Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 512.5

ТОЖДЕСТВА РАЗРЕШИМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Е. И. Тимошенко

Аннотация. Рассматривается произведение G абелевых групп в многообразии $\mathfrak{A}^n$ разрешимых групп ступени разрешимости не больше n. При условии, что абелевы сомножители разложимы в прямое произведение циклических, найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа G порождала многообразие $\mathfrak{A}^n$.

Ключевые слова: разрешимое произведение, многообразие групп, абелева группа, разрешимая группа.

§ 1. Введение и предварительные сведения

Необходимые сведения о многообразиях групп можно найти в [1]. Напомним основные из них.

Пусть X_∞ — свободная группа, порожденная множеством элементов $\{x_1, x_2, \dots\}$. Рассмотрим некоторое подмножество $V = \{v_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ элементов (слов) группы X_∞. Пусть G — некоторая группа, $v(x_1, \dots, x_n)$ — некоторый элемент из V. Подставляя вместо $x_1, \dots, x_n$ некоторые элементы $g_1, \dots, g_n$ группы G, получим элемент $v(g_1, \dots, g_n)$ из G, который называется *значением v на G*. *Вербальной подгруппой* $V(G)$ группы G, соответствующей множеству слов V, называется подгруппа, порожденная всеми значениями в G элементов v_λ.

Пусть M — некоторый класс групп. Элемент $v \in X_\infty$ называется *тождеством* на M, если $v(G) = 1$ для любой группы G из M.

Многообразием групп называется класс всех групп, удовлетворяющих некоторому данному множеству тождеств.

Теорема Биркгофа утверждает, что класс групп $\mathfrak{M}$ является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и декартовых произведений.

Любое множество групп M порождает многообразие, которое будем обозначать через $\mathrm{var}(M)$. Его можно получить двумя способами. Во-первых, замыкая множество M с помощью вышеуказанных операций, во-вторых, рассматривая все группы, удовлетворяющие тем тождествам, которые верны на каждой из групп, принадлежащих M.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ многообразие всех абелевых групп, а через $\mathfrak{A}^n$, $n \geq 2$, — многообразие всех разрешимых групп ступени разрешимости не выше n.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00099).

Многообразие $\mathfrak{A}^n$ состоит из всех групп, удовлетворяющих тождеству $\delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_{2^n})$, где последовательность элементов $\delta_1, \delta_2, \ldots$ группы X_∞ строится следующим образом:

$$\delta_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2],$$

$$\delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}) = [\delta_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{2^{n-1}}), \delta_{n-1}(x_{2^{n-1}+1}, \ldots, x_{2^n})].$$

Для данной группы G через $G^{(n)}$ обозначим n-й коммутант группы G, который по определению равен $\delta_n(G)$.

Если в многообразии $\mathfrak{M}$ выполнено тождество $x^m = 1$, $m \in \mathbb{N}$, и m — наименьшее число с этим свойством, то m называется *периодом* или *экспонентой* многообразия $\mathfrak{M}$. В противном случае говорят, что многообразие $\mathfrak{M}$ имеет *экспоненту* 0.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие. Тогда $F_r(\mathfrak{M})$ обозначает свободную группу ранга r этого многообразия.

Пусть G_i, $i \in I$, — произвольное множество групп, $F = \prod\limits_{i\in I}^{*} G_i$ — их свободное произведение. Ядро естественного гомоморфизма группы $\prod\limits_{i\in I}^{*} G_i$ на прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} G_i$ называется *декартовой подгруппой* и обозначается через D.

Для многообразия $\mathfrak{M}$ групп, заданного множеством тождеств V, определим понятие *вербального произведения* групп G_i, $i \in I$. Вербальное произведение называют еще $\mathfrak{M}$-*произведением*. Оно обозначается через $\mathfrak{M} \prod\limits_{i\in I} G_i$.

По определению $\mathfrak{M} \prod\limits_{i\in I} G_i$ есть фактор-группа свободного произведения $F = \prod^* G_i$ групп G_i по нормальной подгруппе $V(F) \cap D$, где D — декартова подгруппа, а $V(F)$ — вербальная подгруппа из F.

Если все группы $G_i = \langle g_i \rangle$ циклические, экспонента которых совпадает с экспонентой многообразия $\mathfrak{M}$, то их $\mathfrak{M}$-произведение — свободная группа ранга I многообразия $\mathfrak{M}$, а g_i, $i \in I$, — ее базис.

Пусть A, B — произвольные группы, а $A(b)$ — группы, изоморфные A, с изоморфизмом $a \to a(b)$, $a \in A$, $b \in B$. Рассмотрим группу

$$\overline{A}_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \prod_{b\in B} A(b).$$

Назовем $\mathfrak{M}$-*сплетением* группы A с группой B расщепляющееся расширение $\overline{A}_{\mathfrak{M}} \leftthreetimes B$ группы $\overline{A}_{\mathfrak{M}}$ при помощи группы B, в котором элементы из B индуцируют автоморфизмы $\overline{A}_{\mathfrak{M}}$ по закону

$$b^{-1} a(b_1) b = a(b_1 b).$$

$\mathfrak{M}$-сплетение группы A с группой B будем обозначать через $A \wr_{\mathfrak{M}} B$.

Рассмотрим стандартный язык групповой сигнатуры. $\forall$-*предложением* в этом языке называется формула вида

$$\forall x_1 \ldots x_t \Phi(x_1, \ldots, x_t),$$

где $\Phi(x_1, \ldots, x_t)$ — формула групповой сигнатуры, не содержащая кванторов. Подчеркнем, что предложение не содержит свободных переменных. Это значит, что все переменные x_i связаны кванторами $\forall$.

Очевидно, что любое тождество, истинное на группе G, является $\forall$-предложением. Множество всех $\forall$-предложений, истинных на группе G, называется *универсальной теорией группы* G.

Две группы называются *универсально эквивалентными*, если их универсальные теории совпадают.

Так как тождества группы записываются универсальными предложениями, универсально эквивалентные группы имеют одинаковые множества тождеств или, другими словами, порождают одинаковые многообразия.

Известно [2], что свободные неабелевы разрешимые группы $F_{r_1}(\mathfrak{A}^n)$ и $F_{r_2}(\mathfrak{A}^n)$ одной ступени разрешимости универсально эквивалентны, если $r_1, r_2 \geq 2$. В этой же работе доказано, что свободная разрешимая группа $F_2(\mathfrak{A}^n)$ универсально эквивалентна сплетению $\langle a \rangle \wr_{\mathfrak{A}^{n-1}} \langle b \rangle$ двух бесконечных циклических групп $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ в многообразии $\mathfrak{A}^{n-1}$. Для $n = 2$ этот результат получен в [3].

Мы будем использовать теорему 18.42 из [1]. Приведем ее формулировку.

Если $A_\lambda \in \mathfrak{B}$ при всех $\lambda \in \Lambda$ и $\theta_\lambda : A_\lambda \to B$ — заданные гомоморфизмы групп A_λ в некоторую группу B из $\mathfrak{B}$, то существует гомоморфизм $\theta : \mathfrak{B}\prod\limits_\lambda A_\lambda \to B$ такой, что его ограничение на составляющую A_λ совпадает с гомоморфизмом θ_λ при всех λ.

Напомним конструкцию вложения Шмелькина [4, 5], которая изложена также в [6].

Пусть G_i, $i = 1, \ldots, m$, — некоторые нетривиальные группы и $F = \prod^* G_i$ — их свободное произведение. Предположим, что нормальная подгруппа R из F не пересекается с множителями, т. е. $R \cap G_i = 1$ для всех значений i.

Обозначим через Δ_i фундаментальный идеал кольца $\mathbb{Z}G_i$, т. е. ядро тривиализации $\varepsilon_i : \mathbb{Z}(G_i) \to \mathbb{Z}$. Пусть $B = F/R$, и рассмотрим правый свободный $\mathbb{Z}B$-модуль T с базой $\{t_1, \ldots, t_m\}$. Через $M(F/R, T)$ обозначим группу матриц вида

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in B,\ t \in T.$$

Отображение

$$g_i \to \begin{pmatrix} g_i & 0 \\ t_i(g_i - 1) & 1 \end{pmatrix}, \quad g_i \in G_i,$$

задает вложение каждой группы G_i в группу матриц $M(F/R, T)$. Эти вложения можно продолжить до гомоморфизма

$$\sigma : F \to M(F/R, T).$$

Ядро гомоморфизма σ совпадает с коммутантом $[R, R]$. Вложение группы $F/[R, R]$ в $M(F/R, T)$ называется *вложением Шмелькина.*

Напомним определение обобщенных правых производных Фокса D_i. Они однозначно определены на кольце $\mathbb{Z}F$ следующими условиями:

$$D_i(g_i) = g_i - 1, \quad D_i(g_l) = 0, \quad g_j \in G_j,\ l \neq i;$$

$$D_i(u \cdot v) = D_i(u)v + \varepsilon(u)D_i(v), \quad u, v \in \mathbb{Z}F;$$

$$D_i(u + v) = D_i(u) + D_i(v), \quad u, v \in \mathbb{Z}F,$$

где ε — тривиализация $\mathbb{Z}(F) \to \mathbb{Z}$.

Можно описать образы элементов $g \in F$ в группе матриц $M(F/R, T)$ на языке обобщенных производных Фокса: образом элемента $g \in F$ является матрица

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ t_1 D_1(g) + \cdots + t_m D_m(g) & 1 \end{pmatrix},$$

где b — образ элемента g в группе B при естественном гомоморфизме $F \to B$.

Заметим, что при сделанных ограничениях на тривиальность пересечения $R \cap G_i$ обобщенные производные определены однозначно на кольце $\mathbb{Z}(F/R')$, если их значения рассматриваются в кольце $\mathbb{Z}(F/R)$.

§ 2. Многообразия, порожденные разрешимым произведением абелевых групп

Лемма 1. *Пусть $\overline{G}$ — $\mathfrak{A}^n$-произведение бесконечной циклической группы $A = \langle a \rangle$ и циклической группы $B = \langle b \rangle$ порядка $l \geq 2$. Тогда многообразие* $\mathrm{var}(\overline{G})$, *порожденное группой $\overline{G}$, совпадает с многообразием $\mathfrak{A}^n$.*

Доказательство. Обозначим через G свободное произведение групп A и B:

$$G = A \star B.$$

Из определения $\mathfrak{A}^n$-произведения следует, что группа $\overline{G}$ изоморфна фактор-группе $G/G^{(n)}$, где $G^{(n)}$ — n-й член ряда коммутантов группы G.

Пусть D — декартова подгруппа группы G. Так как сомножители A и B — абелевы группы, группа D совпадает с коммутантом $G' = [G, G]$. Известно, что декартова подгруппа D является свободной группой. В [6] (см. также [7]) указан некоторый базис группы D. Такой базис образуют элементы $x_{mr} = [a^m, b^r]$, где m принимает любые целые ненулевые значения, $r \in \{1, \ldots, l-1\}$.

Пусть $x_m = x_{m1}$. Для $g, h \in G$ положим $g^h = h^{-1} g h$. Обозначим

$$y_i = [a, b]^{a^i}$$

для $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Покажем, что эти элементы — свободные порождающие свободной группы

$$F_\infty = \langle y_i \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \rangle.$$

Чтобы убедиться в этом, найдем выражения y_i через x_m. Получим

$$y_0 = x_1, \quad y_t = x_{t+1} x_t^{-1}, \quad y_{-1} = x_{-1}^{-1}, \quad y_{-t-1} = x_{-t} x_{-t-1}^{-1}, \quad t \geq 1.$$

Чертой будем обозначать образ $\bar{g}$ элемента $g \in G$ при естественном гомоморфизме $G \to \overline{G}$.

Группа $\overline{G}$ содержит подгруппу $\overline{H} = G'/(G')^{(n-1)}$. Так как G' — свободная группа, то $\overline{H}$ — свободная группа многообразия $\mathfrak{A}^{n-1}$. Элементы y_i составляют часть ее базиса. Поэтому элементы

$$\bar{y}_i = [\bar{a}, \bar{b}]^{\bar{a}^i}$$

свободно порождают в $\overline{G}$ свободную разрешимую группу ступени разрешимости $n-1$.

Рассмотрим подгруппу $\overline{W}$ группы $\overline{G}$, порожденную всеми элементами $\bar{y}_i$ и элементом $\bar{a}$:

$$\overline{W} = \langle \bar{y}_i, \bar{a} \mid i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \rangle.$$

Так как
$$\bar{a}^{-j}\bar{y}_i\bar{a}^j = \bar{y}_{i+j},$$
группа $\overline{W}$ изоморфна сплетению в многообразии $\mathfrak{A}^{n-1}$ двух бесконечных циклических групп, порожденных коммутатором $[\bar{a}, \bar{b}]$ и элементом $\bar{a}$. Универсальная теория сплетения двух бесконечных циклических групп в многообразии $\mathfrak{A}^{n-1}$ совпадает с универсальной теорией свободной разрешимой группы $F_r(\mathfrak{A}^n)$ при любом $r \geq 2$. В частности, множество тождеств этих групп одинаково. Так как любая группа $F_r(\mathfrak{A}^n)$ при $r \geq 2$ порождает многообразие $\mathfrak{A}^n$, группа $\overline{G}$ также порождает многообразие $\mathfrak{A}^n$. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть A_i, $i \in I$, — абелевы группы, экспоненты которых ограничены в совокупности,*
$$A = \mathfrak{A}^n \prod_{i \in I} A_i$$
— их произведение в многообразии $\mathfrak{A}^n$. Тогда многообразие, порожденное группой A, строго меньше многообразия $\mathfrak{A}^n$.

Доказательство. Пусть экспоненты всех групп A_i, $i \in I$, делят число m. Группа A/A' имеет конечную экспоненту, которая делит m. Поэтому $A^m \subseteq [A, A]$. Коммутант $[A, A]$ — разрешимая группа ступени не выше $n-1$. Значит, группа A удовлетворяет тождеству
$$\delta_{n-1}\big(x_1^m, x_2^m, \ldots, x_{2^{n-1}}^m\big) = 1.$$
Но в свободной разрешимой группе ступени разрешимости n это тождество не выполняется. Действительно, если элементы $g_1, \ldots, g_s$ свободной разрешимой группы $F_r(\mathfrak{A}^n)$ независимы по модулю коммутанта $[F_r(\mathfrak{A}^n), F_r(\mathfrak{A}^n)]$, то они порождают свободную разрешимую группу ранга s многообразия $\mathfrak{A}^n$ (см., например, [1, следствие 42.56]). Отсюда следует , что степени свободных порождающих свободной разрешимой группы $F_r(\mathfrak{A}^n)$ порождают свободную группу многообразия $\mathfrak{A}^n$, в котором тождество $\delta_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{2^{n-1}})$ не выполняется. Утверждение доказано.

Лемма 3. *Пусть $\langle a \rangle$ — нетривиальная циклическая группа, $\langle c \rangle$ — бесконечная циклическая группа, $G = \langle a \rangle \underset{\mathfrak{A}^n}{*} \langle c \rangle$ — их произведение в многообразии $\mathfrak{A}^n$ n-ступенно разрешимых групп, $\langle c_p \rangle$ — циклическая группа порядка $m_p \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ и $G_p = \langle a \rangle \underset{\mathfrak{A}^n}{*} \langle c_p \rangle$ — произведение в многообразии $\mathfrak{A}^n$. Предположим, что последовательность $\{m_1, m_2, \ldots\}$ не ограничена. Тогда группа G дискриминируется семейством групп $\{G_p \mid p \in \mathbb{N}\}$.*

Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 1$ лемма тривиальна. Предположим, что для меньших значений лемма верна, и докажем ее для n. Если g — неединичный элемент из G, то из вложения Шмелькина группы G в группу матриц над кольцом $\mathbb{Z}(\langle a \rangle \underset{\mathfrak{A}^{n-1}}{*} \langle c \rangle)$ следует, что хотя бы одно из двух значений $D_1(g)$ или $D_2(g)$ обобщенных производных Фокса в кольце $\mathbb{Z}(\langle a \rangle \underset{\mathfrak{A}^{n-1}}{*} \langle c \rangle)$ не равно нулю.

Обозначим через φ_p естественный гомоморфизм группы G на группу G_p, при котором $\varphi_p(a) = a$, $\varphi_p(c) = c_p$. Такой гомоморфизм существует по теореме 18.42 из [1].

Пусть $g_1, \ldots, g_r$ — неединичные элементы из G и $D_{\varepsilon_1}(g_1), \ldots, D_{\varepsilon_r}(g_r)$, где $\varepsilon_j \in \{1, 2\}$, — ненулевые значения производных в кольце $\mathbb{Z}(\langle a \rangle \underset{\mathfrak{A}^{n-1}}{*} \langle c \rangle)$.

Так как для группы $\langle a\rangle \underset{\mathfrak{A}^{n-1}}{*} \langle c\rangle$ лемма верна, найдется значение p такое, что при гомоморфизме

$$\overline{\varphi}_p : \langle a\rangle \underset{\mathfrak{A}^{n-1}}{*} \langle c\rangle \to \langle a\rangle \underset{\mathfrak{A}^{n-1}}{*} \langle c_p\rangle,$$

где $\overline{\varphi}_p(a) = a$, $\overline{\varphi}_p(c) = c_p$, образы элементов $D_{\varepsilon_1}(g_1), \dots, D_{\varepsilon_r}(g_r)$ останутся ненулевыми. Но

$$\overline{\varphi}_p(D_{\varepsilon_j}(g_j)) = D_{\varepsilon_j}(\varphi_p(g_j)). \tag{1}$$

Действительно, пусть g — элемент группы $F_1 = \langle a\rangle \underset{\mathfrak{A}^{n-1}}{*} \langle c\rangle$. Обозначим через α гомоморфизм группы F_1 на группу $F_2 = \langle a\rangle \underset{\mathfrak{A}^{n-1}}{*} \langle c_p\rangle$, при котором $\alpha(a) = a$, $\alpha(c) = c_p$. Пусть R_1 — нормальная подгруппа из F_1, а R_2 — ее образ под действием α в F_2. Гомоморфизм α индуцирует гомоморфизм групп F_1/R_1 на F_2/R_2, при котором элемент $fR_1 \in F_1/R_1$ отображается на элемент $\alpha(f)R_2 \in F_2/R_2$. Обозначим этот гомоморфизм через $\bar{\alpha}$. Эндоморфизмы колец $\mathbb{Z}F_1 \to \mathbb{Z}F_2$ и $\mathbb{Z}F_1/R_1 \to \mathbb{Z}F_2/R_2$ будем обозначать соответственно через α и $\bar{\alpha}$.

Через γ_i, $i = 1, 2$, обозначим естественный гомоморфизм $F_i \to F_i/R_i$. В этих обозначениях мы должны доказать равенство

$$\bar{\alpha}\gamma_1(D_i(g)) = \gamma_2 D_i(\alpha(g))$$

для любого $g \in F_1$. Индукцией по длине элемента $g = g(a, c)$ из свободного произведения легко доказать, что $D_i(\alpha(g)) = \alpha(D_i(g))$. Далее, пусть $D_i(g) = h(a, c) \in \mathbb{Z}(F_1)$. Тогда $\gamma_1(h) = h(aR_1, cR_1)$, $\bar{\alpha}\gamma_1(h) = h(aR_2, c_pR_2)$. Затем $\alpha(h) = h(a, c_p)$, $\gamma_2\alpha(h) = h(aR_2, c_pR_2)$. Отсюда следует справедливость равенства (1).

Таким образом, значения обобщенных производных Фокса от элементов g_j, $j = 1, \dots, r$, в кольце $\mathbb{Z}(\langle a\rangle \underset{\mathfrak{A}^{n-1}}{*} \langle c\rangle)$ не равны нулю. Значит, все элементы $\varphi_p(g_j)$ не равны единице. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $\langle c_p\rangle$ — циклические группы, порядки которых не ограничены, $\langle a\rangle$ — нетривиальная циклическая группа, $C = \prod\limits_p \langle c_p\rangle$ — прямое произведение групп $\langle c_p\rangle$ и $G = \langle a\rangle \underset{\mathfrak{A}^n}{*} C$. Тогда многообразие $\mathrm{var}(G)$, порожденное группой G, совпадает с многообразием $\mathfrak{A}^n$ всех разрешимых групп ступени разрешимости $\le n$.*

Доказательство. Группа $H = \langle a\rangle \underset{\mathfrak{A}^n}{*} \langle c\rangle$, где $\langle c\rangle$ — бесконечная циклическая группа, дискриминируется семейством групп $G_p = \langle a\rangle \underset{\mathfrak{A}^n}{*} \langle c_p\rangle$. Следовательно, группа H аппроксимируется этим семейством групп. Значит, H — подгруппа декартова произведения групп G_p. Каждая группа G_p является подгруппой группы G. Поэтому по теореме Биркгофа и лемме 1 получаем

$$\mathrm{var}(G) \supseteqq \mathrm{var}(G_p \mid p \in \mathfrak{N}) \supseteqq \mathrm{var}(H) = \mathfrak{A}^n.$$

Так как $G \in \mathfrak{A}^n$, то $\mathrm{var}(G) = \mathfrak{A}^n$, что и требовалось доказать.

Теорема. *Пусть $A = \prod\limits_{i \in I} \langle a_i\rangle$, $B = \prod\limits_{j \in J} \langle b_j\rangle$ — разложения абелевых групп в прямое произведение нетривиальных циклических групп. Группа $A \underset{\mathfrak{A}^n}{*} B$, $n \ge 1$, порождает многообразие $\mathfrak{A}^n$ всех разрешимых групп ступени разрешимости $\le n$ тогда и только тогда, когда прямое произведение $A \times B$ порождает многообразие $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп.*

Доказательство. Очевидно, что группа $A \times B$ порождает многообразие $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда она не является группой конечной экспоненты.

Это может быть в двух случаях. Первый случай: среди циклических сомножителей есть бесконечная группа. Из теоремы 18.42 [1] и леммы 1 следует, что группа $A \underset{\mathfrak{A}^n}{*} B$, $n \geq 1$, порождает многообразие $\mathfrak{A}^n$. Второй случай: порядки элементов группы A или B не ограничены. Тогда группа $A \underset{\mathfrak{A}^n}{*} B$, $n \geq 1$, порождает многообразие $\mathfrak{A}^n$ по той же теореме 18.42 из [1] и следствию из леммы 3. Если группа $A \times B$ не порождает многообразие $\mathfrak{A}$, то порядки ее элементов ограничены и нужно сослаться на лемму 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейман Х.* Многообразия групп. М.: Мир, 1969.
2. *Тимошенко Е. И.* Об универсально эквивалентных разрешимых группах // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 2. С. 227–240.
3. *Chapuis O.* ∀-free metabelian groups // J. Symb. Log. 1997. V. 62. P. 159–174.
4. *Шмелькин А. Л.* О свободных произведениях групп // Мат. сб. 1969. Т. 79, № 4. С. 616–620.
5. *Шмелькин А. Л.* О некоторых фактор-группах свободного произведения // Тр. семинара им. Петровского. 1979. Т. 5. С. 209–216.
6. *Романовский Н. С.* К теореме о свободе для произведений групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 354–367.
7. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 29–62.
8. *Романовский Н. С.* К теореме о свободе для произведений групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3. С. 354–367.

Статья поступила 3 июня 2010 г.

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru