(P(s;m), P(s;m))$, где

$$P(s;m) = \left(\pm\frac{6s+2}{3m}\pi, \pm\frac{6s+2}{3m}\pi, \pm\frac{6s+2}{3m}\pi\right), \quad s \in \mathbf{Z} \cap \left(-\frac{3m+2}{6}, \frac{3m-2}{6}\right).$$

Значит, множество значений функции $w_2(\cdot,\cdot)$ совпадает с отрезком $[0, 27/2]$.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\mathrm{disc}}(\cdot)$ соответственно спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Следующая теорема [16–18] описывает местоположение существенного спектра оператора H.

Теорема 2.1. *Для существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ оператора H имеет место равенство*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \bigcup_{p \in \mathbf{T}^3} \sigma_{\mathrm{disc}}(h(p)) \cup [0; 27/2].$$

Определение 2.2. Множества $\bigcup\limits_{p \in \mathbf{T}^3} \sigma_{\mathrm{disc}}(h(p))$ и $[0; 27/2]$ называются *двухчастичной* и *трехчастичной ветвями существенного спектра* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ оператора H и обозначаются через $\sigma_{\mathrm{two}}(H)$ и $\sigma_{\mathrm{three}}(H)$ соответственно.

Замечание 2.3. Имеет место равенство $h(p_1) \equiv h(p_i)$, $i = \overline{2, \sqrt{n}}$ (отметим, что число $\sqrt{n}$ натуральное как корень из шестой степени некоторого натурального числа).

Пусть $C(\mathbf{T}^3)$ (соответственно $L_1(\mathbf{T}^3)$) — банахово пространство непрерывных (соответственно интегрируемых) функций, определенных на $\mathbf{T}^3$.

Определение 2.4. Говорят, что оператор $h(p_1)$ *имеет резонанс с нулевой энергией*, если число 1 является собственным значением оператора

$$(G\psi)(q) = \frac{v_2(q)}{4\lambda} \int \frac{v_2(t)\psi(t)\,dt}{\varepsilon(t)}, \quad \psi \in C(\mathbf{T}^3),$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ удовлетворяет условию $\psi(q_j) \neq 0$ при некотором $j \in \{1, \dots, \sqrt{n}\}$.

Заметим, что если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то решение уравнения $G\psi = \psi$ равно (с точностью до константы) функции $v_2(\cdot)$

(см. утверждение 2 леммы 3.2). Поэтому всюду в дальнейшем для определенности предположим, что если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то функция $v_2(\cdot)$ отлична от нуля только в n_0, $1 < n_0 \le \sqrt{n}$, точках множества $\{q_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}}$. Далее, не нарушая общности (в противном случае перенумеруем) предположим, что $v_2(q_j) \ne 0$ при $j = \overline{1, n_0}$. Так как $\{p_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}} \equiv \{q_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}}$, положим $p_j = q_j$, $j = \overline{1, n_0}$.

Отметим, что в определении 2.4 требование наличия собственного значения $\mu = 1$ оператора G соответствует существованию решения уравнения $h(p_1)f = 0$, а из условия $\psi(q_j) \ne 0$ при некотором $j \in \{1, \dots, \sqrt{n}\}$ следует, что решение f этого уравнения не принадлежит пространству $\mathscr{H}^{(2)}$. Точнее, если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то элемент $f = (f_0, f_1)$, где

$$f_0 = \mathrm{const} \ne 0, \quad f_1(q) = -\frac{v_2(q) f_0}{2\sqrt{2}\varepsilon(q)}, \tag{2.4}$$

удовлетворяет уравнению $h(p_1)f = 0$ и $f_1 \in L_1(\mathbf{T}^3) \setminus L_2(\mathbf{T}^3)$ (см. утверждение 2 леммы 3.8).

Если оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение, то элемент $f = (f_0, f_1)$, где f_0 и f_1 определены по формуле (2.4), удовлетворяет уравнению $h(p_1)f = 0$ и $f_1 \in L_2(\mathbf{T}^3)$ (см. утверждение 1 леммы 3.8).

Обозначим через $\tau_{\mathrm{ess}}(H)$ нижнюю грань существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ оператора H и через $N(z)$ — число собственных значений (с учетом кратности) оператора H, лежащих левее точки z, $z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$.

Отметим, что если оператор $h(p_1)$ имеет либо резонанс с нулевой энергией либо нулевое собственное значение, то $\tau_{\mathrm{ess}}(H) = 0$, т. е. оператор $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, не имеет отрицательных собственных значений (см. лемму 3.3).

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2.5. 1. *Если оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение, то оператор H имеет конечное число отрицательных собственных значений.*

2. *Если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то оператор H имеет бесконечно много отрицательных собственных значений $E_1, \dots, E_n, \dots$, $\lim\limits_{n\to\infty} E_n = 0$. Более того, для функции $N(\cdot)$ имеет место равенство*

$$\lim_{z \to -0} \frac{N(z)}{|\ln|z||} = \frac{n_0^2 \gamma_0}{2\pi}, \tag{2.5}$$

где γ_0 — положительный корень уравнения

$$\gamma\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\,\frac{\pi\gamma}{2} = 8\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi\gamma}{6}. \tag{2.6}$$

Видно, что в силу равенства (2.5) бесконечность отрицательного дискретного спектра оператора H автоматически вытекает из положительности числа γ_0. Отметим также, что асимптотика (2.5) является новым результатом и что аналогичная асимптотика не была получена для трехчастичного оператора Шредингера на $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{Z}^3$.

3. Некоторые спектральные свойства $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$

В этом пункте мы изучаем некоторые спектральные свойства обобщенной модели Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, играющие важную роль при изучении дискретного спектра оператора H.

Пусть оператор $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, действует в $\mathscr{H}^{(2)}$ как

$$h_0(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}(p) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Оператор возмущения $h(p) - h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, оператора $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$. Известно, что

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(h_0(p)) = [m_2(p); M_2(p)],$$

где числа $m_2(p)$ и $M_2(p)$ определяются следующим образом:

$$m_2(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^3} w_2(p,q) = \varepsilon(p) + 2\sum_{k=1}^{3}\left(1 - \cos\frac{mp^{(k)}}{2}\right),$$

$$M_2(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^3} w_2(p,q) = \varepsilon(p) + 2\sum_{k=1}^{3}\left(1 + \cos\frac{mp^{(k)}}{2}\right).$$

Из последних фактов следует, что $\sigma_{\mathrm{ess}}(h(p)) = [m_2(p); M_2(p)]$.

При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^3$ определим регулярную в $\mathbf{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(h(p))$ функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$)

$$\Delta(p; z) = w_1(p) - z - \frac{1}{2}\int \frac{v_2^2(t)\, dt}{w_2(p,t) - z}.$$

Установим (см. [16, 17]) связь между собственными значениями оператора $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, и нулями функции $\Delta(p; \cdot)$, $p \in \mathbf{T}^3$.

Лемма 3.1. *При каждом фиксированном $p \in \mathbf{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет собственное значение $z \in \mathbf{C} \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(h(p))$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p; z) = 0$.*

Функция $w_2(\cdot,\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках $(p_i, q_j) \in (\mathbf{T}^3)^2$, $i, j = \overline{1, \sqrt{n}}$, а функция $v_2(\cdot)$ аналитическая на $\mathbf{T}^3$, поэтому существует конечный интеграл

$$\int \frac{v_2^2(t)\, dt}{w_2(p,t)}, \quad p \in \mathbf{T}^3.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега и равенства $\Delta(p_i; 0) = \Delta(p_1; 0)$, $i = \overline{2, \sqrt{n}}$, вытекает, что

$$\Delta(p_1; 0) = \lim_{p \to p_i} \Delta(p; 0), \quad i = \overline{1, \sqrt{n}}.$$

В следующей лемме даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы либо число $z = 0$ являлось собственным значением оператора $h(p_1)$, либо оператор $h(p_1)$ имел резонанс с нулевой энергией.

Лемма 3.2. 1. *Оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда $\Delta(p_1; 0) = 0$ и $v_2(q_j) = 0$, $j = \overline{1, \sqrt{n}}$.*

2. *Оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией тогда и только тогда, когда $\Delta(p_1;0)=0$ и $v_2(q_j)\neq 0$ при некотором $j\in\{1,\ldots,\sqrt{n}\}$.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение и $f=(f_0,f_1)\in\mathscr{H}^{(2)}$ — соответствующий собственный вектор. Тогда f_0 и f_1 удовлетворяют системе уравнений

$$\lambda f_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\int v_2(t)f_1(t)\,dt=0,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}v_2(q)f_0+2\varepsilon(q)f_1(q)=0. \tag{3.1}$$

Из (3.1) вытекает, что f_0 и f_1 имеют вид (2.4), и из первого уравнения получим, что $\Delta(p_1;0)=0$.

Теперь докажем, что $f_1\in L_2(\mathbf{T}^3)$ тогда и только тогда, когда $v_2(q_j)=0$, $j=\overline{1,\sqrt{n}}$. Действительно, если при некотором $j\in\{1,\ldots,\sqrt{n}\}$ верно $v_2(q_j)=0$ (соответственно $v_2(q_j)\neq 0$), то из четности аналитической функции $v_2(\cdot)$ по каждой переменной в отдельности на $\mathbf{T}^1$ следует, что существуют числа $C_1,C_2,C_3>0$ и $\delta>0$ такие, что

$$C_1|q-q_j|^2\le|v_2(q)|\le C_2|q-q_j|^2,\quad q\in U_\delta(q_j), \tag{3.2}$$

соответственно

$$|v_2(q)|\ge C_3,\quad q\in U_\delta(q_j), \tag{3.3}$$

где

$$U_\delta(p_0)=\{p\in\mathbf{T}^3:|p-p_0|<\delta\},\quad p_0\in\mathbf{T}^3,\ \delta>0.$$

Кроме того, из определения функции $\varepsilon(\cdot)$ получим, что

$$C_1|q-q_j|^2\le\varepsilon(q)\le C_2|q-q_j|^2,\quad q\in U_\delta(q_j),\ j=\overline{1,\sqrt{n}}, \tag{3.4}$$

$$\varepsilon(q)\ge C_3,\quad q\in\mathbf{T}_\delta\equiv\mathbf{T}^3\setminus\bigcup_{j=1}^{\sqrt{n}}U_\delta(q_j). \tag{3.5}$$

Имеет место равенство

$$\int|f_1(t)|^2\,dt=\frac{|f_0|^2}{8}\sum_{j=1}^{\sqrt{n}}\int\limits_{U_\delta(q_j)}\frac{v_2^2(t)\,dt}{\varepsilon^2(t)}+\frac{|f_0|^2}{8}\int\limits_{\mathbf{T}_\delta}\frac{v_2^2(t)\,dt}{\varepsilon^2(t)}. \tag{3.6}$$

Учитывая неравенства (3.2)–(3.5), имеем, что j-е ($j\in\{1,\ldots,\sqrt{n}\}$) слагаемое в правой части (3.6) конечно тогда и только тогда, когда $v_2(q_j)\neq 0$. В случае $v_2(q_j)=0$, $j=\overline{1,\sqrt{n}}$, имеем

$$\int|f_1(t)|^2\,dt\le C_1\sum_{j=1}^{\sqrt{n}}\int\limits_{U_\delta(q_j)}\frac{|t-q_j|^4}{|t-q_j|^4}\,dt+C_2<\infty.$$

Если при некотором $j\in\{1,\ldots,\sqrt{n}\}$ верно $v_2(q_j)\neq 0$, то, используя неравенства (3.2)–(3.5), получим, что

$$\int|f_1(t)|^2\,dt\ge C_1\int\limits_{U_\delta(q_j)}\frac{1}{|t-q_j|^4}\,dt=\infty.$$

Таким образом, $f_1\in L_2(\mathbf{T}^3)$ тогда и только тогда, когда $v_2(q_j)=0$, $j=\overline{1,\sqrt{n}}$.

Достаточность. Пусть $\Delta(p_1;0)=0$ и $v_2(q_j)=0$, $j=\overline{1,\sqrt{n}}$. Легко проверить, что элемент $f=(f_0,f_1)$, где f_0 и f_1, определенные по формуле (2.4), удовлетворяет уравнению $h(p_1)f=0$. Выше мы доказали, что если $v_2(q_j)=0$, $j=\overline{1,\sqrt{n}}$, то $f_1\in L_2(\mathbf{T}^3)$. Утверждение 1 леммы доказано.

2. Необходимость. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией. Тогда по определению 2.4 уравнение

$$\frac{v_2(q)}{4\lambda}\int\frac{v_2(t)\psi(t)\,dt}{\varepsilon(t)}=\psi(q) \tag{3.7}$$

имеет нетривиальное решение $\psi\in C(\mathbf{T}^3)$, удовлетворяющее условию $\psi(q_j)\neq 0$ при некотором $j\in\{1,\dots,\sqrt{n}\}$.

Видно, что это решение равно (с точностью до константы) функции $v_2(\cdot)$ и, следовательно, $\Delta(p_1;0)=0$.

Достаточность. Пусть $\Delta(p_1;0)=0$ и $v_2(q_j)\neq 0$ при некотором $j\in\{1,\dots,\sqrt{n}\}$. Тогда функция $v_2\in C(\mathbf{T}^3)$ является решением уравнения (3.7) и, следовательно, по определению 2.4 оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией. Утверждение 2 леммы доказано.

Лемма 3.3. *Если оператор $h(p_1)$ имеет либо резонанс с нулевой энергией, либо нулевое собственное значение, то оператор $h(p)$, $p\in\mathbf{T}^3$, не имеет отрицательных собственных значений.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $p\in\mathbf{T}^3\backslash\{p_1,\dots,p_{\sqrt{n}}\}$ имеет место неравенство $\Delta(p;0)>\Delta(p_1;0)$. Обозначим

$$\Lambda(p)=\int\limits_{\mathbf{T}^3}\frac{v_2^2(t)\,dt}{w_2(p,t)}.$$

Используя свойства функции $w_2(\cdot,\cdot)$, легко проверить, что имеет место равенство $\Lambda(p_1)=\Lambda(p_i)$, $i=\overline{2,\sqrt{n}}$. Так как функции $v_2(\cdot)$ и $w_2(\cdot,\cdot)$ четные, функция $\Lambda(\cdot)$ также четная и, следовательно,

$$\Lambda(p)-\Lambda(p_1)=\frac{1}{4}\int\frac{2w_2(p_1,t)-(w_2(p,t)+w_2(-p,t))}{w_2(p,t)w_2(-p,t)w_2(p_1,t)}[w_2(p,t)+w_2(-p,t)]v_2^2(t)\,dt$$
$$-\frac{1}{4}\int\frac{[w_2(p,t)-w_2(-p,t)]^2}{w_2(p,t)w_2(-p,t)w_2(p_1,t)}v_2^2(t)\,dt. \tag{3.8}$$

В силу равенств

$$w_2(p_1,t)-\frac{w_2(p,t)+w_2(-p,t)}{2}=\sum_{k=1}^{3}(\cos mp^{(k)}-1)(1+\cos mq^{(k)})$$

и (3.8) для любого $p\in\mathbf{T}^3\setminus\{p_1,\dots,p_{\sqrt{n}}\}$ справедливо неравенство $\Lambda(p)-\Lambda(p_1)<0$. Это означает, что функция $\Lambda(\cdot)$ достигает максимума в точках $p_i\in\mathbf{T}^3$, $i=\overline{1,\sqrt{n}}$.

Если оператор $h(p_1)$ имеет либо резонанс с нулевой энергией, либо нулевое собственное значение, то в силу леммы 3.2 $\Delta(p_1;0)=0$, следовательно, для любых $p\in\mathbf{T}^3$ и $z<0$ верно

$$\Delta(p;z)>\Delta(p;0)\geq\min_{p\in\mathbf{T}^3}\Delta(p;0)=\Delta(p_1;0)=0.$$

Здесь мы также использовали тот факт, что функция $w_1(\cdot)$ достигает минимума в точках $p_i \in \mathbf{T}^3$, $i = \overline{1, \sqrt{n}}$. По лемме 3.1 это означает, что оператор $h(p)$, $p \in \mathbf{T}^3$, не имеет отрицательных собственных значений. Лемма доказана.

Следующее разложение играет важную роль при доказательстве утверждения 2 теоремы 2.5.

Лемма 3.4. *Если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то справедливо разложение*

$$\Delta(p;z) = \frac{\pi^2}{m^2} \sum_{j=1}^{n_0} v_2^2(q_j) \sqrt{\frac{3}{4}|p-p_i|^2 - z} + O(|p-p_i|^2) + O(|z|)$$

при $|p-p_i| \to 0$, $i = \overline{1, n_0}$, и $z \to -0$.

Доказательство. Дадим основную идею доказательства. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией. Тогда по предположению $v_2(q_j) \neq 0$, $j = \overline{1, n_0}$ и $v_2(q_j) = 0$, $j = \overline{n_0+1, \sqrt{n}}$.

Сначала отметим, что из определения функции $w_1(\cdot)$ вытекает, что

$$w_1(p) = \lambda + O(|p-p_i|^2) \tag{3.9}$$

при $|p-p_i| \to 0$, $i = \overline{1, \sqrt{n}}$.

Пусть δ достаточно мало. В этом случае $U_\delta(q_i) \cap U_\delta(q_j) = \varnothing$ при $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n_0}$.

Положим

$$\mathbf{T}'_\delta = \mathbf{T}^3 \setminus \bigcup_{j=1}^{n_0} U_\delta(q_j).$$

Используя аддитивностью интеграла, перепишем функцию $\Delta(p;z)$ в виде

$$\Delta(p;z) = w_1(p) - z - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_0} \int\limits_{U_\delta(q_j)} \frac{v_2^2(t)\,dt}{w_2(p,t) - z} - \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbf{T}'_\delta} \frac{v_2^2(t)\,dt}{w_2(p,t) - z}. \tag{3.10}$$

Так как функция $w_2(\cdot,\cdot)$ имеет невырожденный минимум в точках (p_i, q_1), $(p_i, q_2), \ldots, (p_i, q_{n_0})$ и функция $v_2(\cdot)$ является аналитической функцией, четной по каждой переменной в отдельности на $\mathbf{T}^1$, рассуждая аналогично, как это делалось в работах [10, 16], легко можно показать, что

$$\int\limits_{U_\delta(q_j)} \frac{v_2^2(t)\,dt}{w_2(p,t) - z} = \int\limits_{U_\delta(q_j)} \frac{v_2^2(t)\,dt}{w_2(p_i,t)} - \frac{2\pi^2 v_2^2(q_j)}{m^2} \sqrt{\frac{3}{4}|p-p_i|^2 - z} + O(|p-p_i|^2) + O(|z|);$$

$$\int\limits_{\mathbf{T}'_\delta} \frac{v_2^2(t)\,dt}{w_2(p,t) - z} = \int\limits_{\mathbf{T}'_\delta} \frac{v_2^2(t)\,dt}{w_2(p_i,t)} + O(|p-p_i|^2) + O(|z|)$$

при $|p-p_i| \to 0$, $i = \overline{1, n_0}$, и $z \to -0$. Подставляя последние два разложения вместе с разложением (3.9) в равенство (3.10), имеем

$$\Delta(p;z) = \Delta(p_i;0) + \frac{\pi^2}{m^2} \sum_{j=1}^{n_0} v_2^2(q_j) \sqrt{\frac{3}{4}|p-p_i|^2 - z} + O(|p-p_i|^2) + O(|z|)$$

при $|p-p_i| \to 0$, $i = \overline{1, n_0}$, и $z \to -0$. Теперь утверждение 2 леммы 3.2, т. е. равенство $\Delta(p_i;0) = 0$, заключает доказательство леммы.

Лемма 3.5. *Если оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение, то существуют числа $C > 0$ и $\delta > 0$ такие, что выполняются следующие неравенства:*

$$|\Delta(p;0)| \geq C|p-p_i|^2, \quad p \in U_\delta(p_i), \ i=\overline{1,\sqrt{n}}.$$

Доказательство. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение. Тогда по лемме 3.2 выполнено равенство $v_2(q_j)=0$, $j=\overline{1,\sqrt{n}}$.

В ходе доказательства леммы 3.3 установлено, что функция $\Delta(\cdot;0)$ имеет минимум в точках $p=p_i$, $i=\overline{1,\sqrt{n}}$. Теперь докажем, что эти точки являются точками невырожденного минимума.

Так как при всех $p,q \in \mathbf{T}^3$, $p \neq p_i$, $i=\overline{1,\sqrt{n}}$, имеет место неравенство $w_2(p,q)>0$, то при всех $p \in \mathbf{T}^3 \setminus \{p_1,\ldots,p_{\sqrt{n}}\}$ интегралы

$$\lambda_{kl}^{(1)}(p)=\int\left(\frac{\partial^2 w_2(p,t)}{\partial p^{(k)}\partial p^{(l)}}\right)\frac{v_2^2(t)\,dt}{(w_2(p,t))^2}, \quad k,l=1,2,3,$$

$$\lambda_{kl}^{(2)}(p)=\int\left(\frac{\partial w_2(p,t)}{\partial p^{(k)}}\frac{\partial w_2(p,t)}{\partial p^{(l)}}\right)\frac{v_2^2(t)\,dt}{(w_2(p,t))^3}, \quad k,l=1,2,3,$$

конечны, а конечность этих интегралов в точках $p=p_i$, $i=\overline{1,\sqrt{n}}$, легко вытекает из тождества $\{p_i\}_{i=1}^{\sqrt{n}} \equiv \{q_j\}_{j=1}^{\sqrt{n}}$ и из условия $v_2(q_j)=0$, $j=\overline{1,\sqrt{n}}$. Тем самым определим непрерывные на $\mathbf{T}^3$ функции $\lambda_{kl}^{(1)}(\cdot)$, и $\lambda_{kl}^{(2)}(\cdot)$.

Функция $\Lambda(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbf{T}^3$, и

$$\frac{\partial^2\Lambda(p)}{\partial p^{(k)}\partial p^{(l)}}=-\lambda_{kl}^{(1)}(p)+2\lambda_{kl}^{(2)}(p), \quad k,l=1,2,3.$$

Так как

$$\frac{\partial w_2(p_i,t)}{\partial p^{(l)}}=m\sin mt^{(l)}, \quad l=1,2,3, \ i=\overline{1,\sqrt{n}};$$

$$\frac{\partial^2 w_2(p_i,t)}{\partial p^{(l)}\partial p^{(l)}}=m^2(1+\cos mt^{(l)}), \quad l=1,2,3, \ i=\overline{1,\sqrt{n}};$$

$$\frac{\partial^2 w_2(p_i,t)}{\partial p^{(k)}\partial p^{(l)}}=0, \quad k\neq l, \ k,l=1,2,3, \ i=\overline{1,\sqrt{n}},$$

имеем

$$\frac{\partial^2\Lambda(p_i)}{\partial p^{(l)}\partial p^{(l)}}=-\frac{m^2}{4}\int\left(\sum_{k=1,k\neq l}^{3}(1-\cos mt^{(k)})\right)\frac{(1+\cos mt^{(l)})v_2^2(t)}{\varepsilon^3(t)}\,dt,$$

$$l=1,2,3, \quad i=\overline{1,\sqrt{n}};$$

$$\frac{\partial^2\Lambda(p_i)}{\partial p^{(k)}\partial p^{(l)}}=\frac{m^2}{4}\int\frac{\sin mt^{(k)}\sin mt^{(l)}v_2^2(t)}{\varepsilon^3(t)}\,dt, \quad k\neq l, \ k,l=1,2,3, \ i=\overline{1,\sqrt{n}}.$$

Из последних двух равенств и четности функции $v_2(\cdot)$ по каждой переменной в отдельности на $\mathbf{T}^1$ вытекает, что

$$\frac{\partial^2\Lambda(p_i)}{\partial p^{(l)}\partial p^{(l)}}<0, \quad \frac{\partial^2\Lambda(p_i)}{\partial p^{(k)}\partial p^{(l)}}=0, \quad k\neq l, \ k,l=1,2,3, \ i=\overline{1,\sqrt{n}}.$$

Тогда матрица, состоящая из частных производных второго порядка функции $\Lambda(\cdot)$, отрицательно определена в точках $p=p_i$, $i=\overline{1,\sqrt{n}}$. Следовательно, функция $\Lambda(\cdot)$ имеет невырожденный максимум в точках $p=p_i$, $i=\overline{1,\sqrt{n}}$.

Так как у функции $w_1(\cdot)$ и $-\Lambda(\cdot)$ невырожденный минимум в точках $p=p_i$, $i=\overline{1,\sqrt{n}}$, у функции $\Delta(\cdot;0)$ также невырожденный минимум в этих точках. Стало быть, существуют числа C_i, $\delta_i>0$ $(i=\overline{1,\sqrt{n}})$ такие, что

$$|\Delta(p;0)|\geq C_i|p-p_i|^2,\quad p\in U_{\delta_i}(p_i),\ i=\overline{1,\sqrt{n}}.$$

Полагая

$$C=\min_{1\leq i\leq\sqrt{n}}C_i,\quad \delta=\min_{1\leq i\leq\sqrt{n}}\delta_i,$$

завершаем доказательство леммы.

Лемма 3.6. *Если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то существуют числа $C_1,C_2>0$ и $\delta>0$ такие, что выполняются следующие неравенства:*

1) $|\Delta(p;0)|\geq C_1|p-p_i|^2$, $p\in U_\delta(p_i)$, $i=\overline{n_0+1,\sqrt{n}}$;

2) $|\Delta(p;0)|\geq C_2$, $p\in\mathbf{T}_\delta$.

Доказательство. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией. Тогда по предположению $v_2(q_j)\neq0$, $j=\overline{1,n_0}$, и $v_2(q_j)=0$, $j=\overline{n_0+1,\sqrt{n}}$.

В доказательстве леммы 3.5 показано, что если $v_2(q_j)=0$, $j=\overline{n_0+1,\sqrt{n}}$, то существуют числа $C_1>0$ и $\delta>0$ такие, что выполняется неравенство в п. 1. Также в ходе доказательства леммы 3.3 показано, что если оператор $h(p_1)$ имеет либо резонанс с нулевой энергией, либо нулевое собственное значение, то функция $\Delta(\cdot;0)$ достигает нулевого минимума только в точках $p=p_i$, $i=\overline{1,\sqrt{n}}$. Поэтому для любого $p\in\mathbf{T}_\delta$ верно $\Delta(p;0)>0$. Из непрерывности и положительности функции $\Delta(\cdot;0)$ на замкнутом множестве $\mathbf{T}_\delta$ вытекает, что существует число $C_2>0$ такое, что $\Delta(p;0)\geq C_2$ при всех $p\in\mathbf{T}_\delta$. Лемма полностью доказана.

Лемма 3.7. *Существуют числа $C_1,C_2,C_3>0$ и $\delta>0$ такие, что выполняются следующие неравенства:*

1) $C_1(|p-p_i|^2+|q-q_j|^2)\leq w_2(p,q)\leq C_2(|p-p_i|^2+|q-q_j|^2)$, $(p,q)\in U_\delta(p_i)\times U_\delta(q_j)$, $i,j=\overline{1,\sqrt{n}}$;

2) $w_2(p,q)\geq C_3$, $(p,q)\in\mathbf{T}^2_\delta$.

Доказательство. Из разложения

$$w_2(p,q)=m^2(|p-p_i|^2+(p-p_i,q-q_j)+|q-q_j|^2)+O(|p-p_i|^4)+O(|q-q_j|^4)$$

при $|p-p_i|,|q-q_j|\to0$, $i,j=\overline{1,\sqrt{n}}$, вытекает, что существуют числа $C_1,C_2,C_3>0$ и $\delta>0$ такие, что выполняются неравенства 1 и 2 леммы.

Лемма 3.8. 1. *Если оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение, то элемент $f=(f_0,f_1)$, определенный по формуле* (2.4), *удовлетворяет уравнению $h(p_1)f=0$ и $f_1\in L_2(\mathbf{T}^3)$;*

2. *Если оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией, то элемент $f=(f_0,f_1)$, определенный по формуле* (2.4), *удовлетворяет уравнению $h(p_1)f=0$ и $f_1\in L_1(\mathbf{T}^3)\setminus L_2(\mathbf{T}^3)$.*

Доказательство. Для доказательства утверждения 1 леммы см. доказательство утверждения 1 леммы 3.2. Докажем утверждение 2. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией. Тогда по предположению о расположении точек $q_j\in\mathbf{T}^3$, $j=\overline{1,\sqrt{n}}$, вытекает, что $v_2(q_j)\neq0$, $j=\overline{1,n_0}$, и $v_2(q_j)=0$,

$j = \overline{n_0 + 1, \sqrt{n}}$ (в случае, когда $n_0 < \sqrt{n}$). Поэтому при $j = \overline{1, n_0}$ (соответственно $j = \overline{n_0 + 1, \sqrt{n}}$) верна оценка (3.3) (соответственно (3.2)).

Используя неравенства (3.2)–(3.5), имеем

$$\int |f_1(t)|\,dt \le C_1 \sum_{j=1}^{n_0} \int\limits_{U_\delta(q_j)} \frac{|t-q_j|^2}{|t-q_j|^2}\,dt + C_2 < \infty,$$

$$\int |f_1(t)|^2\,dt \ge C_1 \int\limits_{U_\delta(q_1)} \frac{dt}{|t-q_1|^4} = \infty.$$

Это означает, что $f_1 \in L_1(\mathbf{T}^3) \setminus L_2(\mathbf{T}^3)$.

Далее, легко можно проверить, что элемент $f = (f_0, f_1)$ удовлетворяет уравнению $h(p_1)f = 0$. Лемма полностью доказана.

4. Принцип Бирмана — Швингера

Для любых $\lambda \in \mathbf{R}$ и ограниченного самосопряженного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathscr{R}$, определим $d(\lambda, A)$ как

$$d(\lambda, A) = \sup\{\dim F : (Au, u) > \lambda,\ u \in F \subset \mathscr{R},\ \|u\| = 1\}.$$

Величина $d(\lambda, A)$ бесконечна, если $\lambda < \max \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$. Если $d(\lambda, A)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A, больших чем λ, с учетом кратности.

По определению числа $N(z)$ имеем

$$N(z) = d(-z, -H), \quad z < \tau_{\mathrm{ess}}(H).$$

Отметим, что для любых $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$ функция $\Delta(p; z)$ положительна и, следовательно, существует ее положительной квадратный корень.

В исследованиях дискретного спектра оператора H основную роль играет компактный (симметризованный) оператор $T(z)$, $z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$, действующий в $\mathscr{H}^{(2)}$ следующим образом:

$$T(z) = \begin{pmatrix} T_{00}(z) & T_{01}(z) \\ T_{10}(z) & T_{11}(z) \end{pmatrix},$$

где операторы $T_{kl}(z) : \mathscr{H}_l \to \mathscr{H}_k,\ k, l = 0, 1,\ z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$, определяются равенствами

$$(T_{00}(z)g_0)_0 = (1 + z - w_0)g_0, \quad (T_{01}(z)g_1)_0 = -\int \frac{v_1(t)g_1(t)\,dt}{\sqrt{\Delta(t; z)}};$$

$$(T_{10}(z)g_0)_1(p) = -\frac{v_1(p)g_0}{\sqrt{\Delta(p; z)}},\ (T_{11}(z)g_1)_1(p) = \frac{v_2(p)}{2\sqrt{\Delta(p; z)}} \int \frac{v_2(t)g_1(t)\,dt}{\sqrt{\Delta(t; z)}(w_2(p, t) - z)}.$$

Здесь $g_k \in \mathscr{H}_k$, $k = 0, 1$.

Следующая лемма является реализацией известного принципа Бирмана — Швингера для оператора H (см. [3, 4, 10–12, 16]).

Лемма 4.1. *При всех $z < \tau_{\mathrm{ess}}(H)$ оператор $T(z)$ компактен и непрерывен по z и для чисел $N(z)$ и $d(1, T(z))$ справедливо равенство $N(z) = d(1, T(z))$.*

Эта лемма доказана в работе [16].

5. Доказательство основного результата

В этом пункте мы докажем теорему 2.5. Начнем доказательство утверждения 1 теоремы 2.5 со следующей леммы.

Лемма 5.1. *Пусть оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение. Тогда оператор $T(z)$ компактен и непрерывен в сильной операторной топологии в точке $z = 0$.*

Доказательство. С учетом неравенства (3.3) и лемм 3.5–3.7 ядро оператора $T_{11}(z)$, $z \leq 0$, оценивается функцией

$$C_1 \sum_{i,j=1}^{\sqrt{n}} \left(\frac{\chi_\delta(p-p_i)}{|p-p_i|} + 1 \right) \left(\frac{|q-q_j|\chi_\delta(p-p_i)\chi_\delta(q-q_j)}{|p-p_i|^2 + |q-q_j|^2} + 1 \right) \left(\frac{\chi_\delta(q-q_j)}{|q-q_j|^{\frac{1}{2}}} + 1 \right),$$

где $\chi_\delta(\cdot)$ — характеристическая функция множества $U_\delta(0)$.

Так как последняя оценочная функция квадратично интегрируема на $(\mathbf{T}^3)^2$, оператор $T_{11}(z)$, $z \leq 0$, является оператором Гильберта — Шмидта.

Видно, что ядро этого оператора непрерывно по $p, q \in \mathbf{T}^3$ при $z < 0$ и квадратично интегрируемо при $z \leq 0$. Тогда в силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега оператор $T_{11}(z)$ непрерывен в сильной операторной топологии в точке $z = 0$.

Теперь результат леммы вытекает из одномерности операторов $T_{00}(z), T_{01}(z)$, $T_{10}(z)$ и непрерывности в сильной операторной топологии в точке $z = 0$. Лемма доказана.

Доказательство утверждения 1 теоремы 2.5. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет нулевое собственное значение. В силу леммы 4.1 $N(z) = d(1, T(z))$ при $z < 0$ и ввиду леммы 5.1 для любого $\gamma \in [0, 1)$ величина $d(1 - \gamma, T(0))$ конечна. Используя неравенство Вейля

$$d(\lambda_1 + \lambda_2, A_1 + A_2) \leq d(\lambda_1, A_1) + d(\lambda_2 A_2)$$

для суммы компактных операторов при любых положительных λ_1 и λ_2, имеем

$$N(z) = d(1, T(z)) \leq d(1 - \gamma, T(0)) + d(\gamma, T(z) - T(0))$$

для любых $z < 0$ и $\gamma \in (0, 1)$.

В силу леммы 5.1 оператор $T(z)$ непрерывен в сильной операторной топологии в точке $z = 0$ и имеет место соотношение

$$\lim_{z \to -0} N(z) = N(0) \leq d(1 - \gamma, T(0))$$

для любого $\gamma \in (0, 1)$. Следовательно, $N(0) \leq d(1 - \gamma, T(0)) < \infty$.

Последнее неравенство заключает доказательство утверждения 1 теоремы 2.5.

Доказательство утверждения 2 теоремы 2.5. Введем асимптотику (2.5) для числа $N(z)$ собственных значений оператора H, лежащих левее z, $z < 0$, т. е. докажем утверждение 2 теоремы 2.5.

Доказательство проводится при помощи некоторых лемм и вспомогательных утверждений из работ [3, 10].

Сначала находим асимптотику для $d(1, T(z))$ при $z \to -0$. Для этого изучение спектральных свойств оператора $T(z)$ сводится к изучению спектральных свойств оператора $\mathbf{T}(r)$ (см. ниже), который исследован в работе [10].

Лемма 5.2. *Пусть $A(z) = A_0(z) + A_1(z)$, где $A_0(z)$ (соответственно $A_1(z)$) компактен и непрерывен в $z < 0$ (соответственно $z \leq 0$) в сильной операторной топологии. Предположим, что для функции $f(\cdot)$, $f(z) \to 0$, $z \to 0$, имеет место равенство*

$$\lim_{z\to -0} f(z)\, d(\gamma, A_0(z)) = l(\gamma),$$

где функция $l(\cdot)$ определена и непрерывна в $(0; +\infty)$. Тогда аналогичный предел существует для $A(z)$ и имеет место равенство

$$\lim_{z\to -0} f(z)\, d(\gamma, A(z)) = l(\gamma).$$

Для доказательства леммы 5.2 см. лемму 4.9 из [3].

Пусть оператор $T(\delta; |z|)$ действует в $\mathscr{H}^{(2)}$ как

$$T(\delta; |z|) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_{11}(\delta; |z|) \end{pmatrix},$$

где $T_{11}(\delta; |z|)$ — интегральный оператор, действующий в $\mathscr{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^3)$, с ядром

$$\frac{n_0}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\chi_\delta(p - p_i)\chi_\delta(q - q_i)\left(\frac{3}{4}|p - p_i|^2 + |z|\right)^{-\frac{1}{4}}}{\left(\frac{3}{4}|q - q_i|^2 + |z|\right)^{\frac{1}{4}} (|p - p_i|^2 + (p - p_i, q - q_i) + |q - q_i|^2 + |z|)}.$$

Оператор $T(\delta; |z|)$ называется *сингулярной частью оператора* $T(z)$.

Лемма 5.3. *Пусть $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией. Тогда для любых $z \leq 0$ и малого $\delta > 0$ разность $T(z) - T(\delta; |z|)$ является компактным оператором, непрерывным в сильной операторной топологии в точке $z = 0$.*

Доказательство. Пусть оператор $h(p_1)$ имеет резонанс с нулевой энергией. Согласно леммам 3.4, 3.6, 3.7 существуют $C_1, C_2 > 0$ такие, что ядро оператора $T_{11}(z) - T_{11}(\delta; |z|)$ оценивается через

$$C_1 + C_2 \sum_{i=1}^{n_0} \frac{|p - p_i|^{-\frac{1}{2}} + |q - q_i|^{-\frac{1}{2}} + 1}{|p - p_i|^2 + (p - p_i, q - q_i) + |q - q_i|^2}$$

и, следовательно, оператор $T_{11}(z) - T_{11}(\delta; |z|)$ является оператором Гильберта — Шмидта при всех $z \leq 0$, непрерывным в сильной операторной топологии в точке $z = 0$. Далее, одномерность операторов $T_{00}(z)$, $T_{01}(z)$, $T_{10}(z)$ и их непрерывность в сильной операторной топологии в точке $z = 0$ заключает доказательство леммы.

Из определения оператора $T(\delta; |z|)$ видно, что

$$\sigma(T(\delta; |z|)) = \{0\} \cup \sigma(T_{11}(\delta; |z|)),$$

но нам необходимо изучить часть $\sigma(T(\delta; |z|))$, лежащую правее $\lambda = 1$, которая совпадает с множеством $\sigma(T_{11}(\delta; |z|)) \cap (1, +\infty)$. Поэтому дальше будем изучать оператор $T_{11}(\delta; |z|)$.

Пространство всех функций f, носители которых лежат в $\bigcup_{i=1}^{n_0} U_\delta(p_i)$, является инвариантным подпространством оператора $T_{11}(\delta; |z|)$. Пусть $T_{11}^{(0)}(\delta; |z|)$ — сужение оператора $T_{11}(\delta; |z|)$ на это подпространство, т. е. интегральный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} U_\delta(p_i)\right)$ с ядром

$$\frac{n_0}{\pi^2} \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\chi_\delta(q - q_i)\left(\frac{3}{4}|p - p_i|^2 + |z|\right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{3}{4}|q - q_i|^2 + |z|\right)^{-\frac{1}{4}}}{|p - p_i|^2 + (p - p_i, q - q_i) + |q - q_i|^2 + |z|}.$$

Обозначим через $\operatorname{diag}\{A_1,\dots,A_{n_0}\}$ $(n_0\times n_0)$-диагональный матричный оператор с диагональными элементами $A_1,\dots,A_{n_0}$.

В силу равенства $L_2\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n_0} U_\delta(p_i)\Big)=\bigoplus\limits_{i=1}^{n_0} L_2(U_\delta(p_i))$ оператор $T_{11}^{(0)}(\delta;|z|)$ записывается как диагональная матрица:

$$T_{11}^{(0)}(\delta;|z|)=\operatorname{diag}\big\{T_0^{(1)}(\delta;|z|),\dots,T_0^{(n_0)}(\delta;|z|)\big\},$$

где $T_0^{(i)}(\delta;|z|)$, $i=\overline{1,n_0}$, — интегральный оператор, действующий в $L_2(U_\delta(p_i))$ с ядром

$$\frac{n_0}{\pi^2}\frac{\chi_\delta(q-q_i)\big(\frac34|p-p_i|^2+|z|\big)^{-\frac14}\big(\frac34|q-q_i|^2+|z|\big)^{-\frac14}}{|p-p_i|^2+(p-p_i,q-q_i)+|q-q_i|^2+|z|}.$$

Обозначим

$$L_2^{(n_0)}(U_r(0))=\{f=(f_1,\dots,f_{n_0}):f_i\in L_2(U_r(0)),\ i=\overline{1,n_0}\}.$$

Легко можно показать, что оператор $T_{11}^{(0)}(\delta;|z|)$ унитарно эквивалентен оператору $T_{11}^{(1)}(r)$, $r=|z|^{-\frac12}$, действующему в $L_2^{(n_0)}(U_r(0))$ по формуле

$$T_{11}^{(1)}(r)=\operatorname{diag}\{T_1^{(1)}(r),\dots,T_1^{(n_0)}(r)\},$$

где $T_1^{(i)}(r)$, $i=\overline{1,n_0}$, — интегральный оператор в $L_2(U_r(0))$ с ядром

$$\frac{n_0}{\pi^2}\frac{\chi_r(q)}{\big(\frac34|p|^2+1\big)^{\frac14}\big(\frac34|q|^2+1\big)^{\frac14}(|p|^2+(p,q)+|q|^2+1)}.$$

Отметим, что унитарная эквивалентность этих операторов осуществляется при помощи унитарного оператора

$$B_r=\operatorname{diag}\big\{B_r^{(1)},\dots,B_r^{(n_0)}\big\}:\bigoplus_{i=1}^{n_0}L_2(U_\delta(p_i))\to L_2^{(n_0)}(U_r(0)).$$

Здесь оператор $B_r^{(i)}:L_2(U_\delta(p_i))\to L_2(U_r(0))$, $i=\overline{1,n_0}$, действует по формуле

$$\big(B_r^{(i)}f\big)(p)=\Big(\frac{r}{\delta}\Big)^{-\frac32}f\Big(\frac{\delta}{r}(p-p_i)\Big).$$

Так как пространство $L_2^{(n_0)}(U_r(0))$ изоморфно к $L_2(U_r(0))$, перепишем оператор $T_1(r)$ как интегральный оператор в $L_2(U_r(0))$ с ядром

$$K_{n_0}(p,q)=\frac{n_0^2}{\pi^2}\frac{\chi_r(q)}{\big(\frac34|p|^2+1\big)^{\frac14}\big(\frac34|q|^2+1\big)^{\frac14}(|p|^2+(p,q)+|q|^2+1)}.$$

Пусть $\mathbf{T}(r)$ — интегральный оператор, действующий в $L_2(U_r(0))$ с ядром $K_{\sqrt2}(p,q)$. Следующая лемма доказана в работе [10].

Лемма 5.4. *Имеет место равенство*

$$\lim_{z\to-0}\frac{d(1,\mathbf{T}(z))}{|ln|z||}=\frac{\gamma_0}{2\pi},$$

где γ_0 является единственным положительным корнем уравнения (2.6).

Доказательство утверждения 2 теоремы 2.5 следует из лемм 4.1, 5.2–5.4.

Благодарность. Автор выражает благодарность профессору К. Треттер за внимание к работе и обсуждение полученных результатов, а также рецензенту за ценные и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ефимов В. И.* Слабо связанные состояния трех резонансно взаимодействующих частиц // Ядер. физика. 1970. Т. 12, № 5. С. 1080–1091.

2. *Яфаев Д. Р.* К теории дискретного спектра трехчастичного оператора Шредингера // Мат. сб. 1974. Т. 96, № 4. С. 567–593.

3. *Sobolev A. V.* The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics // Comm. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 101–126.

4. *Tamura H.* The Efimov effect of three-body Schrödinger operators: asymptotics for the number of negative eigenvalues // Nagoya Math. J. 1993. V. 130. P. 55–83.

5. *Mattis D.* The few-body problem on a lattice // Rev. Modern Phys. 1986. V. 58. P. 361–379.

6. *Mogilner A. I.* The problem of a few quasi-particles in solid-state physics // Applications of self-adjoint extensions in quantum physics. Berlin: Springer-Verl., 1989, P. 160–173. (Lect. Notes Phys.; V. 324).

7. *Лакаев С. Н.* О бесконечном числе трехчастичных связанных состояний системы трех квантовых решетчатых частиц // Тор. и мат. физика. 1991. Т. 89, № 1. С. 94–104.

8. *Лакаев С. Н.* Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых квантовых частиц // Функцион. анализ и его прил. 1993. Т. 27, № 3. С. 15–28.

9. *Лакаев С. Н., Муминов М. Э.* Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Теор. и мат. физика. 2003. Т. 135, № 3. С. 478–503.

10. *Абдуллаев Ж. И., Лакаев С. Н.* Асимптотика дискретного спектра разностного трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Теор. и мат. физика. 2003. Т. 136, № 2. С. 231–245.

11. *Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I.* Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics // Ann. Henri Poincaré. 2004. V. 5. P. 743–772.

12. *Лакаев С. Н., Муминов З. Э.* Асимптотика для числа собственных значений трехчастичного оператора Шредингера на решетке // Функцион. анализ и его прил. 2003. Т. 37, № 3. С. 85–88.

13. *Minlos R., Spohn H.* The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons // Topics in statistical and theoretical physics. F. A. Berezin memorial volume. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. P. 159–193. (AMS Transl. Ser. 2. Adv. Math. Sci.; V. 177).

14. *Жуков Ю. В., Минлос Р. А.* Спектр и рассеяние в модели «спин-бозон» с не более чем тремя фотонами // Теор. мат. физика. 1995. Т. 103, № 1. С. 63–81.

15. *Sigal I. M., Soffer A., Zielinski L.* On the spectral properties of Hamiltonians without conservation on the particle number // J. Math. Phys. 2002. V. 42, N 4. P. 1844–1855.

16. *Albeverio S., Lakaev S. N., Rasulov T. H.* On the spectrum of an Hamiltonian in Fock space. Discrete spectrum asymptotics // J. Stat. Phys. 2007. V. 127, N 1. P. 191–220.

17. *Albeverio S., Lakaev S. N., Rasulov T. H.* The Efimov effect for a model operator associated with the Hamiltonian of a non conserved number of particles // Methods Func. Anal. Topol. 2007. V. 13, N 1. P. 1–16.

18. *Лакаев С. Н., Расулов Т. Х.* Об эффекте Ефимова в модели теории возмущений существенного спектра // Функцион. анализ и его прил. 2003. Т. 37, № 1. С. 81–84.

Статья поступила 15 апреля 2010 г.

Расулов Тулкин Хусенович
Бухарский гос. университет, физико-математический факультет,
кафедра алгебры и анализа,
ул. М. Икбол, 11, Бухара 200100, Узбекистан
`rth@mail.ru`